

УДК 519.622

И. И. Шарапудинов, М. Г. Магомед-Касумов

**Численный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной системой косинусов**

Рассмотрен итерационный метод решения задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на использовании ортогональной в смысле Соболева системы функций, порожденной системой косинусов  $\{1, \sqrt{2} \cos(\pi kx), k \geq 1\}$

Библиография: 10 названий

We consider iterative method that numerically solves Cauchy problem for systems of equations. Suggested method is based on using sobolev orthogonal system of functions, generated by cosine system  $\{1, \sqrt{2} \cos(\pi kx), k \geq 1\}$

Bibliography: 10 items

**Ключевые слова:** задача Коши, численный метод, ортогональность в смысле Соболева, система дифференциальных уравнений

**Keywords:** Cauchy problem, numerical method, Sobolev inner product, system of differential equations

## Введение

В данной статье рассмотрен численный метод решения задачи Коши для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на использовании рядов Фурье по системам функций  $\Phi_r = \{\varphi_{r,k}\}$ , ортонормированных в смысле Соболева относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\mu(x)dx, \quad (1)$$

В работах Шарапудинова И. И. (см., например, [1–7]) разработаны теория и методы построения ортонормированных относительно (1) систем функций. Для этого выбирается одна из классических систем  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ , ортогональных относительно обычного скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mu(t)dt, \quad (2)$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00486а)

и на её основе строятся функции  $\varphi_{r,k}(x)$  посредством равенств

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3)$$

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi_{k-r}(t) dt, \quad k = r, r+1, \dots \quad (4)$$

Система функций  $\Phi_r = \{\varphi_{r,k}\}_{k=0}^\infty$ , определённая формулами (3), (4), как было показано в упомянутых выше работах, будет ортонормирована относительно скалярного произведения (1). Ряд Фурье функции  $y(x)$  по системе функций  $\Phi_r$  имеет следующий вид:

$$y(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} y^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} c_{r,k}(y) \varphi_{r,k}(x), \quad (5)$$

где

$$c_{r,k}(y) = \int_{-1}^1 y^{(r)}(t) \varphi_{k-r}(t) \mu(t) dt. \quad (6)$$

Ряды Фурье по функциям, ортогональным в смысле Соболева, являются очень удобным инструментом решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей статье мы будем рассматривать задачу Коши следующего вида

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = y^0, \quad x \in [0, 1], \quad (7)$$

где  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Вектор-функцию  $f(x, y)$  будем считать непрерывной в некоторой замкнутой области  $\bar{G}$  переменных  $(x, y)$ , содержащей точку  $(0, y^0)$ . Кроме того, мы предположим, что по переменной  $y$  функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x, a) - f(x, b)\| \leq \lambda \|a - b\|, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

где  $\|(a_1, \dots, a_m)\| = \sqrt{\sum_{l=1}^m a_l^2}$ . Не ограничивая общности, мы можем считать, что  $[0, 1] \times \mathbb{R}^m \subset \bar{G}$ , так как в случае необходимости мы всегда можем продолжить функцию  $f(x, y)$  по переменной  $y$  на всё  $\mathbb{R}^m$ , сохраняя свойство её подчинённости условию Липшица (8).

В статье [8] описан итерационный метод решения задачи Коши вида (7) с помощью представления решения  $y(x)$  в виде ряда Фурье (5) с  $r = 1$ :

$$y(x) = y(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1,k}(y) \varphi_{1,k}(x), \quad (9)$$

где  $y(0) = y^0$  — начальное условие задачи Коши, а  $c_{1,k}(y) = (c_{1,k}(y_1), \dots, c_{1,k}(y_m))$  — вектор неизвестных коэффициентов Фурье, которые требуется найти,  $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}(x)\}$  — система функций, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева (1). Суть метода заключается в следующем. Пусть  $s$  — некоторое натуральное число. Полагая  $x = t/s$ , отобразим линейно отрезок

$[0, s]$  на  $[0, 1]$ . Относительно новой переменной  $t \in [0, s]$  задача (7) принимает следующий вид

$$\eta'(t) = hf(ht, \eta(t)), \quad \eta(0) = y^0, \quad 0 \leq t \leq s, \quad (10)$$

где  $h = 1/s$ ,  $\eta(t) = y(ht)$ . Отметим, что поскольку по предположению функция  $f(x, y)$  непрерывна в области  $\bar{G}$ , то из (10) следует, что функция  $\eta(t) \in W_{L_\mu^2(0,1)}^1$ , где  $W_{L_\mu^2(0,1)}^1$  — это пространство Соболева, состоящее из абсолютно непрерывных функций, производная которых принадлежит  $L_\mu^2(0, 1)$ . Далее, мы можем представить отрезок  $[0, s]$  в виде объединения отрезков  $[l, l+1]$ ,  $l = 0, 1, \dots, s-1$ , и решать поставленную задачу Коши (10) сначала на  $[0, 1]$ , а затем, используя найденное значение  $\eta(1)$  в качестве начального, решать её на  $[1, 2]$  и так далее. На каждом отрезке  $[l, l+1]$  приближение к решению строится с помощью специально построенного оператора  $A$ , действующего в гильбертовом пространстве  $l_2^m$ , состоящем из элементов  $d = \{d^i, i = \overline{1, m}\}$ , где  $d^i = \{d_k^i\} \in l^2$ , с нормой  $\|d\| = \left( \sum_{i=1}^m \sum_k (d_k^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Оператор  $A$  сконструирован таким образом, что его неподвижной точкой являются коэффициенты Фурье  $c_{1,*}(y) = \left\{ \{c_{1,k}(y_i), k \geq 1\}, i = 1, \dots, m \right\}$  разложения (9) решения  $y(x)$  по системе соболевских функций  $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}(x)\}$  на отрезке  $[l, l+1]$ , т. е.  $A(c_{1,*}(y)) = c_{1,*}(y)$ . В связи с этим важным становится вопрос о наличии у оператора  $A$  свойства сжимаемости. Оказывается [8], что оператор  $A$  можно сделать сжимающим в том случае, когда функции системы  $\Phi_1$  обладают следующим свойством:

$$\kappa^2 = \kappa^2(\Phi_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b (\varphi_{1,1+j}(t))^2 \mu(t) dt < \infty. \quad (11)$$

Более точно, имеет место следующее неравенство:

$$\|Ac_1 - Ac_2\|_{l_2} \leq \frac{\lambda\kappa}{s} \|c_1 - c_2\|_{l_2},$$

т. е. оператор  $A$  будет сжимающим, если  $\frac{\lambda\kappa}{s} < 1$ , а это всегда можно сделать за счёт выбора  $s$ , если  $\kappa < \infty$ . Шарапудиновым И. И. было показано, что свойством (11) обладают следующие системы: система полиномов  $\{T_{1,k}(x)\}$ , порождённая полиномами Чебышева первого рода, система функций  $\chi_{1,k}(x)$ , порождённая функциями Хаара [9], система функций  $\xi_{1,k}(x)$ , порождённая системой косинусов.

Идея построения оператора  $A$  основана на следующих соотношениях:

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k+1}(\eta) \varphi_{1,k+1}(t), \quad (12)$$

$$\eta'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k+1}(\eta) \varphi_k(t), \quad (13)$$

$$q(t) = f(ht, \eta(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(q) \varphi_k(t), \quad (14)$$

где первое соотношение — это разложение функции  $\eta(t) \in W_{L_\mu^2}^1$  в ряд Фурье по системе  $\{\varphi_{1,k}\}$ , а второе и третье представляют собой ряды Фурье по системе  $\{\varphi_k\}$  функций  $\eta'(t) \in L_\mu^2$  и  $q(t) \in L_\mu^2$  соответственно. Отметим, что в соотношении (12) ряд Фурье сходится равномерно (см., например, [7; теорема 2]), а в (13) и (14) — в метрике  $L_\mu^2$  (в силу полноты системы  $\varphi_k$  в пространстве  $L_\mu^2$ ). Из (10), (13) и (14) следует

$$c_{1,k+1}(\eta) = hc_k(q) = h \int_a^b f(ht, \eta(t)) \varphi_k(t) \mu(t) dt,$$

что с учетом (12) приводит к соотношению

$$c_{1,k+1}(\eta) = h \int_a^b f\left(ht, \eta(0) + \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j+1}(\eta) \varphi_{1,j+1}(t)\right) \varphi_k(t) \mu(t) dt, \quad k \geq 0. \quad (15)$$

Выражение в правой части можно рассматривать как оператор  $A(\bar{d}) = \bar{d}$ , сопоставляющий точке  $\bar{d} \in l_2^m$  точку  $\bar{d} \in l_2^m$  по следующему правилу

$$\bar{d}^i = \left\{ h \int_a^b f\left(ht, \eta(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \bar{d}_j^i \varphi_{1,j+1}(t)\right) \varphi_k(t) \mu(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \right\}, \quad i = \overline{1, m}.$$

## 1. Численная реализация

В данной статье мы рассмотрим численную реализацию описанного выше итерационного метода на основе системы косинусов (см. также [10])

$$\xi_0(x) = 1, \quad \xi_k(x) = \sqrt{2} \cos(\pi kx), \quad k \geq 1, \quad (16)$$

и порождённой ею по формулам (3) и (4) системы функций

$$\xi_{1,0}(x) = 1, \quad \xi_{1,1}(x) = x, \quad \xi_{1,k+1} = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin(\pi kx), \quad k \geq 1. \quad (17)$$

Ядром программы является класс *AFiniteDimOperator*, отвечающий за вычисление значений конечномерного аналога оператора  $A$ , в котором вместо бесконечной суммы используется частичная сумма порядка  $N$ :

$$A_N(\bar{d}) = \left\{ h \int_a^b f\left(ht, \eta(0) + \sum_{j=0}^N \bar{d}_j^i \varphi_{1,j+1}(t)\right) \varphi_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \right\}_{i=1}^m. \quad (18)$$

Для системы косинусов вес  $\mu(t) = 1$ , поэтому в вышеприведенной формуле мы его отбросили. Сигнатура конструктора класса дана в листинге 1.

Листинг 1. Конструктор класса *AFiniteDimOperator*

```
public AFiniteDimOperator(double h,
                           DynFunc<double>[] f,
                           double[] initialValues,
                           double[] nodes,
                           Func<double, double>[] phi,
                           Func<double, double>[] phiSobolev,
                           int partialSumOrder)
```

В этом листинге `f` — массив правых частей, `initialValues` — начальные условия, `nodes` — узлы, `phi` и `phiSobolev` — системы функций (16) и (17), `partialSumOrder` — порядок частичной суммы (соответствует  $N$  в формуле (18)). Фрагмент кода, выполняющего основные вычисления, приведен в листинге 2.

Листинг 2. Методы класса `AFiniteDimOperator`

```

public double[][] GetValue(double[][] c)
{
    var eta = Range(0, _m)
        .Select(k => CalcEta(k, c[k])).ToArray();
    return CalcCoeffs(eta);
}

private double[] CalcEta(int k, double[] c)
{
    return _nodes
        .Select(t => _initialValues[k] +
            _h * c.Zip(_phiSobolev.Skip(1),
                (ci, phiPlus1) => ci * phiPlus1(t)).Sum()).ToArray();
}

private double[][] CalcCoeffs(double[][] eta)
{
    // fArgs[j][k] =  $\eta_k(t_j)$ , если  $k > 0$ , и  $fArgs[j][k] = ht_j$ ,
    // если  $k = 0$ , и т. д.  $fArgs[j] = (ht_j, \eta_0(t_j), \dots, \eta_{m-1}(t_j))$ 
    var fArgs = new double[_nodes.Length][];

    for (int j = 0; j < _nodes.Length; j++)
    {
        fArgs[j] = new double[_m + 1];
        fArgs[j][0] = _h * _nodes[j];
        for (int k = 1; k < _m + 1; k++)
        {
            fArgs[j][k] = eta[k - 1][j];
        }
    }
    return Range(0, _m)
        .Select(i => Range(0, _partialSumOrder)
            .Select(k => CalcCoeff(i, k, fArgs))
            .ToArray()).ToArray();
}

private double CalcCoeff(int i, int k, double[][] fArgs)
{
    // qk[j] =  $f_k(ht_j, \eta_0(t_j), \dots, \eta_{m-1}(t_j))\varphi_k(t_j)$ ,
    // т. е.  $qk$  — это вектор значений
    // функции  $q_k(t) = f_k(ht, \eta_0(t), \dots, \eta_{m-1}(t))\varphi_k(t)$  в узлах _nodes
    var qk = _nodes
        .Select((t, j) => _f[i].Invoke(fArgs[j]) * _phi[k](t));
    return Integrals.Trapezoid(qk.ToArray(), _nodes);
}

```

Интеграл из (18) мы находим с помощью квадратурной формулы трапеций (см. метод `CalcCoeff`). Для применения квадратурной формулы нам нужно получить значения подынтегральной функции в узлах некоторой сетки (в качестве узлов сетки используются значения `nodes`, переданные в конструктор класса). Для этого, в свою очередь, требуется вычислить значения частичной суммы (второй аргумент функции  $f$  в (18)) в узлах этой сетки: эти вычисления производятся в методе `CalcEta`. Основной метод класса `AFiniteDimOperator` — это `GetValue`, который принимает на вход коэффициенты  $\bar{d}$  (в коде используется обозначение `c`) и возвращает коэффициенты  $\bar{\bar{d}} = A_N(\bar{d})$ . Поскольку оператор  $A_N$  так же, как и оператор  $A$ , является сжимающим при определенном выборе  $h$  [8], то для приближенного нахождения его неподвижной точки можно воспользоваться методом простых итераций (см. листинг 3).

#### Листинг 3. Метод простых итераций

```
public static class SimpleIterations
{
    public static T FindFixedPoint<T>(Func<T, T> f,
                                         T initialValue,
                                         int iterCount)
    {
        var x = initialValue;
        for (int i = 0; i < iterCount; i++)
        {
            x = f(x);
        }
        return x;
    }
}
```

## 2. Компьютерные эксперименты

Рассмотрим применение приведенной выше программы на нескольких примерах.

**ПРИМЕР 1.** Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'_1 = \frac{y_1^2}{y_2 - x}, & y_1(0) = 1, \\ y'_2 = y_1 + 1, & y_2(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Точное решение этой задачи имеет вид:  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = x + e^x$ . При  $N = 4$  результат выполнения программы для первых 6 итераций приведен на рис. 1 и в таблице 1.

**ПРИМЕР 2.** Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 + 2 \sin x, & y_1(0) = 1, \\ y'_2 = 2y_1 - y_2, & y_2(0) = 2, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Точным решением являются функции  $y_1(x) = \cos x + x \sin x - x \cos x$ ,  $y_2(x) = 2(\sin x + \cos x) - 2x \cos x$ . Погрешности приближенного решения, выдаваемых программой, приведены в таблице 2.

№ итерации	N	$ y_1(1) - \tilde{y}_1(1) $	$ y_2(1) - \tilde{y}_2(1) $
1	4	0,731057768143951	0,0693027659320773
2	4	0,557248480165658	0,270687234900062
3	4	0,203364482810393	0,135062598082317
4	4	0,0495637600953178	0,0363226024346348
5	4	0,00743576877239116	0,00464432119513214
6	4	0,00106870386773261	0,00226872084398666

ТАБЛИЦА 1. Результат применения программы к примеру 1 ( $\tilde{y}$  — приближенное решение)

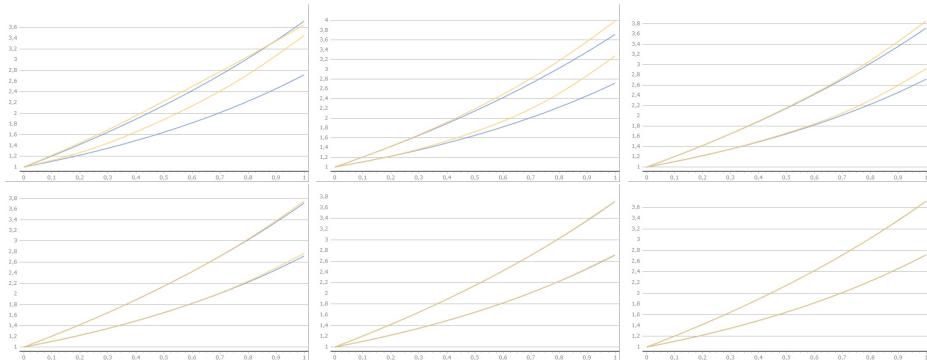


Рис. 1. Первые 6 итераций применения программы к задаче 1 (в первой строке итерации 1–3). Синим цветом обозначено точное решение, оранжевым — его приближение, полученное с помощью программы

№ итерации	N	$ y_1(1) - \tilde{y}_1(1) $	$ y_2(1) - \tilde{y}_2(1) $
1	10	0,0774332674724204	0,96932484147269
2	10	0,362402332696286	0,305536909577516
3	10	0,0196382309942635	0,120878014408579
4	10	0,021450636889026	0,0178523715499934
5	10	2,7299371482381E-05	0,00483053714313075
6	10	0,00139159070278361	0,000419902640661052
7	10	0,000812852832234978	4,53268437208276E-05

ТАБЛИЦА 2. Результат применения программы к примеру 2 ( $\tilde{y}$  — приближенное решение)

## Список литературы

- [1] Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства г-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 1. С. 68–76.
- [2] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 1–24.
- [3] Шарапудинов И.И. Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Том 16, вып. 3. С. 310–321.
- [4] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Матем. заметки. 2017. Том 101, вып. 4. С. 611–629.
- [5] Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. 2017. № 8. С 67–79.
- [6] Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4. С. 31–73.
- [7] Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г., Магомедов С.Р. Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4. С. 1–14.
- [8] Шарапудинов И.И. О приближении решения задачи Коши для нелинейных систем ОДУ посредством рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву // Дагестанские Электронные Математические Известия. 2017. Вып. 7. С. 66–76.
- [9] Sharapudinov I.I., Magomedov S.R. Systems of functions orthogonal in the sense of Sobolev associated with Haar functions and the Cauchy problem for ODEs // Дагестанские Электронные Математические Известия. 2017. Вып. 7. С. 1–15.
- [10] Султанахмедов М.С., Шарапудинов Т.И. Приближенное решение задачи Коши для систем ОДУ с помощью ортогональной в смысле Соболева системы, порожденной полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские Электронные Математические Известия. 2017. Вып. 8. Стр. 100–109.

**И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)**

Дагестанский научный центр РАН,  
Владикавказский научный центр РАН  
*E-mail:* [sharapud@mail.ru](mailto:sharapud@mail.ru)

Поступила в редакцию

14.11.2017

**М. Г. Магомед-Касумов (M. G. Magomed-Kasumov)**

Владикавказский научный центр РАН,  
Дагестанский научный центр РАН  
*E-mail:* [rasuldev@gmail.com](mailto:rasuldev@gmail.com)