УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

О приближенном решении задачи Коши для системы ОДУ посредством системы $1,\ x,\ \{\frac{\sqrt{2}}{\pi n}\sin(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}$

Рассмотрена система функций $\xi_0(x) = 1$, $\{\xi_n(x) = \sqrt{2}\cos(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}$ и порожденная ею система

$$\xi_{1,0}(x) = 1,\ \xi_{1,1}(x) = x,\ \xi_{1,n+1}(x) = \int_0^x \xi_n(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi n}\sin(\pi n x),\ n = 1, 2, \ldots,$$

которая является ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения вида $< f, g >= f'(0)g'(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Показано, что ряды и суммы Фурье по системе $\{\xi_{1,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является удобным и весьма эффективным инструментом приближенного решения задачи Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Библиография: 8 названий

We consider a system of functions $\xi_0(x) = 1$, $\{\xi_n(x) = \sqrt{2}\cos(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}$ and the system

$$\xi_{1,0}(x) = 1,\ \xi_{1,1}(x) = x,\ \xi_{1,n+1}(x) = \int_0^x \xi_n(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi n}\sin(\pi n x),\ n = 1, 2, \ldots,$$

generated by it, which is Sobolev orthonormal with respect to a scalar product of the form $< f, g >= f'(0)g'(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. It is shown that the Fourier series and sums with respect to the system $\{\xi_{1,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ are a convenient and very effective tool for the approximate solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear ordinary differential equations (ODEs).

Bibliography: 8 items

Ключевые слова: задача Коши, ОДУ, ряды Фурье, суммы Фурье, приближенное решение

Keywords: Cauchy problem, ODE, Fourier series, Fourier sums, approximate solution

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследования, связанные с применением ортогональных по Соболеву систем функций при приближенном решении задачи Коши для системы ОДУ вида

$$y'(x) = F(x, y), \quad y(a) = y^0, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00486а)

где $F = (F_1, \dots, F_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $y(a) = (y_1^0, \dots, y_m^0)$, начатое в работах [1] – [5]. Рассматривая задачу Коши (1.1), мы будем накладывать на вектор-функцию $F(x, y)$ определенные условия, соблюдение которых гарантирует сходимость некоторых итерационных процессов, сконструированных с целью найти приближенные значения коэффициентов в разложении искомого решения задачи Коши в ряд по ортонормированным по Соболеву функциям $\xi_{1,k}$. Вектор-функцию $F(x, y)$ будем считать непрерывной в некоторой замкнутой области $\bar{G}$ переменных (x, y), содержащей точку (a, y_0) и такой, что $[a, b] \times \mathbb{R}^m \subset \bar{G}$. Один из возможных подходов к достижению намеченной цели основан на предположении о возможности разбиения отрезка $[a, b]$ на несколько частей точками $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ так, чтобы на каждом из промежутков $[a_i, a_{i+1}]$ вектор-функцию $F(x, y)$ по переменной y удовлетворяла условию Липшица. Через $y_i(x)$ обозначим решение уравнения $y'(x) = F(x, y)$ с начальным условием $y(a_i) = y^0$ при $i = 0$ и $y_i(a_i) = y_i^0 = \tilde{y}_{i-1}(a_i)$, если $1 \leqslant i \leqslant n-1$, где $\tilde{y}_i(x)$ – некоторая функция, которая является аппроксимирующей для $y_i(x)$ при $x \in [a_i, a_{i+1}]$. Конструирование функции $\tilde{y}_i(x)$ в [1, 2] базируется на преобразовании уравнения (1.1) путем замены переменных $x = a_i + ht$ к виду

$$\phi_i'(t) = hf(t, \phi_i), \quad \phi_i(0) = y_i^0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.2}$$

где $h = a_{i+1} - a_i$, $\phi_i(t) = y_i(a_i + ht)$, $f(t, \phi_i) = F(a_i + ht, \phi_i)$, и взятии в качестве $\tilde{y}_i(a_i + ht)$ частичной суммы разложения на $[0, 1]$ функции $\phi_i(t)$ с $i = 0, \dots, n-1$ в ряд Фурье по системе $\varphi^1 = \{\varphi_{1,k}\}$, образующей ортонормированную с некоторым весом $\rho(x)$ систему относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\rho(x)dx. \tag{1.3}$$

Что касается функции $\tilde{y}(x)$, аппроксимирующей решение $y(x)$ исходной задачи Коши $y'(x) = F(x, y)$ на всем отрезке $[a, b]$ с начальным условием $y(0) = y^0$, то она может быть сконструирована [1, 2] путем «склеивания» аппроксимирующих функций $\tilde{y}_i(x)$ с $i = 0, 1, \dots, n-1$.

В настоящей статье предлагается аналогичный подход решения поставленной задачи с той лишь разницей, что вместо $x = a_i + ht$ предлагается использовать другую замену переменных. А именно, рассмотрим, к примеру, задачу Коши (1.1) на отрезке $[0, h]$. Произведем замену переменной $x = h \sin \pi t$ и положим $\eta(t) = y(h \sin \pi t) - y^0$. Тогда относительно новой переменной t система (1.1) принимает вид $\eta'(t) = h\pi F(h \sin \pi t, y^0 + \eta) \cos \pi t, \quad \eta(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Но нам будет удобно рассмотреть эту задачу на всем отрезке $[0, 1]$, другими словами, мы рассмотрим задачу Коши вида

$$\eta'(t) = hf(t, \eta), \quad \eta(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.4}$$

где $f(t, \eta) = \pi F(h \sin \pi t, y^0 + \eta) \cos \pi t$, причем $\eta(1) = y(h \sin \pi) - y^0 = y(0) - y^0 = 0$. Существенная разница между системами уравнений (1.2) и (1.4) заключается в том, что решение $\eta(t)$ задачи Коши (1.4) можно 2-периодически продолжить на всю ось $\mathbb{R}$ так, чтобы продолженная вектор-функция $\eta(t)$ будет нечетной и непрерывно дифференцируемой. Поэтому, ряд Фурье для решения уравнения (1.4) по ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (1.3) системе $\{\xi_{1,k}\}_{k=0}^{\infty}$, которая определяется [1, 2] посредством равенств

$$\xi_{1,0}(t) = 1, \quad \xi_{1,1}(t) = t, \quad \xi_{1,n+1}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n}\sin(\pi n t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

приобретает вид

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j}\xi_{1,j}(t) = \sqrt{2}\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \hat{\eta}_{1,k+1}\frac{\sin(\pi k t)}{\pi k}, \tag{1.5}$$

где $\hat{\eta}_{1,1} = \int_0^1 \eta'(\tau)d\tau = 0$,

$$\hat{\eta}_{1,k+1} = (\widehat{\eta_1}_{1,k+1}, \ldots, \widehat{\eta_m}_{1,k+1}) = \sqrt{2}\int_0^1 \eta'(\tau)\cos(\pi k\tau)d\tau \quad (k \geqslant 1). \tag{1.6}$$

Полагая

$$b_k(\eta) = 2\int_0^1 \eta(\tau)\sin(\pi k\tau)d\tau = \int_{-1}^1 \eta(\tau)\sin(\pi k\tau)d\tau,$$

мы можем придать равенству (1.5) еще такой вид

$$\eta(t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} b_k(\eta)\sin(\pi k t).$$

Отсюда видно, что задачи об исследовании в пространствах $L^2(0,1)$ и $C[0,1]$ поведения при $N \to \infty$ величины $V_N(\eta,t) = \eta(t) - Y_{1,N}(\eta,t) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \widehat{\eta}_{1,j}\xi_{1,j}(t)$, которая играет ключевую роль в вопросе о скорости сходимости итерационного процесса, сконструированного с целью нахождения приближенных значений коэффициентов (1.6) в разложении решения $\eta(t)$ в ряд (1.5), сводятся к исследованию в этих же пространствах поведения при $N \to \infty$ остаточного члена

$$R_N(\eta,t) = \sum\nolimits_{k=N}^{\infty} b_k(\eta)\sin(\pi k t)$$

тригонометрического ряда Фурье функции $\eta(t)$, которая, как уже отмечалось, является нечетной 2-периодической и непрерывно дифференцируемой на всей оси $\mathbb{R}$. Но это – детально исследованная классическая задача.

2. Системы ортогональных по Соболеву функций, порожденные косинусами

Рассмотрим систему функций

$$\xi_0(x) = 1, \quad \{\xi_n(x) = \sqrt{2}\cos(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{2.1}$$

которая является ортонормированной относительно скалярного произведения $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$, т.е.

$$< \xi_n, \xi_m >= \int_0^1 \xi_n(x)\xi_m(x)dx = \delta_{nm}. \tag{2.2}$$

Для каждого натурального r система (1.1) порождает новую систему функций

$$\xi_{1,n+r}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}\xi_n(t)dt, n = 0, 1, 2, \dots. \tag{2.3}$$

Кроме того определим r функций

$$\xi_{1,k}(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r-1. \tag{2.4}$$

В частности, для $r = 1$

$$\xi_{1,0}(x) = 1, \quad \xi_{1,1}(x) = x, \quad \xi_{1,n+1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n}\sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{2.5}$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что

$$(\xi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \xi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \leqslant \nu \leqslant r-1,\ r \leqslant k, \\ \xi_{k-r}(x) & \text{если } \nu = r \leqslant k, \\ \xi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \leqslant k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leqslant r. \end{cases} \tag{2.6}$$

Из (2.3) нетрудно вывести также следующее равенство ($k = 1, 2, \dots$)

$$\xi_{r,r+k}(t) = \frac{(-1)^r\sqrt{2}}{(\pi k)^r}\left[\cos\left(\pi k t + \frac{\pi r}{2}\right) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(\pi k t)^\nu}{\nu!}\cos^{(\nu)}(\pi r/2)\right]. \tag{2.7}$$

В частности, если $r = 2$, то система $\{\xi_{2,n}(t)\}_{n=0}^\infty$ имеет вид

$$\xi_{2,0}(t) = 1, \quad \xi_{2,1}(t) = t, \quad \xi_{2,2}(t) = \frac{t^2}{2}, \left\{\xi_{2,k+2}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{(k\pi)^2}\sin^2\frac{k\pi t}{2}\right\}_{k=1}^\infty. \tag{2.8}$$

3. Дальнейшие свойства системы $\{\xi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$

При изучении дальнейших свойств системы функций $\{\xi_{r,k}(x)\}$ нам понадобится пространство Соболева $W^r_{L^p(0,1)}$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p(0,1)$. Скалярное произведение в пространстве $W^r_{L^2(0,1)}$ определим с помощью равенства

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)dt. \tag{3.1}$$

Тогда для $f \in W^r_{L^2(0,1)}$ мы можем определить норму $\|f\|_{W^r_{L^2(0,1)}} = \sqrt{\langle f, g\rangle}$, которая превращает $W^r_{L^2(0,1)}$ в банахово пространство и, стало быть, $W^r_{L^2(0,1)}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением (3.1). Следующее утверждение, которое мы приведем вместе с его кратким доказательством, для общих систем $\{\varphi_{r,k}\}_{k=0}^\infty$, порожденных заданной ортонормированной системой $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, было доказано в [5].

Лемма 3.1. *Система* $\{\xi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *, порожденная системой* $\{\xi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *посредством равенств* (2.3) *и* (2.4)*, полна в* $W^r_{L^2(0,1)}$ *и ортонормирована относительно скалярного произведения* (3.1)*.*

Доказательство. Из равенства (2.3) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $(\xi_{r,k}(x))^{(\nu)}_{x=0} = 0$, поэтому в силу (2.6), имеем

$$< \xi_{r,k}, \xi_{r,l} >= \int_0^1 (\xi_{r,k}(x))^{(r)} (\xi_{r,l}(x))^{(r)} dx =$$

$$\int_0^1 \xi_{k-r}(x)\xi_{l-r}(x)dx = \delta_{kl}, \quad k, l \geqslant r, \tag{3.2}$$

а из (2.4) и (2.6) имеем

$$< \xi_{r,k}, \xi_{r,l} >= \sum_{\nu=0}^{r-1} (\xi_{r,k}(x))^{(\nu)}|_{x=0} (\xi_{r,l}(x))^{(\nu)}|_{x=0} = \delta_{kl}, \quad k, l < r. \tag{3.3}$$

Очевидно также, что

$$< \xi_{r,k}, \xi_{r,l} >= 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k. \tag{3.4}$$

Это означает, что функции $\xi_{r,k}(t)\,(k = 0, 1, \dots)$ образуют в $W^r_{L^2(0,1)}$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (3.1). Остается убедиться в ее полноте в $W^r_{L^2(0,1)}$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f \in W^r_{L^2(0,1)}$ и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $< f, \xi_k >= 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leqslant r-1$, то $< f, \xi_{r,k} >= f^{(k)}(0)$, поэтому с учетом того, что $< f, \xi_{r,k} >= 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt. \tag{3.5}$$

С другой стороны, для всех $k \geqslant r$ имеем

$$0 =< f, \xi_{r,k} >= \int_0^1 f^{(r)}(x)(\xi_{r,k}(x))^{(r)}dx = \int_0^1 f^{(r)}(x)\xi_{k-r}(x)dx.$$

Отсюда и из того, что $\xi_m(x)$ $(m = 0, 1, \dots)$ образуют в $L^2(0, 1)$ полную ортонормированную систему имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$. Поэтому $f(x) \equiv 0$. Лемма 3.1 доказана.

Следуя [5], мы будем называть систему $\{\xi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (3.1) и *порожденной* ортонормированной системой $\{\xi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{L^2(0,1)}$ по системе $\{\xi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ имеет смешанный характер, а, более точно, имеет следующий вид

$$f(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum\nolimits_{k=r}^{\infty} \hat{f}_{r,k}\xi_{r,k}(x), \tag{3.6}$$

где
$$\hat{f}_{r,k} = \int_0^1 f^{(r)}(t)\xi_{r,k}^{(r)}(t)dt = \int_0^1 f^{(r)}(t)\xi_{k-r}(t)dt. \tag{3.7}$$

Следует отметить, что теория систем функций, ортогональных по Соболеву в последнее время получила [5] интенсивное развитие. Особенно это касается [6] полиномов, ортогональных по Соболеву. Ряды вида (3.2) для полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных классическими ортогональными полиномами были подробно исследованы в работах [7], [8], следуя которым будем называть ряд (3.2) *смешанным рядом* по системе $\{\xi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, считая это название условным и сокращенным обозначением полного названия: «*ряд Фурье по системе $\{\xi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву, порожденной ортонормированной системой $\{\xi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$*».

Заметим, что для для построения смешанного ряда (3.6) требуется, чтобы функция ϕ была абсолютно непрерывной на $[0,1]$, поэтому следующая теорема носит окончательный характер.

Теорема 1. *Если $\phi \in W^1_{L^1(0,1)}$, то ряд Фурье (смешанный ряд)* (3.6) *для $r = 1$ сходится к функции $\phi(t)$ равномерно относительно $t \in [0,1]$.*

Доказательство. С учетом равенств (2.5) мы можем переписать (3.6) для $r = 1$ в следующем виде
$$\phi(t) = \phi(0) + \hat{\phi}_{1,1}t + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \hat{\phi}_{1,k+1}\xi_{1,k+1}(t) =$$
$$\phi(0) + \hat{\phi}_{1,1}t + \sqrt{2}\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \hat{\phi}_{1,k+1}\frac{\sin(\pi kt)}{\pi k}, \tag{3.8}$$
где в силу (3.7)
$$\hat{\phi}_{1,k+1} = \sqrt{2}\int_0^1 \phi'(t)\cos(\pi kt)dt =$$
$$\sqrt{2}\int_0^1 [\phi(t) - \phi(0) - (\phi(1) - \phi(0))t]'\cos(\pi kt)dt =$$
$$\sqrt{2}\pi k\int_0^1 [\phi(t) - \phi(0) - (\phi(1) - \phi(0))t]\sin(\pi kt)dt. \tag{3.9}$$
Из (3.8) и (3.9) имеем
$$\bar{\phi}(t) = \phi(t) - \phi(0) - (\phi(1) - \phi(0))t = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\pi kt), \tag{3.10}$$
где
$$b_k = 2\int_0^1 \bar{\phi}(\tau)\sin(\pi k\tau)d\tau = \int_{-1}^1 \bar{\phi}(\tau)\sin(\pi k\tau)d\tau. \tag{3.11}$$
Правая часть равенства (3.10) представляет собой тригонометрический ряд Фурье функции $\bar{\phi}(t) = \phi(t) - \phi(0) - (\phi(1) - \phi(0))t$, продолженной на всю числовую ось по нечетности и 2-периодически. Далее заметим, из абсолютной непрерывности функции $\phi(t)$ на $[0,1]$ следует, что функция $\bar{\phi}(t)$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$, поэтому ряд Фурье (3.10) равномерно на $[-1,1]$ сходится к $\bar{\phi}(t)$. Это равносильно тому, что ряд (3.8) сходится равномерно на $[0,1]$ к своей сумме $\phi(t)$. Теорема 1 доказана.

Для порожденной системы $\{\xi_{1,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ мы рассмотрим следующую величину

$$\kappa_\xi = \left(\int_0^1 \sum_{k=2}^{\infty} (\xi_{1,k}(t))^2 \cos^2 \pi t dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.12}$$

которая играет ключевую роль для скорости сходимости итерационных процессов, возникающих при приближении решения задачи Коши для ОДУ суммами Фурье по системе $\{\xi_{1,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Лемма 3.2. *Имеет место равенство* $\kappa_\xi^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}$.

Доказательство. Из (1.5) имеем

$$\kappa_\xi^2 = \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \int_0^1 (\xi_{1,n}(x))^2 \cos^2 \pi x dx = \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^2} \int_0^1 \cos^2 \pi x \sin^2(\pi n x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1) = \frac{1}{2\pi^2}(\frac{\pi^2}{6} - 1) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}.$$

Лемма 3.2 доказана.

Отметим некоторые свойства смешанного ряда (3.6), непосредственно вытекающие из (2.6). Важное значение имеет свойство, которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$Y_{r,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{N} \hat{f}_{r,k} \xi_{r,k}(x) \tag{3.13}$$

при $N \geqslant r$, r-кратно совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = 0$, т.е.

$$(Y_{r,N}(f,x))_{x=0}^{(\nu)} = f^{(\nu)}(0) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1). \tag{3.14}$$

Кроме того, из (2.6) следует, что $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$

$$Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x) = \sum_{n=0}^{r-1-\nu} f^{(n+\nu)}(0) \frac{x^n}{n!} +$$

$$\sum_{n=r-\nu}^{N-\nu} \widehat{f^{(\nu)}}_{r-\nu,n} \xi_{r-\nu,n}(x) = Y_{r-\nu,N-\nu}(f^{(\nu)}, x), \tag{3.15}$$

$$f^{(\nu)}(x) = \sum_{n=0}^{r-1-\nu} f^{(n+\nu)}(0) \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=r-\nu}^{\infty} \widehat{f^{(\nu)}}_{r-\nu,n} \xi_{r-\nu,n}(x), \tag{3.16}$$

$$f^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^{(r)}}_{0,n} \xi_n(x). \tag{3.17}$$

Последнее равенство означает, что ряд, фигурирующий в его правой части сходится к $f^{(r)}$ в метрике пространства $L^2(0,1)$. Из предпоследнего равенства и из (3.15), в свою очередь, выводим $(0 \leqslant \nu \leqslant r-2)$

$$f^{(\nu)}(x) - Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x) = \frac{1}{(r-\nu-2)!} \int_0^x (x-t)^{r-\nu-2} (f^{(r-1)}(t) - Y_{r,N}^{(r-1)}(f,t)) dt =$$

$$\frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_0^x (x-t)^{r-\nu-2}(f^{(r-1)}(t)-Y_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t))dt. \tag{3.18}$$

Дифференциальные свойства смешанных рядов (3.6), выраженные равенствами (3.15) и (3.16), показывают, что их частичные суммы $Y_{r,N}(f,x)$ могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать заданную дифференцируемую функцию и несколько ее производных. В дальнейшем мы существенно воспользуемся этими свойствами при рассмотрении вопроса о представлении решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в виде ряда Фурье по системе $\{\xi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

4. Система функций $\xi_{1,n}(x)$ и задача Коши для ОДУ

В вводном параграфе §1 было отмечено, что система функций $\xi_{1,n}(x)$ тесно связана с задачей Коши (1.1) для систем ОДУ (вообще говоря, нелинейных). Согласно общей концепции, предложенной в работах [1, 2], функция $\tilde{y}(x)$, аппроксимирующая решение $y(x)$ исходной задачи Коши (1.1) на всем отрезке $[a,b]$ с начальным условием $y(a)=y^0$ конструируется путем «склеивания» функций $\tilde{y}_i(x)$ с $i=0,1,\dots,n-1$, аппроксимирующих решения этого же уравнения на частичных отрезках $[a_i,a_{i+1}]$ с указанными там соответствующими начальными условиями. При этом возникает задача об оценке погрешности $\max_{x\in[a,b]}|y(x)-\tilde{y}(x)|$. Для простоты выкладок мы ограничимся в настоящем параграфе рассмотрением этого вопроса в одномерном случае для задачи Коши вида

$$u'(x)=F(x,u), \quad u(a)=u_0, \tag{4.1}$$

в которой функцию $F(x,u)$ будем считать непрерывной в некоторой области $\bar{G}$, которая в качестве своего подмножества содержит множество $[a,b]\times\mathbb{R}$. Будем также предполагать, что функция $F(x,u)$ по переменной u удовлетворяет условиям

$$|F(x,q')-F(x,q'')|\leqslant\lambda_i|q'-q''|, \quad a_i\leqslant x\leqslant a_{i+1}, \tag{4.2}$$

где $a=a_0<a_1<\dots<a_n=b$, $\lambda_i\geqslant 0$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$. Требуется с заданной точностью приблизить на $[a,b]$ функцию $u=u(x)$, которая является решением задачи Коши (4.1). Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть непрерывная функция $F(x,u)$, заданная в области $\bar{G}$ переменных (x,u), удовлетворяет условию Липшица $|F(x,q')-F(x,q'')|\leqslant\lambda|q'-q''|$, в котором постоянная λ не зависит от $x\in[\alpha,\beta]$. Далее, пусть $(\alpha,u_0)\in\bar{G}$, $(\alpha,v_0)\in\bar{G}$, $u=u(x)$ и $v=v(x)$ два решения уравнения $u'(x)=F(x,u)$ на $[\alpha,\beta]$ с соответствующими начальными условиями $u(\alpha)=u_0$, $v(\alpha)=v_0$. Тогда если $(\beta-\alpha)\lambda<1$, то имеет место неравенство*

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]}|u(t)-v(t)|\leqslant\frac{|u_0-v_0|}{1-(\beta-\alpha)\lambda}.$$

Доказательство. Применяя формулу Ньютона-Лейбница к разности $u(t)-v(t)$, мы можем записать

$$u(t)-v(t)=u_0-v_0+\int_\alpha^t(u'(\tau)-v'(\tau))d\tau=$$

$$u_0 - v_0 + \int_\alpha^t (F(\tau, u(\tau)) - F(\tau, v(\tau)))d\tau.$$

Воспользуемся теперь условием $|F(t,q') - F(t,q'')| \leqslant \lambda|q' - q''|$, тогда из предыдущего равенства находим

$$|u(t) - v(t)| \leqslant |u_0 - v_0| + \lambda \int_\alpha^t |u(\tau) - v(\tau)|d\tau \leqslant$$

$$|u_0 - v_0| + (\beta - \alpha)\lambda \max_{\tau\in[\alpha,\beta]} |u(\tau) - v(\tau)|,$$

а отсюда, в свою очередь, получаем

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} |u(t) - v(t)| \leqslant |u_0 - v_0| + (\beta - \alpha)\lambda \max_{t\in[\alpha,\beta]} |u(t) - v(t)|.$$

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Пусть непрерывная функция $F(x,u)$, задана в области $\bar G$ переменных (x,u). Предположим, что $[a,b]\times\mathbb{R} \subset \bar G$ и пусть отрезок $[a,b]$ разбит на части точками $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Далее, пусть $(a_i, u_i^0) \in \bar G$ при $i = 0,\ldots,m-1$, $u_i = u_i(x)$ – решения уравнения $u'(x) = F(x,u)$ на $[a_i, b]$, удовлетворяющие соответствующим начальным условиям $u_i(a_i) = u_i^0$. Будем считать, что $F(x,u)$ по переменной и удовлетворяет при каждом $i = 0,\ldots,n-1$ условию Липшица (4.2). Тогда если $\lambda_k(a_{k+1} - a_k) < 1$ при всех $k = 1,\ldots,i$, то для $u(x) = u_0(x)$ имеет место неравенство*

$$\max_{t\in[a_i,a_{i+1}]} |u(t) - u_i(t)| \leqslant \sum_{l=1}^{i} Q_l^i |u_{l-1}(a_l) - u_l(a_l)|,$$

где $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$Q_l^i = \prod_{j=0}^{i-l} \frac{1}{1 - \lambda_{i-j}(a_{i-j+1} - a_{i-j})}.$$

Доказательство. Для $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $t \in [a_i, a_{i+1}]$ имеем

$$|u(t) - u_i(t)| \leqslant \sum_{l=1}^{i} |u_{l-1}(t) - u_l(t)|,$$

а в силу леммы 4.1

$$|u_{l-1}(t) - u_l(t)| \leqslant \frac{|u_{l-1}(a_i) - u_l(a_i)|}{1 - \lambda_i(a_{i+1} - a_i)} \leqslant$$

$$\frac{|u_{l-1}(a_{i-1}) - u_l(a_{i-1})|}{(1 - \lambda_i(a_{i+1} - a_i))(1 - \lambda_{i-1}(a_i - a_{i-1}))} \leqslant \ldots$$

$$\leqslant \frac{|u_{l-1}(a_l) - u_l(a_l)|}{(1 - \lambda_i(a_{i+1} - a_i)) \cdots (1 - \lambda_l(a_{l+1} - a_l))}.$$

Утверждение леммы 4.2 немедленно вытекает из приведенных неравенств.

Рассмотрим вопрос о конструировании функции $\tilde{u}(x)$, определенной на $[a,b]$, которая с заданной точностью будет приближать решение $u(x)$ уравнения $u'(x) = F(x,u)$ на $[a,b]$ с начальным условием $u(a) = u_0^0$. С этой целью мы обратимся к лемме 4.2. Предположим, что на каждом из отрезков $[a_i, a_{i+1}]$, фигурирующих в лемме 4.2, мы построили непрерывную функцию $\tilde{u}_i(x)$, приближающую решение $u_i(x)$ уравнения $u'(x) = F(x,u)$ на $[a_i, a_{i+1}]$ с начальным условием $u_i(a_i) = u_i^0$ так, чтобы было $\tilde{u}_i(a_i) = u_i(a_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, а при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ выполняются условия $\tilde{u}_i(a_i) = \tilde{u}_{i-1}(a_i)$. На всем отрезке $[a,b]$ определим непрерывную функцию $\tilde{u}(x)$, полагая $\tilde{u}(x) = \tilde{u}_i(x)$ при $x \in [a_i, a_{i+1}], i = 0, \dots, n-1$. Положим $\delta_i = \max_{x\in[a_i,a_{i+1}]} |\tilde{u}_i(x) - u_i(x)|$. Тогда из леммы 4.2 имеем

$$\max_{t\in[a_i,a_{i+1}]} |u(t) - \tilde{u}_i(t)| \leqslant \max_{t\in[a_i,a_{i+1}]} |u(t) - u_i(t)| + \delta_i \leqslant$$

$$\sum_{l=1}^{i} Q_l^i |u_{l-1}(a_l) - u_l(a_l)| + \delta_i = \sum_{l=1}^{i} Q_l^i |u_{l-1}(a_l) - \tilde{u}_{l-1}(a_l)| + \delta_i \leqslant \sum_{l=1}^{i} Q_l^i \delta_{l-1} + \delta_i.$$

Поэтому, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть соблюдены условия леммы 4.2 и, кроме того, $\lambda_k(a_{k+1} - a_k) < 1$ при всех $k = 1, \dots, n-1$. Тогда для $u(t) = u_0(t)$ имеют место следующие неравенства*

$$\max_{t\in[a_0,a_1]} |u(t) - \tilde{u}(t)| \leqslant \delta_0,$$

$$\max_{t\in[a_i,a_{i+1}]} |u(t) - \tilde{u}(t)| \leqslant \sum\nolimits_{l=1}^{i} Q_l^i \delta_{l-1} + \delta_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Перейдем к конструированию аппроксимирующих функций $\tilde{u}_i$, удовлетворяющих условиям леммы 4.2. Мы покажем, что удобным и весьма эффективным инструментом решения этой задачи являются ряды Фурье по ортогональным по Соболеву функциям $\xi_{1,k}(x)$, рассмотренные нами в §3. Следует при этом отметить, что выбор разбиения $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, фигурирующего в леммах 4.2 и 4.3, оптимального в том или ином смысле, существенно зависит от свойств функции $F(x,u)$, в том числе и от того, насколько большими являются константы λ_i в условиях Липшица $|F(x,q') - F(x,q'')| \leqslant \lambda_i |q' - q''|$ ($x \in [a_i, a_{i+1}]$) с $i = 0, \dots, n-1$. Не останавливаясь на подробном обсуждении этого вопроса, мы перейдем к задаче о приближении искомого решения $u_i(x)$ задачи Коши на отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ с заданным начальным условием $u_i(a_i)$, где $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Идея построения функций $\tilde{u}_i(x)$, аппроксимирующих на соответствующих отрезках $[a_i, a_{i+1}]$ искомые решения $u_i(x)$ и таких, что $u_i(a_i) = \tilde{u}_i(a_i)$ при $0 \leqslant i \leqslant n-1$, а если $1 \leqslant i \leqslant m-1$ удовлетворяют условиям $\tilde{u}_i(a_i) = \tilde{u}_{i-1}(a_i)$, состоит в следующем. Предположим, что $[a,b] \times \mathbb{R} \subset \bar{G}$, а функция $F(x,u)$ непрерывна в области $\bar{G}$ и по переменной u удовлетворяет условиям (4.2). Положим $h = a_{i+1} - a_i$, $x = a_i + h \sin \pi t$, $\phi(t) = u_i(a_i + h \sin \pi t) - u_i(a_i)$. Относительно новой переменной $t \in [0,1]$ уравнение (4.1), рассматриваемое на отрезке $[a_i, a_i + h]$, принимает вид $\phi'(t) = h\pi F(a_i + h \sin \pi t, u_i(a_i) + \phi) \cos \pi t$, $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Но нам будет удобно его рассмотреть на всем отрезке $[0,1]$:

$$\phi'(t) = h\pi F(a_i + h \sin \pi t, u_i(a_i) + \phi) \cos \pi t, \quad \phi(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.3}$$

где $u_0(a_0) = u_0(a)$, $u_i(a_i) = \tilde{u}_{i-1}(a_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Для конструирования функции $\tilde{u}_0(x)$, аппроксимирующей решение $u_0(x)$ уравнения (4.1) на отрезке $[a_0, a_0+h]$ с начальным условием $u_0(a_0) = u(a)$ мы представим функцию $f(t) = \phi(t) = u_0(a+h\sin \pi t) - u_0(a)$ в виде ряда Фурье (3.6), который, в силу теоремы 1 равномерно на $[0,1]$ сходится и принимает вид (3.8). Поскольку, как нетрудно показать, решение задачи Коши (4.3) удовлетворяет условию $\phi(1) = 0$, то ряд (3.8), в свою очередь, можно записать в следующем виде

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \hat{\phi}_{1,k+1}\frac{\sin(\pi k t)}{\pi k},$$

где

$$\hat{\phi}_{1,k+1} = \int_0^1 \phi'(t)\xi_k(t)dt = \sqrt{2}\pi k\int_0^1 \phi(t)\sin(\pi k t)dt.$$

Отсюда имеем

$$\phi(t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} b_k(\phi)\sin(\pi k t), \tag{4.4}$$

где

$$b_k(\phi) = \int_{-1}^1 \phi(t)\sin(\pi k t)dt.$$

Положим для $x = a_0 + h\sin \pi t$

$$\tilde{u}_0(x) = u_0(a_0) + Y_{1,N_0}(\phi, t) = u_0(a_0) + \sum\nolimits_{k=1}^{N_0-1} b_k(\phi)\sin(\pi k t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $Y_{1,N_0}(\phi,t)$ – частичная сумма ряда Фурье (4.4), N_0 – произвольное натуральное число, которое при решении конкретной задачи следует выбрать, в зависимости от требуемой точности приближения искомого решения $u_0(x) = u_0(a_0)+\phi(t) = u_0(a_0)+\sum_{k=1}^{\infty} b_k(\phi)\sin(\pi k t)$ на $[a_0, a_1]$ аппроксимирующей функцией $\tilde{u}_0(x)$. Аппроксимирующая функция $\tilde{u}_i(x)$ с $1 \leqslant i \leqslant n-1$ конструируем совершенно аналогично, выбирая в качестве начального значения искомого решения $u_i(x)$ на отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ число $\tilde{u}_{i-1}(a_i)$. Из свойства (3.14), которым обладают частичные суммы $Y_{1,N}(f,t)$ смешанного ряда (3.6), непосредственно вытекает, что если $1 \leqslant i \leqslant m-1$, то $\tilde{u}_{i-1}(a_i) = u_i(a_i) = \tilde{u}_i(a_i)$. Тем самым, аппроксимирующие функции $\tilde{u}_i(x)$ подчиняются условиям леммы 4.2 и, стало быть, справедливо неравенство для погрешности $|u_i(x)-\tilde{u}_i(x)|$, установленное в этой лемме. Далее, заметим, что погрешности δ_i, фигурирующие в лемме 4.3, приобретают вид $\delta_i = \max_{x\in[a_i,a_{i+1}]}|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| = \max_{t\in[0,1]}|V_{N_i}(\phi,t)|$, где $V_{N_i}(\phi,t) = \sum_{k=N_i}^{\infty} b_k(\phi)\sin(\pi k t)$. Отсюда непосредственно возникает задача об исследовании поведения $\max_{t\in[0,1]}|V_{N_i}(\phi,t)|$ при $N_i \to \infty$. Если мы определим с помощью равенств $\tilde{u}(x) = \tilde{u}_i(x) = u_i(a_i) + Y_{1,N_i}(\phi,t)$ $(x \in [a_i, a_{i+1}])$ аппроксимирующую функцию для искомого решения $u(x)$ задачи Коши (3.1), то для оценки разности $|u(x) - \tilde{u}(x)|$ можем использовать неравенства, полученные в лемме 4.3. Следует при этом отметить, что гладкость функции $u(x)$, представляющей собой решение задачи Коши для уравнения (3.1), а также гладкость функций $\phi_i(t) = u_i(a_i + ht)$ по переменной $t \in [0,1]$, следовательно, и скорость стремления к нулю величины $\max_{t\in[0,1]}|V_{N_i}(\phi,t)|$ при $N_i \to \infty$, в свою очередь, существенно зависят от свойств функции $F(x,u)$. На подробном обсуждении этого вопроса мы не остановимся, поскольку это выходит за рамки настоящей работы.

5. О представлении решения задачи Коши для систем ОДУ рядом Фурье по функциям $\xi_{1,n}(x)$

Как было показано в предыдущем параграфе на примере одномерной задачи Коши (4.1), проблема о конструировании функции $\tilde{u}(x)$, аппроксимирующей ее решение $u(x)$ на отрезке $[a,b]$ при соблюдении условий Липшица (4.2) может быть может быть решена путем «склеивания» аппроксимирующих функций $\tilde{u}_i(x)$ для решений $u_i(x)$ той же задачи на частичных отрезках $[a_i,b_i]$, причем конструирование функций $\tilde{u}_i(x)$ для $i=1,\dots,n-1$ можно осуществить также, как это сделано для $i=0$ на отрезке $[a,a+h]$. Совершенно аналогично можно поступить и в том случае, когда мы имеем дело с задачей Коши для системы ОДУ (1.1). При этом, не умаляя общности, мы можем считать, что $a=0$. Поэтому, для простоты выкладок, мы ограничимся рассмотрением следующей задачи Коши

$$y'(x)=F(x,y),\quad y(0)=y^0,\quad 0\leqslant x\leqslant h,\tag{5.1}$$

где $F=(F_1,\dots,F_m)$, $y=(y_1,\dots,y_m)$, $y(0)=(y_1^0,\dots,y_m^0)$. Рассмотрим вопрос о приближении решения задачи Коши (5.1), в которой функцию $F(x,y)$ будем считать непрерывной в некоторой замкнутой области $\bar{G}$ переменных (x,y), которая содержит точку $(0,y_0)$. При этом предполагается, что $F(x,y)$ по переменной y удовлетворяет нижеследующему условию Липшица (5.2) равномерно относительно $x\in[0,h]$. Кроме того мы будем считать, что $[0,h]\times\mathbb{R}^m\subset\bar{G}$. Это требование не сужает дальнейшие рассмотрения, так как, не ограничивая общности, мы можем, в случае необходимости, продолжить функцию $F(x,y)$ по переменной y на всё $\mathbb{R}^m$, сохраняя свойство ее подчиненности нижеследующему условию Липшица (4.3). Например, если область $\bar{G}$ такова, что прямая в $\mathbb{R}^{m+1}$ вида $(x,ty_1,\dots,ty_m)$ $(t\in\mathbb{R})$ для каждого $x\in[0,h]$ и $(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m$ пересекается с границей области $\bar{G}$ не более, чем в двух (граничных для $\bar{G}$) точках (x,y') и (x,y''), то $F(x,y)$ можно непрерывно продолжить на $[0,h]\times\mathbb{R}^m$, считая ее постоянной на лучах, выходящих из точек (x,y') и (x,y'') в противоположные направления вдоль прямой $(x,ty_1,\dots,ty_m)$ $(t\in\mathbb{R})$.

Кроме того мы будем считать, что по переменной y функция $F(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(x,a)-F(x,b)\|\leqslant\lambda_0\|a-b\|,\quad 0\leqslant x\leqslant h,\tag{5.2}$$

где $\|(a_1,\dots,a_m)\|=\sqrt{\sum_{l=1}^m a_l^2}$.

Положим $x=h\sin\pi t$, $\phi(t)=y(h\sin\pi t)-y^0$. Относительно новой переменной t уравнение (5.1) принимает вид $\phi'(t)=h\pi F(h\sin\pi t,y^0+\phi)\cos\pi t$, $0\leqslant t\leqslant 1/2$. Но нам будет удобно его рассмотреть на всем отрезке $[0,1]$:

$$\phi'(t)=h\pi F(h\sin\pi t,y^0+\phi)\cos\pi t,\quad \phi(0)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.\tag{5.3}$$

Для конструирования функции $\tilde{y}(x)$, аппроксимирующей решение $y(x)$ уравнения (5.1) на отрезке $[0,h]$ с начальным условием $y(0)=y^0$ мы представим функцию $\phi(t)=y(h\sin\pi t)-y^0$ в виде ряда Фурье (3.8). Поскольку, как нетрудно показать, решение задачи Коши (5.3) удовлетворяет условию $\phi(1)=0$ и, следовательно, $\hat{\phi}_{1,1}=\int_0^1\phi'(\tau)d\tau=0$, то ряд (3.8), в свою очередь, можно записать в следующем виде

$$\phi(t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \hat{\phi}_{1,k+1}\xi_{1,k+1}(t), \tag{5.4}$$

где $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$, $\phi' = (\phi'_1, \ldots, \phi'_m)$,

$$\hat{\phi}_{1,k+1} = (\widehat{\phi_1}_{1,k+1}, \ldots, \widehat{\phi_m}_{1,k+1}) = \int_0^1 \phi'(\tau)\xi_k(\tau)d\tau. \tag{5.5}$$

Поскольку, по предположению, функция $F(x, y)$ непрерывна в области $\bar{G}$, то из (5.3) следует, что функция $\phi'(t)$ непрерывна на $[0, 1]$ и, следовательно, $\phi_l \in W^1_{L^2(0,1)}$ для всех $1 \leqslant l \leqslant m$, поэтому в силу теоремы 1 ряд (5.4) сходится равномерно на $[0, 1]$, а его сумма $\phi(t)$ представляет собой нечетную непрерывно дифференцируемую 2-периодическую функцию. Пользуясь свойствами (2.6) и (3.16), мы можем записать равенство

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\phi}_{1,k+1}\xi_k t), \tag{5.6}$$

которое справедливо в метрике пространства $L^2(0, 1)$. Положим

$$q(t) = \pi F(h \sin \pi t, y^0 + \phi(t)) \cos \pi t = \phi'(t)/h$$

и заметим, что в силу (5.5) коэффициенты Фурье функции $q = q(t)$ по системе $\{\xi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ имеют вид

$$c_k(q) = \int_0^1 q(t)\xi_k(t)dt = \hat{\phi}_{1,k+1}/h \quad (k \geqslant 0), \tag{5.7}$$

причем $c_0 = \hat{\phi}_{1,1}/h = 0$. С учетом этих равенств мы можем переписать (5.4) в следующем виде

$$\phi(t) = h \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(q)\xi_{1,k+1}(t). \tag{5.8}$$

Наша цель состоит в том, чтобы сконструировать итерационный процесс для нахождения приближенных значений коэффициентов $c_k = \hat{\eta}_{1,k+1}/h$ $(k = 1, \ldots)$. Из (5.6) и (5.7) выводим следующие равенства

$$c_k(q) = \pi \int\limits_0^1 F(h \sin \pi t, y^0 + h \sum_{j=1}^{\infty} c_j(q)\xi_{1,j+1}(t))\xi_j(t) \cos \pi t dt, \; k = 1, \ldots. \tag{5.9}$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство l_2^m, состоящее из m-мерных последовательностей $C = (c_1, \ldots, c_j, \ldots)$, где $c_j = (c_j^1, \ldots, c_j^m)$, для которых определена норма

$$\|C\| = \left(\sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{l=1}^{m} (c_j^l)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что если $C \in l_2^m$, то ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j\xi_{1,j+1}(t)$ сходится равномерно на $[0, 1]$ и, стало быть, функция $g = g(t) = F(h \sin \pi t, y^0 + h \sum_{j=1}^{\infty} c_j\xi_{1,j+1}(t)) \cos \pi t$ непрерывна при $t \in [0, 1]$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $g \in L^2(0, 1)$.

Это позволяет рассмотреть в пространстве l_2^m оператор A, сопоставляющий точке $C \in l_2^m$ точку $C' \in l_2^m$ по правилу

$$c'_k = \pi \int\limits_0^1 F(h\sin\pi t, y^0 + h\sum_{j=1}^{\infty} c_j\xi_{1,j+1}(t))\cos\pi t\xi_j(t)dt,\ \ k = 1,\dots. \tag{5.10}$$

Из (5.9) следует, что точка $C(q) = (c_1(q), \dots)$ является неподвижной точкой оператора $A : l_2^m \to l_2^m$. Для того чтобы найти точку $C(q)$ методом простых итераций, достаточно показать, что оператор $A : l_2^m \to l_2^m$ является сжимающим в метрике пространства l_2^m. С этой целью рассмотрим две точки $P, Q \in l_2^m$, где $P = (p_1, \dots)$, $Q = (q_1, \dots)$, и положим $P' = A(P)$, $Q' = A(Q)$. Имеем

$$p'_k - q'_k = \pi \int_0^1 F_{P,Q}(t)\cos\pi t\xi_k(t)dt, \quad k = 1, \dots \tag{5.11}$$

где

$$F_{P,Q}(t) = F\left[h\sin\pi t, y^0 + h\sum\nolimits_{j=1}^{\infty} p_j\xi_{1,j+1}(t)\right] \\ - F\left[h\sin\pi t, y^0 + h\sum\nolimits_{j=1}^{\infty} p'_j\xi_{1,j+1}(t)\right]. \tag{5.12}$$

Из (5.11), пользуясь неравенством Бесселя, находим

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}((p_k^l)' - (q_k^l)')^2 \leqslant \pi^2\int_0^1 F_{P,Q}(t)(F_{P,Q}(t))^*\cos^2\pi t dt, \tag{5.13}$$

где $(a_1, \dots, a_m)^*$ – вектор-столбец, полученный в результате транспонирования строки $(a_1, \dots, a_m)$. Из (5.2) и (5.13) имеем

$$F_{P,Q}(t)(F_{P,Q}(t))^* \leqslant (h\lambda_0)^2\sum\nolimits_{l=1}^{m}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}(p_j^l - q_j^l)\xi_{1,j+1}(t)\right)^2, \tag{5.14}$$

откуда, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, выводим

$$F_{P,Q}(t)(F_{P,Q}(t))^* \leqslant (h\lambda_0)^2\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}(\xi_{1,j+1}(t))^2\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}\sum\nolimits_{l=1}^{m}(p_j^l - q_j^l)^2.$$

Сопоставляя (5.14) с (5.13), находим

$$\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}\sum\nolimits_{l=1}^{m}((p_j^l)' - (q_j^l)')^2 \leqslant \\ (\pi h\lambda_0)^2\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}\sum\nolimits_{l=1}^{m}(p_j^l - q_j^l)^2\int_0^1\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}(\xi_{1,j+1}(t))^2\cos^2\pi t dt. \tag{5.15}$$

Отсюда, с учетом (3.12) находим

$$(\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}\sum\nolimits_{l=1}^{m}((p_j^l)' - (q_j^l)')^2)^{1/2} \leqslant h\pi\kappa_\xi\lambda_0(\sum\nolimits_{j=1}^{\infty}\sum\nolimits_{l=1}^{m}(p_j^l - q_j^l)^2)^{1/2} \tag{5.16}$$

Неравенство (5.16) показывает, что если $h\pi\kappa_\varphi\lambda_0 < 1$, то оператор $A : l_2^m \to l_2^m$ является сжимающим и, как следствие, итерационный процесс $C^{\nu+1} = A(C^\nu)$

сходится к точке $C(q)$ при $\nu \to \infty$. Однако с точки зрения приложений важно рассмотреть конечномерный аналог оператора A. Обозначим через $\mathbb{R}_m^N$ пространство матриц C размерности $m \times N$, в котором определена норма

$$\|C\|_N^m = \left(\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^m (c_j^l)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы рассмотрим оператор $A_N : \mathbb{R}_m^N \to \mathbb{R}_m^N$, сопоставляющий точке $C_N = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}_m^N$ точку $C_N' = (c_1', \dots, c_N') \in \mathbb{R}_m^N$ по правилу

$$c_k' = \pi \int_0^1 F(h \sin \pi t, y^0 + h \sum_{j=1}^N c_j \xi_{1,j+1}(t)) \xi_j(t) \cos \pi t dt,\ k = 1, \dots, N. \quad (5.17)$$

Рассмотрим две точки $P_N, Q_N \in \mathbb{R}_m^N$, где $P_N = (p_1, \dots, p_N)$, $Q_N = (q_1, \dots, p_N)$ и положим $P_N' = A_N(P_N)$, $Q_N' = A_N(Q_N)$. Дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к неравенству (5.16), мы получим

$$\left(\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^m ((p_j^l)' - (q_j^l)')^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant h\pi\kappa_\xi\lambda_0 \left(\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^m (p_j^l - q_j^l)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.18)$$

Неравенство (5.18) показывает, что если $h\pi\kappa_\xi\lambda_0 < 1$, то оператор $A_N : \mathbb{R}_m^N \to \mathbb{R}_m^N$ является сжимающим и, как следствие, итерационный процесс $C_N^{\nu+1} = A_N(C_N^\nu)$ при $\nu \to \infty$ сходится к его неподвижной точке, которую мы обозначим через $\bar{C}_N(q) = (\bar{c}_1(q), \dots, \bar{c}_N(q))$. С другой стороны, рассмотрим точку $C_N(q) = (c_1(q), \dots, c_N(q))$, составленную из искомых коэффициентов Фурье вектор-функции q по системе ξ, определяемой равенствами (2.1). Нам остается оценить погрешность, проистекающую в результате замены точки $C_N(q)$ точкой $\bar{C}_N(q)$. Другими словами, требуется оценить величину $\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m = \left(\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^m (c_j^l(q) - \bar{c}_j^l(q))^2\right)^{\frac{1}{2}}$. С этой целью рассмотрим точку $C_N'(q) = A_N(C_N(q)) = (c_1'(q), \dots, c_N'(q))$ и запишем

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m \leqslant \|C_N(q) - C_N'(q)\|_N^m + \|C_N'(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m. \quad (5.19)$$

Далее, пользуясь неравенством (5.18), имеем

$$\|C_N'(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m = \|A_N(C_N(q)) - A_N(\bar{C}_N(q))\|_N^m \leqslant$$
$$h\pi\kappa_\xi\lambda_0 \|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m. \quad (5.20)$$

Из (5.19) и (5.20) выводим

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m \leqslant \frac{1}{1 - h\pi\kappa_\xi\lambda_0} \|C_N(q) - C_N'(q)\|_N^m. \quad (5.21)$$

Чтобы оценить норму в правой части неравенства (5.21), заметим, что в силу неравенства Бесселя

$$(\|C_N(q) - C_N'(q)\|_N^m)^2 \leqslant \pi^2 \int_0^1 F_{C(q),C_N(q)}(t) (F_{C(q),C_N(q)}(t))^* \cos^2 \pi t dt, \quad (5.22)$$

где

$$F_{C(q),C_N(q)}(t) = F\left[h\sin\pi t, y^0 + h\sum\nolimits_{j=1}^{\infty} c_j(q)\xi_{1,j+1}(t)\right] \\ - F\left[h\sin\pi t, y^0 + h\sum\nolimits_{j=1}^{N} c_j(q)\xi_{1,j+1}(t)\right]. \quad (5.23)$$

Из (5.23) и (5.2) следует, что

$$F_{C(q),C_N(q)}(t)(F_{C(q),C_N(q)}(t))^* \leqslant \lambda_0^2 \sum\nolimits_{l=1}^{m} \left(\sum\nolimits_{j=N+1}^{\infty} hc_j^l(q)\xi_{1,j+1}(t)\right)^2,$$

отсюда с учетом того, что $hc_k(q) = \hat{\phi}_{1,k+1}$ $(k = 1, \ldots)$, имеем

$$F_{C(q),C_N(q)}(t)(F_{C(q),C_N(q)}(t))^* \leqslant \lambda_0^2 \sum\nolimits_{l=1}^{m} \left(\sum\nolimits_{j=N+1}^{\infty} \widehat{\phi}_{l1,j+1}\xi_{1,j+1}(t)\right)^2. \quad (5.24)$$

Сопоставляя (5.24) с (5.22), получаем

$$(\|C_N(q) - C_N'(q)\|_N^m)^2 \leqslant (\pi\lambda_0)^2 \sum_{l=1}^{m} \int_0^1 \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \widehat{\phi}_{l1,j+1}\xi_{1,j+1}(t)\right)^2 \cos^2\pi t dt, \quad (5.25)$$

Подводя итоги, из (5.21) и (5.25) мы можем вывести следующий результат.

Теорема 2. *Пусть область $\bar{G}$ такова, что $[0,h] \times \mathbb{R}^m \subset \bar{G}$, вектор-функция $F(x,y)$ непрерывна в области $\bar{G}$ и удовлетворяет условию Липшица (5.2), а h и λ_0 удовлетворяет неравенству $h\pi\lambda_0\kappa_\xi < 1$, где величина κ_ξ определена равенством (3.12). Далее, пусть l_2^m гильбертово пространство, состоящее из m-мерных последовательностей $C = (c_1, \ldots)$, для которых введена норма $\|C\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}(c_j^l)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, оператор $A : l_2^m \to l_2^m$ сопоставляет точке $C \in l_2^m$ точку $C' \in l_2^m$ по правилу (5.10). Кроме того, пусть $A_N : \mathbb{R}_m^N \to \mathbb{R}_m^N$ – конечномерный аналог оператора A, сопоставляющий точке $C_N = (c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{R}_m^N$ точку $C_N' = (c_1', \ldots, c_N') \in \mathbb{R}_m^N$ по правилу (5.17). Тогда операторы $A : l_2^m \to l_2^m$ и $A_N : \mathbb{R}_m^N \to \mathbb{R}_m^N$ являются сжимающими и, следовательно, существуют их неподвижные точки $C(q) = (c_1(q), \ldots) = A(C(q)) \in l_2^m$ и $\bar{C}_N(q) = (\bar{c}_1(q), \ldots, \bar{c}_N(q)) = A_N(\bar{C}_N(q)) \in \mathbb{R}_m^N$, для которых имеет место неравенство*

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m \leqslant \frac{\pi\lambda_0\sigma_N^\xi(\phi)}{1 - h\pi\kappa_\xi\lambda_0}, \quad (5.26)$$

где $\phi = \phi(t)$ — решение задачи (5.3),

$$\sigma_N^\xi(\phi) = \left(\sum\nolimits_{\nu=1}^{m} \int_0^1 \left(\sum\nolimits_{j=N+2}^{\infty} \widehat{\phi_{\nu 1,j}}\xi_{1,j}(t)\right)^2 \cos^2\pi t dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.27)$$

а $C_N(q) = (c_1(q), \ldots, c_N(q))$ – конечная последовательность, составленная из первых N компонент точки $C(q)$.

6. Аппроксимативные свойства частичных сумм ряда Фурье по системе $\{\xi_{1,n}(x)\}$

Неравенство (5.26) непосредственно приводит к задаче об исследовании поведения величины $\sigma_N^{\xi}(\phi)$, определяемой равенством (5.27), которая, в свою очередь, приводит к вопросу об исследовании поведения при $N \to \infty$ остаточного члена $V_{N+1}(t) = V_{N+1}(\phi, t) = \phi(t) - Y_{1,N+1}(\phi, t) = \sum_{j=N+2}^{\infty} \hat{\phi}_{1,j}\xi_{1,j}(t)$ ряда Фурье (5.4) по функциям $\xi_{1,j}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Мы рассмотрим эту задачу для одной (произвольной) компоненты $\phi_l(t)$ вектор-функции $\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t))$. Как было показано выше, если $\phi_l(t)$ является решением уравнения (4.3), то ряд Фурье (3.8) (одномерный вариант ряда (5.4)) допускает его преобразование к виду (4.4) и, соответственно, имеем

$$Y_{1,N+1}(\phi_l, t) = \sum\nolimits_{k=1}^{N} b_k \sin(\pi k t), \tag{6.1}$$

$$V_{N+1}(\phi_l, t) = \phi_l(t) - Y_{1,N+1}(\phi_l, t) = \sum\nolimits_{k=N}^{\infty} b_k \sin(\pi k t), \tag{6.2}$$

$$b_k == \int_{-1}^{1} \phi_l(\tau) \sin(\pi k \tau) d\tau.$$

Отсюда мы замечаем, что задача об исследовании поведения величины $V_{N+1}(\phi_l, t)$ сводится к изучению остаточного члена тригонометрического ряда Фурье нечетной непрерывно дифференцируемой 2-периодической функции $\phi(t)$. Обозначим через $E_n(\phi_l)_2$ наилучшее приближение функции ϕ_l в $L^2(-1,1)$ тригонометрическими полиномами вида $T_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sin(\pi k x)$. Поскольку $Y_{1,N+1}(\phi_l, x)$ является полиномом наилучшего приближения к функции ϕ_l в $L^2(-1,1)$, то из (5.27) и (6.2), с учетом того, что функция ϕ_l нечетная, имеем

$$\|V_{N+1}(\phi_l)\|_{L^2(0,1)} = \frac{1}{2} E_N(\phi_l)_2. \tag{6.3}$$

Вернемся к вектор-функции $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ и положим

$$\|V_{N+1}(\phi)\|_{L^2(0,1)} = \left(\sum\nolimits_{l=1}^{m} \int_0^1 \left(\sum\nolimits_{j=N+2}^{\infty} \widehat{\phi}_{l1,j} \xi_{1,j}(t) \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.4}$$

$$E_N(\phi)_2 = \left(\sum\nolimits_{l=1}^{m} E_N^2(\phi_l)_2 \right)^{1/2}. \tag{6.5}$$

Из (6.3) – (6.5) имеем

$$\|V_{N+1}(\phi)\|_{L^2(0,1)} = \frac{1}{2} E_N(\phi)_2. \tag{6.6}$$

С другой стороны, из (5.27) и (6.4) следует, что

$$\sigma_N^{\xi}(\phi) = \left(\sum_{\nu=1}^{m} \int_0^1 \left(\sum_{j=N+2}^{\infty} \widehat{\phi_{\nu}}_{1,j} \xi_{1,j}(t) \right)^2 \cos^2 \pi t dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|V_{N+1}(\phi)\|_{L^2(0,1)} \tag{6.7}$$

Из теоремы 2, леммы 3.2 и равенства (6.6) и неравенства (6.7) непосредственно вытекает

Следствие 1. *При соблюдении условий теоремы 1 имеет место неравенство*

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N \leqslant \frac{\pi\lambda_0 E_N(\phi)_2}{2 - (1/6 - 1/\pi^2)h\pi\lambda_0}. \tag{6.8}$$

Теорема 2, в которой получена оценка скорости сходимости частичных сумм ряда Фурье по функциям $\xi_{1,k}(t)$ к функции ϕ в метрике пространства $L^2(0,1)$, дает, как это показано в следствие 1, один из возможных подходов к оценке погрешности, которая проистекает в результате замены искомой матрицы $C_N(q)$, составленной из неизвестных коэффициентов разложения решения задачи Коши (5.3), приближенной матрицей $\bar{C}_N(q)$, являющейся неподвижной точкой конечномерного оператора A_N, сконструированного по правилу (5.17). Но, после того, как матрица $C_N(q)$ будет найдена с требуемой точностью, немедленно возникнет вопрос о том, какова максимальная по $t \in [0,1]$ погрешность замены точного решения задачи Коши (5.3) теми или иными линейными средними частичных сумм его разложения по функциям $\xi_{1,k}(x)$, которые могут быть сконструированы посредством найденных коэффициентов, составляющих матрицу $C_N(q)$. Как показывают равенства (6.1) и (6.2), эта задача сводится к глубоко исследованной задаче о равномерном приближении дифференцируемых периодических функций тригонометрическими суммами Фурье и их линейными средними и нам нет особой необходимости ее рассматривать.

Список литературы

[1] Шарапудинов И.И. О приближении решения задачи Коши для нелинейных систем ОДУ посредством рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. С. 66–76.

[2] Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. Численный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной системой косинусов // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 8. С. 53–60.

[3] Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов. ООО «Издательство «Научная книга». 2016. С. 329–332.

[4] Магомед-Касумов М.Г. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов. ООО «Издательство «Научная книга». 2016. С. 176–178.

[5] Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, вып. 1. С. 225–258.

[6] Marcellan F. and Yuan Xu On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015. Vol. 33. Issue 3. Pp. 308–352.

[7] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Математический сборник. 2003. Т. 194, вып. 3. С. 115–148.

[8] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала. Издательство Дагестанского научного центра. 2004. 176 стр.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН
Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию
07.06.2018