УДК 519.622

М. Г. Магомед-Касумов, С. Р. Магомедов

Быстрое вычисление линейных комбинаций соболевских функций, порожденных функциями Хаара

Рассмотрены некоторые свойства ортогональных по Соболеву функций $\chi_{1,n}(x)$, порожденных функциями Хаара. В частности, получены рекуррентные формулы для функций $\chi_{1,n}(x)$. Разработан алгоритм вычисления линейных комбинаций N функций $\chi_{1,n}(x)$ за $O(\log N)$ операций.

Библиография: 14 названий

Some properties of orthogonal with respect to Sobolev inner product functions $\chi_{1,n}(x)$, generated by Haar functions, are considered. In particular, recurrent formulas for $\chi_{1,n}(x)$ are obtained. It is developed an algorithm for calculation of the linear combinations of N functions $\chi_{1,n}(x)$ using $O(\log N)$ operations.

Bibliography: 14 items

Ключевые слова: система Хаара, численный метод, ортогональность в смысле Соболева, быстрый алгоритм

Keywords: Haar system, numerical method, Sobolev type inner product, fast algorithm

Введение

В данной статье рассмотрен быстрый алгоритм вычисления линейных комбинаций функций $\chi_{1,n}(x)$, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx \tag{0.1}$$

и порожденных системой Хаара. Напомним, что система Хаара состоит из ортогональных на отрезке $[0,1]$ кусочно постоянных функций $\chi_n(x)$, определяемых следующим образом [1; глава 3, с. 70]:

$$\chi_1(x) = 1, \quad \chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \bar{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, & \text{если } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & \text{если } x \in \Delta_n^-, \end{cases} \tag{0.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00486а)

где $n = 2^k + i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, $\Delta_n = \Delta_k^i = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$ — двоичный интервал, а $\bar{\Delta}_n$ — замыкание двоичного интервала Δ_n.

В работах Шарапудинова И. И. (см., например, [2–8]) разработаны теория и методы построения систем функций $\Phi_r = \{\varphi_{r,n}\}_{n=0}^{\infty}$, $r \geqslant 1$, ортонормированных относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\mu(x)dx, \tag{0.3}$$

частным случаем которого является (0.1). Для построения системы Φ_r выбирается одна из классических систем $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, ортонормированных относительно обычного скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mu(t)dt, \tag{0.4}$$

и на её основе строятся функции $\varphi_{r,n}(x)$ посредством равенств

$$\varphi_{r,n}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{0.5}$$

$$\varphi_{r,n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1}\varphi_{n-r}(t)dt, \quad n = r, r+1, \ldots. \tag{0.6}$$

Система функций $\Phi_r = \{\varphi_{r,n}\}_{n=0}^{\infty}$, определённая формулами (0.5), (0.6), как было показано в упомянутых выше работах, будет ортонормирована относительно скалярного произведения (0.3). Ряд Фурье функции $y(x)$ по системе функций Φ_r имеет следующий вид:

$$y(x) \sim \sum_{n=0}^{r-1} y^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \sum_{n=r}^{\infty} c_{r,n}(y)\varphi_{r,n}(x), \tag{0.7}$$

где

$$c_{r,n}(y) = \int_{-1}^{1} y^{(r)}(t)\varphi_{n-r}(t)\mu(t)dt. \tag{0.8}$$

Ряды Фурье по функциям, ортогональным в смысле Соболева, могут быть эффективно использованы при решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, в [9–12] предложен основанный на применении рядов Фурье по системам $\Phi_1 = \{\varphi_{1,n}\}$ итерационный метод решения задачи Коши для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Метод основан на представлении неизвестного решения $y(x)$ рассматриваемой задачи Коши в виде равномерно сходящегося ряда Фурье по системе вида Φ_1:

$$y(x) = y(a) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n}(y)\varphi_{1,n}(x),$$

и поиске посредством некоторых итерационных процедур первых N неизвестных коэффициентов $c_{1,n}(y)$, $k = 1, \ldots, N$. В качестве приближенного решения берется частичная сумма указанного ряда:

$$y(x) \approx y(a) + \sum_{n=0}^{N-1} c_{1,n+1}(y)\varphi_{1,n+1}(x). \tag{0.9}$$

Упомянутый выше итерационный метод устроен так, что при его выполнении приходится неоднократно вычислять в узлах некоторой сетки линейные комбинации вида

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \varphi_{1,n+1}(x), \tag{0.10}$$

где α_n — известные вещественные числа. В настоящей статье предложен быстрый алгоритм вычисления линейных комбинаций (0.10) для соболевских функций $\varphi_{1,n}(x) = \chi_{1,n}(x)$, порожденных функциями Хаара (0.2) по формулам (0.5), (0.6), в которых $\varphi_n(x) = \chi_{n+1}(x)$, $n \geqslant 0$.

1. Некоторые свойства функций $\chi_{1,n}$

В статье [14] получен явный вид функций $\chi_{1,n}(x)$, $n = 2^k + i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, $k \geqslant 0$:

$$\chi_{1,1}(x) = x, \quad \chi_{1,n}(x) = 2^{\frac{k}{2}} \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{i-1}{2^k}; \\ x - \frac{i-1}{2^k}, & \frac{i-1}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{2i-1}{2^{k+1}}; \\ \frac{i}{2^k} - x, & \frac{2i-1}{2^{k+1}} \leqslant x \leqslant \frac{i}{2^k}; \\ 0, & \frac{i}{2^k} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

При фиксированном $k \geqslant 0$ совокупность функций $\chi_{1,n}$ с номерами $n = 2^k + i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, называется k-й пачкой ($\chi_{1,1}$ не попадает ни в какую пачку). Чтобы подчеркнуть принадлежность функции $\chi_{1,n}$ к той или иной пачке, мы будем использовать обозначение $\chi_{1,k,i}(x) = \chi_{1,n}(x)$, $n = 2^k + i$.

Заметим, что для заданной точки $x \in [0,1]$ в k-й пачке найдется не более одной функции, отличной от нуля в точке x. Именно этот факт позволит нам значительно ускорить процесс вычисления линейных комбинаций вида (0.10). Более того, если x является двоично-рациональной, то, начиная с некоторой пачки, все функции $\chi_{1,n}$ будут равны нулю в точке x. Остановимся более подробно на этом вопросе.

Ниже мы будем считать функции $\chi_{1,n}(x)$, $n \geqslant 2$, продолженными по непрерывности на всю ось, т. е. мы полагаем $\chi_{1,n}(x) = 0$, $x \notin [0,1]$, $n \geqslant 2$. В дальнейшем особую роль будет играть функция $\chi_{1,2}(x)$, поэтому мы выпишем тут ее явную формулу для наглядности:

$$\chi_{1,2}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Утверждение 1.1. *Для функций $\chi_{1,n}(x)$ имеют место следующие соотношения:*

$$\chi_{1,k+m,i}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \chi_{1,k,i}(2^m x), \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^k,\ k \geqslant 0,\ m \geqslant 0; \tag{1.3}$$

$$\chi_{1,k,i}(x) = \chi_{1,k,1}\big(x - \frac{i-1}{2^k}\big), \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^k,\ k \geqslant 0; \tag{1.4}$$

$$\chi_{1,k,i}(x) = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^k x - i + 1), \quad 1 \leqslant i \leqslant 2^k,\ k \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Доказательство. Первые две формулы получаются непосредственно из определения (1.1), а последняя формула легко выводится с помощью первых двух:

$$\chi_{1,k,i}(x) = \chi_{1,k,1}(x - \frac{i-1}{2^k}) = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,0,1}(2^k x - i + 1).$$

Утверждение 1.2. *Для любой двоично-рациональной точки x все функции последовательности $\chi_{1,n}$, начиная с некоторого номера, будут равны нулю в этой точке. Более точно, если $x = \frac{j}{2^m}$, $0 \leqslant j \leqslant 2^m$, то*

$$\chi_{1,k,i}(x) = 0, \quad k \geqslant m,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^k.$$

Доказательство. Из соотношения (1.5) вытекает, что

$$\chi_{1,k,i}(\frac{j}{2^m}) = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^{k-m} j - i + 1),$$

причем аргумент $2^{k-m} j - i + 1$ при условиях утверждения всегда является целым числом. Остается заметить, что, как это видно из (1.2), функция $\chi_{1,2}$ обращается в ноль в любой целочисленной точке.

Утверждение 1.3. *В каждой пачке для любой фиксированной точки $x \in [0,1]$ отличной от нуля в этой точке может быть лишь функция с номером $\nu(k,x) = [2^k x] + 1$, где k — номер пачки, а $[t]$ — целая часть t, т. е.*

$$\chi_{1,k,i}(x) = 0, \quad i \neq \nu(k,x),\ k \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Кроме того,

$$\chi_{1,k,\nu(k,x)}(x) = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^k x - [2^k x]). \tag{1.7}$$

Доказательство. Поскольку функция $\chi_{1,2}(x)$ отлична от нуля только при $0 < x < 1$, то из формулы (1.5) следует, что при заданных k и x неравенство $\chi_{1,k,i}(x) \neq 0$ имеет место только для тех i, которые удовлетворяют условию $0 < 2^k x - i + 1 < 1$. Следовательно, для i имеем $2^k x < i < 2^k x + 1$. Так как i — целое, то последнее соотношение может быть выполнено только при $i = [2^k x] + 1$. Отсюда следует справедливость соотношения (1.6). Оставшаяся часть утверждения получается непосредственной подстановкой выражения для $\nu(k,x)$ в формулу (1.5).

2. Математические основы алгоритма быстрого вычисления линейных комбинаций функций $\chi_{1,n}$

Пусть для заданных $x \in [0,1]$ и α_n, $0 \leqslant n \leqslant N-1$, требуется вычислить линейную комбинацию

$$S_{1,N}(x) = S_{1,N}(x;\{\alpha_n\}) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \chi_{1,n+1}(x). \tag{2.1}$$

Нетрудно подсчитать, что для вычисления $S_{1,N}(x)$ по данной формуле понадобится $O(N)$ операций.

Для оптимизации процесса вычисления линейной комбинации $S_{1,N}(x)$, $N = 2^K + I$, $1 \leqslant I \leqslant 2^K$, представим ее в следующем виде:

$$S_{1,N}(x) = \alpha_0\chi_{1,1}(x) + \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \alpha_{n-1}\chi_{1,n}(x) + \sum_{n=2^K+1}^{N} \alpha_{n-1}\chi_{1,n}(x).$$

Отсюда, используя утверждение 1.3, выводим:

$$S_{1,N}(x) = \alpha_0 x + \sum_{k=0}^{\tilde{K}} \alpha_{2^k+\nu(k,x)-1} 2^{-\frac{k}{2}} \chi_{1,2}(2^k x - [2^k x]), \tilde{K} = \begin{cases} K, & \nu(K,x) \leqslant I, \\ K-1, & \nu(K,x) > I. \end{cases} \tag{2.2}$$

Для вычисления $S_{1,N}(x)$ по этой формуле требуется $O(K) = O(\log N)$ операций, что на порядок быстрее, чем при использовании формулы (2.1).

3. Компьютерная реализация

В данном пункте приводится описание численного алгоритма вычисления линейной комбинации $S_{1,N}(x)$, основанного на использовании формулы (2.2) и реализованного в методе `FastCalc` класса `SobolevHaarLinearCombination` (см. листинг 1).

На вход метод `FastCalc` принимает массив коэффициентов `alpha` длины N и точку $x \in [0,1]$. Основные вычисления производятся в цикле по k, который соответствует сумме в формуле (2.2). На каждой итерации требуется вычислять величины $2^{-k/2}$, $2^k x$, $\nu(k,x) = [2^k x] + 1$ и $n = 2^k + \nu(k,x)$. В целях оптимизации вычисления указанных величин вводятся дополнительные переменные `pow2k`, `pow2kx`, `pow2k2`, которые на k-й итерации содержат значения 2^k, $2^k x$, $2^{-k/2}$ соответственно. Эти переменные инициализируются значениями `1`, `x`, `1` и на каждой итерации обновляются согласно формулам: $2^{k+1} = 2^k * 2$, $2^{k+1}x = 2^k x * 2$, и $2^{-\frac{k+1}{2}} = \frac{2^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{2}}$. Затем введенные переменные используются для вычисления очередного k-го члена суммы из формулы (2.2).

Заметим, что выполнение цикла досрочно завершается на k-ой итерации, если число x является двоично-рациональным вида $\frac{j}{2^k}$, $j = 0, 1, \ldots, 2^k$, поскольку согласно утверждению 1.2 функции $\chi_{1,l,i}(\frac{j}{2^k}) = 0$ для всех $l \geqslant k$ и $1 \leqslant i \leqslant 2^l$. В коде условие досрочного прерывания цикла имеет вид `pow2kx+1==nu`, где `nu=(int)pow2kx+1`, так как выполнение этого условия означает равенство $2^k x = [2^k x]$, откуда и следует, что x двоично-рациональное число вида $\frac{j}{2^k}$.

```
class SobolevHaarLinearCombination
{
    private static double sqrt2 = Math.Sqrt(2);

    //метод для вычисления линейной комбинации S_{1,N}(x)
    public static double FastCalc(double[] alpha, double x)
    {
        int N = alpha.Length;
        // инициализируем значения для нулевой пачки
        int pow2k = 1; //2^k
        double pow2kx = x; //2^k x
        double pow2k2 = 1; //2^{-k/2}
        int nu = (int)x + 1; //ν(k,x) = [2^k x] + 1

        //n = 2^k + ν(k,x), 1 ⩽ ν(k,x) ⩽ 2^k,
        //указывает на номер ненулевой функции в каждой пачке
        int n = 1 + nu;

        double result = alpha[0] * x;

        //вместо нахождения K̃ мы просто продолжаем цикл,
        //пока n = 2^k + ν(k,x) не превосходит N
        for (int k = 0; n <= N; k++)
        {
            //проверка, является ли x двоично-рациональным
            //числом вида x = j/2^k, j = 1,...,2^k
            if (pow2kx + 1 == nu)
                break;

            //нахождение дробной части 2^k x
            double xd = pow2kx - (int)pow2kx;
            //вычисление k-го элемента суммы
            result += alpha[n - 1]
                * pow2k2
                * (xd <= 0.5 ? xd : 1 - xd);

            //обновление значений переменных
            //для следующей k+1-й пачки
            pow2k *= 2;
            pow2kx *= 2;
            pow2k2 /= sqrt2;
            nu = (int)pow2kx + 1;
            n = pow2k + nu;
        }

        return result;
    }
}
```

Листинг 1: Класс *SobolevHaarLinearCombination*

4. Численный эксперимент

Проведем сравнительный анализ скорости вычисления суммы $S_{1,N}(x)$ методом `FastCalc` и методом `Calc`, вычисляющим линейную комбинацию по формуле (2.1). Методика сравнения состоит в следующем. Для заданного N проводится E экспериментов. В каждом i-м эксперименте переменной `x` и массиву `alpha` задаются случайные значения, для которых производится вычисление $S_{1,N}(x)$ указанными методами K раз с фиксацией времени выполнения $t_{i,Calc}$, $t_{i,FastCalc}$ всех K итераций для каждого метода и получением среднего значения времени выполнения $\delta_{i,Calc} = \frac{t_{i,Calc}}{K}$ и $\delta_{i,FastCalc} = \frac{t_{i,FastCalc}}{K}$ в рамках i-го эксперимента. Полученные во всех экспериментах значения усредняются: $\Delta_{Calc} = \frac{\sum_{i=1}^{E} \delta_{i,Calc}}{E}$, $\Delta_{FastCalc} = \frac{\sum_{i=1}^{E} \delta_{i,FastCalc}}{E}$. Результаты экспериментов для $E = 100$ и $K = 100$ приведены в таблице 1.

N	Δ_{Calc}, с.	$\Delta_{FastCalc}$, с.
10	$3,505 * 10^{-6}$	$9,876 * 10^{-8}$
100	$3,4557 * 10^{-5}$	$1,2082 * 10^{-7}$
1000	$3,2373 * 10^{-4}$	$1,7115 * 10^{-7}$
10000	$3,4374 * 10^{-3}$	$2,1418 * 10^{-7}$
100000	$3,5052 * 10^{-2}$	$2,6795 * 10^{-7}$

Таблица 1. Сравнение скорости работы Δ_{Calc} и $\Delta_{FastCalc}$ при разных значениях N, где $E = 100, K = 100$

Заметим, что если x является двоично-рациональным числом вида $\frac{j}{2^m}$, то, начиная с $N = 2^m$, время выполнения метода `FastCalc` перестает расти вместе с N, что продемонстрировано в таблице 2, в которой приведены результаты, полученные с помощью описанной выше методики, но при $E = 1$ и некотором фиксированном x, заданным вручную.

N	$\Delta_{FastCalc}$ в точке $x = \frac{1}{2^{10}}$, с.
10	$7,4221 * 10^{-8}$
100	$1,1189 * 10^{-7}$
1000	$1,4978 * 10^{-7}$
10000	$1,5148 * 10^{-7}$
100000	$1,5155 * 10^{-7}$
1000000	$1,503 * 10^{-7}$

Таблица 2. Время выполнения метода FastCalc при $x = \frac{1}{2^{10}}, K = 10^7$

Приведенные выше компьютерные эксперименты выполнены на персональном компьютере с CPU Intel Core i5 6200U, 2.8ГГц, вычисления производились в однопоточном режиме.

Список литературы

[1] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ. 1999. С. 560.

[2] Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, вып. 1. С. 225–258.

[3] Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. 2017. №8. С. 67–79.

[4] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Матем. заметки. 2017. Т. 101, вып. 4. С. 611–629. (Math. Notes. 2017. Vol. 101. Issue 4. Pp. 718–734.)

[5] Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д.,Гаджимирзаев Р.М. Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 31–60.

[6] Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 310–321.

[7] Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4. С. 31–73.

[8] Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г., Магомедов С.Р. Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4. С. 1–14.

[9] Шарапудинов И. И. О приближении решения задачи Коши для нелинейных систем ОДУ посредством рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. С. 66–76.

[10] Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. Численный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной системой косинусов // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 8, С. 53–60.

[11] Султанахмедов М.С., Шарапудинов Т.И. Приближенное решение задачи Коши для систем ОДУ с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские Электронные Математические Известия. 2017. Вып. 8. С. 100–109.

[12] Шарапудинов И.И., Магомедов С.Р. Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с функциями Хаара, и задача Коши для ОДУ // Дагестанские Электронные Математические Известия. 2017. Вып. 7. С. 1–15.

[13] Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Разностные уравнения и полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Владикавк. матем. журн. 2017. Т. 19, вып. 2. С. 58–72.

[14] Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, №1. С. 68–76.

М. Г. Магомед-Касумов (M. G. Magomed-Kasumov)
Владикавказский научный центр РАН,
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: rasuldev@gmail.com

Поступила в редакцию
19.04.2018

С. Р. Магомедов (S. R. Magomedov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: salihne@ya.ru