УДК 517.5

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

Выпуклая интерполяция рациональными сплайн-функциями класса C^2

Получены достаточные условия выпуклости (вверх или вниз) интерполяционных рациональных сплайн-функций класса C^2 в случае произвольных сеток узлов.

Библиография: 9 названий.

Sufficient conditions are established for the convexity of interpolation rational spline-functions of the class C^2.

Bibliography: 9 items.

Ключевые слова: выпуклая интерполяция, интерполяционные сплайны, рациональные сплайн-функции.

Keywords: convex interpolation, interpolation splines, rational spline-functions.

Вопросы выпуклой интерполяции полиномиальными сплайнами в достаточно полной форме исследованы в ряде работ различными авторами (см., напр., [1]–[4] и цитированные в них источники). Подобные вопросы рассматривались также для рациональных сплайнов специальных видов, например, в работах [5]–[8].

Ниже вопрос выпуклой (вниз или вверх) интерполяции выпуклых (вниз или вверх, соответственно) дискретных данных рассматривается для дважды непрерывно дифференцируемых сплайн–функций, построенных с помощью трехточечных рациональных интерполянтов.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка узлов $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, в которых определена дискретная функция $f(x)$. При $i = 1, 2, \ldots, N-1$ коэффициенты рациональной функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i},$$

с произвольным полюсом $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ определим из интерполяционных условий $R_i(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1, i, i+1)$.

Тогда с использованием разделенных разностей первого порядка $f(x_{i-1}, x_i)$ и второго порядка $\delta_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ при $i = 1, 2, \ldots, N-1$ получим

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= f(x_i) - \delta_i(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i),\\
\beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + \delta_i(x_i - g_i),\\
\gamma_i &= \delta_i(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).
\end{aligned}$$

© А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова, 2018

Будем считать, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ (допускаются и другие варианты крайних интерполянтов $R_0(x)$ и $R_N(x)$).

Для краткости при $i = 1, 2, \ldots, N$ обозначим

$$A_i(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x_i - x)^2)}, \quad B_i(x) = 1 - A_i(x)$$

и на отрезке $[a, b]$ определим ([9]) рациональную сплайн–функцию $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ класса $C^2[a, b]$, полагая

$$R_{N,2}(x) = R_i(x)A_i(x) + R_{i-1}(x)B_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Всюду ниже придерживаемся также обозначений: $q_i = \delta_{i-1}/\delta_i$ ($i = 2, 3, \ldots, N-1$); $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, N$); $\rho_\Delta = \max\{\, h_i h_j^{-1} \,\big|\, |i-j| = 1; i, j = 1, 2, \ldots, N\}$; $\gamma = (2\sqrt{2} + 1)/(2\sqrt{2} + 5)$.

Следующее утверждение дает условия выпуклой интерполяции дискретных данных рациональными сплайн-функциями $R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ класса $C^2[a, b]$.

Теорема 1. *Пусть для дискретных данных* $f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ *на сетке узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$ *выполнены неравенства* $\delta_i > 0$ *(соответственно,* $\delta_i < 0$*) при* $i = 1, 2, \ldots, N-1$ *и* $\gamma < q_i < 1/\gamma$ *при* $i = 2, 3, \ldots, N-1$.

Тогда существуют полюсы $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$, *для которых рациональная сплайн–функция* $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ *выпукла вниз (соответственно, вверх) на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство. Заметим, что $R_{N,2}(x) = R_1(x)$ при $x \in [x_0, x_1]$ и $R_{N,2}(x) = R_{N-1}(x)$ при $x \in [x_{N-1}, x_N]$. Поэтому для двух крайних отрезков $[x_0, x_1]$ и $[x_{N-1}, x_N]$ выпуклость (вверх или вниз) $R_{N,2}(x)$ вытекает при $i = 1$ и $i = N - 1$ из равенства

$$R_i''(x) = 2\gamma_i \frac{1}{(x - g_i)^3} = 2\delta_i \frac{(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i)}{(x - g_i)^3}.$$

Пусть теперь $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \ldots, N-1$, и рассмотрим сначала случай неравенств $\delta_i > 0$, $\delta_{i-1} > 0$ и $\delta_{i-1} - \delta_i \geqslant 0$. В этом случае представим вторую производную рациональной сплайн-функции $R_{N,2}(x)$ в виде

$$R_{N,2}''(x) = 2\delta_i[P(x) + \varphi(x, g_i)] + 2\delta_{i-1}[Q(x) + \psi(x, g_{i-1})], \tag{1}$$

где для краткости обозначены

$$P(x) = \frac{1}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i)A_i''(x) + (2x - x_{i-1} - x_i)A_i'(x) + A_i(x),$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i)B_i''(x) + (2x - x_{i-1} - x_i)B_i'(x) + B_i(x),$$

$$\varphi(x, g_i) = \frac{1}{x - g_i}\Big[-\frac{1}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})A_i''(x) -$$

$$-((x - x_{i-1})(x - x_i) + (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) + (x - x_i)(x - x_{i+1}))A_i'(x) -$$

$$-(3x - x_{i-1} - x_i - x_{i+1})A_i(x)\Big] +$$

$$+\frac{1}{(x-g_i)^2}\Big[(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})A_i'(x) +$$

$$+((x - x_{i-1})(x - x_i) + (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) + (x - x_i)(x - x_{i+1}))A_i(x)\Big] -$$

$$-\frac{1}{(x-g_i)^3}(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})A_i(x),$$

$$\psi(x, g_{i-1}) = \frac{1}{x - g_{i-1}}\Big[-\frac{1}{2}(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})(x - x_i)B_i''(x) -$$

$$-((x - x_{i-2})(x - x_{i-1}) + (x - x_{i-2})(x - x_i) + (x - x_{i-1})(x - x_i))B_i'(x) -$$

$$-(3x - x_{i-2} - x_{i-1} - x_i)B_i(x)\Big] +$$

$$+\frac{1}{(x-g_{i-1})^2}\Big[(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})(x - x_i)B_i'(x) +$$

$$+((x - x_{i-2})(x - x_{i-1}) + (x - x_{i-2})(x - x_i) + (x - x_{i-1})(x - x_i))B_i(x)\Big] -$$

$$-\frac{1}{(x-g_{i-1})^3}(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})(x - x_i)B_i(x).$$

У нас $A_i(x) + B_i(x) \equiv 1$, $A_i'(x) \equiv -B_i'(x)$, $A_i''(x) \equiv -B_i''(x)$. Поэтому $P(x) = 1 - Q(x)$ и из равенства (1) при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$R_{N,2}''(x) = 2\delta_i + 2(\delta_{i-1} - \delta_i)Q(x) + 2\delta_i\varphi(x, g_i) + 2\delta_{i-1}\psi(x, g_{i-1}). \tag{2}$$

Тогда с использованием выражений для $B_i(x)$, $B_i'(x)$ и $B_i''(x)$ получим

$$Q(x) = (x_i - x_{i-1})(x - x_{i-1})(x - x_i)(2x - x_{i-1} - x_i) *$$

$$*\frac{(x_i - x_{i-1}^2 - 2(x - x_{i-1})(x - x_i)}{[(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2]^3} +$$

$$+(2x - x_{i-1} - x_i)\frac{2(x_i - x_{i-1})(x - x_{i-1})(x - x_i)}{[(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2]^2} + \frac{(x - x_i)^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2} =$$

$$= 2\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} - x\right)\frac{(x_i - x_{i-1})(x - x_{i-1})(x_i - x)}{[(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2]^2} *$$

$$*\left[1 + \frac{2(x_i - x_{i-1})^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2}\right] + \frac{(x - x_i)^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2}.$$

Заметим, что $Q(x) > 0$ при $x \in [x_{i-1}, (x_{i-1} + x_i)/2]$, и найдем значение

$$Q_{\min} = \min\left\{Q(x) \middle|\ x \in \left[\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, x_i\right]\right\}.$$

Для этого обозначим $y = \frac{x_i - x}{x - x_{i-1}}$, $V(y) = Q\left(\frac{yx_{i-1}+x_i}{y+1}\right)$ $(y \in [0,1])$. Тогда $Q_{\min} = \min\{V(y)|\ y \in [o,1]\}$. При этом имеем

$$V(y) = \frac{y(y^2-1)}{(1+y^2)^2}\left(1 + 2\frac{1+y^2+2y}{1+y^2}\right) + 1 - \frac{1}{1+y^2} =$$

$$= y(y^2-1)\frac{1}{(1+y^2)^2}\left(3 + \frac{4y}{1+y^2}\right) + 1 - \frac{1}{1+y^2}.$$

Отсюда, обозначив $y = \operatorname{tg} u$ при $u \in [0, \frac{\pi}{4}]$, получим

$$V_1(u) = V(\operatorname{tg} u) = \operatorname{tg} u \left(\frac{1}{\cos^2 u} - 2\right)\cos^4 u(3 + 4\operatorname{tg} u \cos^2 u) + 1 - \cos^2 u =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u(2\sin^2 2u + 3\sin 2u + 1).$$

Значит,

$$V_1'(u) = 3(\sin 2u + 1)(2\sin^2 2u - 1).$$

У нас $u \in [0, \frac{\pi}{4}]$, поэтому функция $V_1(u)$ принимает свое минимальное значение в точке $u = \frac{\pi}{8}$ и $V_1(\frac{\pi}{8}) = -\frac{2\sqrt{2}+1}{4}$.

Раз $Q_{\min} = -\frac{2\sqrt{2}+1}{4}$ и $Q(x) > 0$ при $x \in [x_{i-1}, \frac{x_{i-1}+x_i}{2}]$, получим

$$\min\{Q(x)|\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = -\frac{2\sqrt{2}+1}{4}.$$

У нас $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда $|A_i(x)| \leqslant 1$, $|B_i(x) \leqslant 1$,

$$|A_i'(x)| = |B_i'(x)| \leqslant \frac{2}{x_i - x_{i-1}} = \frac{2}{h_i}, \quad |A_i''(x)| = |B_i''(x)| \leqslant \frac{24}{h_i^2}.$$

Полюсы $g_i \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]$ можно выбрать по-разному. Для сокращения вычислений возьмем $g_1 = g_2 = \dots = g_{N-1}$ и, как увидим ниже, достаточно считать, что их общее значение

$$g_1 = b + \frac{2M}{2\sqrt{2}+5}\max\left\{\frac{1}{\frac{1}{q_i} - \gamma}, \frac{1}{q_i - \gamma}\,\middle|\, i = 2,3,\dots,N-1\right\};$$

здесь и ниже обозначено

$$M = M(a,b,\rho_\Delta) = (b-a)(2\rho_\Delta + 20(1+b-a) + (b-a)^2).$$

Действительно, тогда при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 2,3,\dots,N-1)$ получим

$$|\varphi(x,g_i)| \leqslant \frac{1}{g_1 - b}\Bigg[3(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1}) +$$

$$+\left(\frac{1}{4}(x_i - x_{i-1})^2 + \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})\right)\frac{2}{x_i - x_{i-1}} +$$

$$+\max\big\{|2x_{i-1} - x_i - x_{i+1}|, |2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}|\big\}\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{(g_1-b)^2}\left[\frac{1}{2}(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{4}(x_i-x_{i-1})^2+\frac{1}{4}(x_{i+1}-x_{i-1})^2+(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})\right)\cdot 1\right]+$$

$$+\frac{1}{(g_1-b)^3}\cdot\frac{1}{4}(x_i-x_{i-1})^2(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot 1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{g_1-b}\left[\frac{1}{2}(b-a)\frac{h_{i+1}}{h_i}+5(b-a)+5(b-a)^2+\frac{1}{4}(b-a)^3\right];$$

вполне аналогично имеем

$$|\psi(x,g_{i-1})|\leqslant\frac{1}{g_1-b}\left[\frac{1}{2}(b-a)\frac{h_{i-1}}{h_i}+5(b-a)+5(b-a)^2+\frac{1}{4}(b-a)^3\right].$$

Значит, из этих оценок для $\varphi(x,g_i)$, $\psi(x,g_{i-1})$ и условия $\delta_{i-1}-\delta_i\geqslant 0$ при $x\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=2,3,\ldots,N-1)$ получим

$$|2\delta_i\varphi(x,g_i)+2\delta_{i-1}\psi(x,g_{i-1})|\leqslant\delta_{i-1}\frac{M}{g_1-b},$$

где, как и выше, $M=M(a,b,\rho_\Delta)$.

Тогда отсюда и из равенства (2) следует, что при всех $x\in[x_{i-1},x_i]$ будет выполняться неравенство $R''_{N,2}(x)>0$, если будет выполняться неравенство

$$2\delta_i+2(\delta_{i-1}-\delta_i)Q_{\min}-\frac{M\delta_{i-1}}{g_1-b}\geqslant 0,$$

которое по выбору M и g_1 эквивалентно неравенству

$$max\left\{\frac{1}{\frac{1}{q_i}-\gamma},\frac{1}{q_i-\gamma}\right\}\geqslant\frac{1}{\frac{1}{q_i}-\gamma}.$$

Рассмотрим теперь другой возможный случай для $\delta_i>0$ и $\delta_{i-1}>0$, когда $\delta_i-\delta_{i-1}\geqslant 0$ $(x\in[x_{i-1},x_i];\ i=2,3,\ldots,N-1)$.

В этом случае равенство (1) запишем в виде

$$R''_{N,2}(x)=2(\delta_i-\delta_{i-1})P(x)+2\delta_{i-1}+2\delta_i\varphi(x,g_i)+2\delta_{i-1}\psi(x,g_{i-1}).\qquad(3)$$

Тогда по аналогии с предыдущим случаем при всех $x\in[x_{i-1},x_i]$ будет выполняться неравенство $R''_{N,2}(x)>0$, если будет выполняться неравенство

$$2(\delta_i-\delta_{i-1})P_{\min}+2\delta_{i-1}-\frac{M\delta_i}{g_1-b}\geqslant 0,\qquad(4)$$

в котором обозначено

$$P_{\min}=\min\left\{P(x)\middle|\ x\in\left[x_{i-1},\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right]\right\}.$$

При этом имеем

$$P_{\min}=Q_{\min}=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}.$$

Поэтому по выбору параметров M и g_1 неравенство (4) эквивалентно неравенству

$$max\left\{\frac{1}{\frac{1}{q_i}-\gamma}, \frac{1}{q_i-\gamma}\right\} \geqslant \frac{1}{q_i-\gamma}.$$

Наконец, случай отрицательных разделенных разностей второго порядка $\delta_i < 0$ и $\delta_{i-1} < 0$ сводится к уже рассмотренному случаю положительных δ_i и δ_{i-1}, если взять дискретные данные с противоположными знаками $(-f(x_i)$ вместо $f(x_i)$ при $i = 0, 1, \ldots, N)$,так как неравенства $R''_{N,2}(x, f, \Delta, g) < 0$ и $R''_{N,2}(x, -f, \Delta, g) > 0$ $(x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \ldots, N-1)$ эквивалентны между собой.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Schweikert D.G. An interpolation curve using a splane in tension // J. Math. Phys. 1966. Vol. 45. Pp. 312–317.

[2] Miroshnichenko V.L. Convex and monotone spline interpolation // Constuctive Theory of Function: Proc. Int. Conf. (Varna, 1984). Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci. 1984. Pp. 610–620.

[3] Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит. 2006. 360 с.

[4] Волков Ю.С., Богданов В.В., Мирошниченко В.Л., Шевалдин В.Т. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами // Матем. заметки. М. 2010. 88:6. Pp. 836–844.

[5] Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx. Theory. Academic Press, Inc. 1973. 7:2. Pp. 281–292.

[6] Spath H. Spline algorithms for curves and surfaces. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ. Inc. 1974. 198 p.

[7] Edeoa A., Gofeb G., Tefera T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. 2015. 12:1. Pp. 110–122.

[8] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Об условиях выпуклости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 8. С. 1–6.

[9] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Мат. заметки. 2018. Т. 103, вып. 4. С. 592–603.

А.-Р. К. Рамазанов (A.-R. K. Ramazanov)
Дагестанский государственный университет, Дагестанский научный центр РАН
E-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила в редакцию 2.07.2018

В. Г. Магомедова (V. G. Magomedova)
Дагестанский государственный университет
E-mail: vazipat@rambler.ru