УДК 517.5

Шах-Эмиров Т.Н.

О равномерной ограниченности семейства сдвигов функций Стеклова в весовых пространствах Лебега с переменным показателем

Рассмотрена задача о равномерной ограниченности семейства сдвигов функции Стеклова вида $S_{\lambda,\tau}(f) = S_{\lambda}(f)(x + \tau) = \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t)dt$. Показано, что это семейство равномерно ограничено в весовых пространствах Лебега с переменным показателем $L_{2\pi,w}^{p(x)}$, где $w = w(x)$ – весовая функция, удовлетворяющая аналогу известного условия Макенхоупта.

Библиография: 5 названий.

The problem of the uniform boundedness of the Steklov functions shifts families of the form $S_{\lambda,\tau}(f) = S_{\lambda}(f)(x + \tau) = \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t)dt$ was considered. It was shown that these shifts are uniformly bounded in weighted variable exponent Lebesgue spaces $L_{2\pi,w}^{p(x)}$, where $w = w(x)$ is the weight function satisfying the analogue of Muckenhoupt's condition.

Bibliography: 5 items.

Ключевые слова: пространства Лебега с переменным показателем, условие Дини – Липшица, операторы Стеклова.

Keywords: Lebesgue spaces with variable exponent, Dini – Lipschitz condition, Steklov operators.

Введение

Пусть $p(x)$ – 2π -периодическая измеримая на $E = [-\pi, \pi]$ функция такая, что $1 \leq \underline{p}(E) \leq p(x) \leq \bar{p}(E) < \infty$, $w(x) \geq 0$ – суммируемая на E почти всюду положительная 2π -периодическая функция. Здесь и далее символами $\underline{p}(D)$, $\bar{p}(D)$ будем обозначать $\operatorname{ess\,inf}_{x \in D} p(x)$ и $\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} p(x)$ соответственно. Пространством $L_{2\pi,w}^{p(x)}$ назовем множество измеримых функций $f(x)$, заданных на E и удовлетворяющих условию

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \infty.$$

Пространство $L_{2\pi,w}^{p(x)}$ представляет собой линейное нормированное пространство, где одна из эквивалентных норм определяется следующим равенством [1–4]:

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Отметим некоторые свойства, связанные с этими пространствами, которые понадобятся нам в дальнейшем.

$$1^\circ. \|f\|_{p(\cdot),w} = \|f w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}.$$

2°. Для любых измеримых множеств $A \subset B$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(A) \leq \|f\|_{p(\cdot),w}(B),$$

так как

$$\int_A \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq \int_B \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)} \right|^{p(x)} w(x) dx = 1.$$

3°. Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1.6.1 в [2], можно показать, что если $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q}(E) < \infty$, то для любой функции $f \in L_w^{q(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leq r_{p,q}^w \|f\|_{q(\cdot),w},$$

$$\text{где } r_{p,q}^w \leq \frac{1}{\underline{\alpha}} + \frac{\int_E w(x) dx}{\underline{\alpha}^*} \quad \left(\alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \alpha^*(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) - 1} \right).$$

4°. Если $p(x) > 1$, $x \in M$ (не исключая и случай, когда $\underline{p}(M) = 1$), то справедливо неравенство типа Гельдера для пространств Лебега с переменным показателем [1; нер-во (8)]:

$$\int_M |f(x)| |g(x)| dx \leq c(p, M) \cdot \|f\|_{p(\cdot)}(M) \cdot \|g\|_{p'(\cdot)}(M),$$

где $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$, $c(p, M) \leq \frac{1}{\underline{p}(M)} + \frac{1}{\underline{p}'(M)}$. Через $c, c(\alpha), c(\alpha, \beta), \dots$ здесь и далее будут обозначаться положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, различные в разных местах.

Через $\mathcal{P}_{2\pi}$ обозначим класс показателей $p(x)$, $p(x) \geq 1$, удовлетворяющих условию Дини-Липшица:

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x - y|} \leq C \quad (x, y \in E). \quad (2)$$

Пусть $\lambda > 0$, $\Delta_\lambda = [-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}]$

$$K_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in \Delta_\lambda, \\ 0, & x \in [-\pi, \pi] \setminus \Delta_\lambda. \end{cases}$$

Продолжим $K_\lambda(x)$ 2π -периодически на $(-\infty, \infty)$. Операторы Стеклова S_λ определяются равенством

$$S_\lambda(f) = (S_\lambda(f))(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) K_\lambda(t) dt. \quad (3)$$

Чтобы можно было определить для $f(x) \in L_w^{p(x)}(E)$ оператор (3), функция $f(x)$ должна принадлежать $L^1(E)$, то есть имело место вложение $L_w^{p(x)}(E) \subset$

$L^1(E)$. Очевидно, что это имеет место не для всех весов $w(x)$. В работе [5] исследованы условия на вес, при которых имеет место вышеупомянутое вложение. Приведем эти условия ниже.

Пусть $E_1 = \{x \in E : p(x) = 1\}$, $E_2 = E \setminus E_1$. Тогда

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

ЛЕММА. *Функция $f \in L_w^{p(x)}(E)$ будет суммируемой на E_1 в том и только в том случае, если вес отделен от нуля почти всюду на E_1 :*

$$w(x) \geq C_1(w) > 0 \text{ для почти всех } x \in E_1. \quad (4)$$

Для суммируемости $f \in L_w^{p(x)}$ на E_2 достаточно выполнения следующего условия:

$$\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty. \quad (5)$$

Через $\mathcal{H}(E, p)$ обозначим класс весов, удовлетворяющих условиям (4), (5).

Заметим, что при выполнении условий 1° и 2° из (4) и (5) имеем

$$\int_E |f(x)|dx \leq C(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}. \quad (6)$$

Пусть

$$S_{\lambda, \tau}(f) = S_{\lambda}(f)(x + \tau) = \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t)dt \quad (7)$$

– сдвиг функции Стеклова. В настоящей работе исследуются условия на вес, при которых семейство сдвигов $\{S_{\lambda, \tau}(f)\}_{1 \leq \lambda < \infty, |\tau| \leq \pi/\lambda^\gamma}$ ($0 < \gamma \leq 1$) будет равномерно ограничено в пространствах $L_w^{p(x)}$, $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$.

1. Основной результат

Введем некоторые обозначения для формулировки результата. Пусть $N = [\lambda^\gamma]$, $h = \frac{1}{N}$,

$$\begin{aligned} x_k &= (kh - 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \Delta_k(\lambda) &= [x_k, x_{k+1}], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{\Delta}_k(\lambda) &= \Delta_{k-1}(\lambda) \cup \Delta_k(\lambda) \cup \Delta_{k+1}(\lambda), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ p_k &= p(\tilde{\Delta}_k(\lambda)) \end{aligned} \quad (8)$$

где $[\alpha]$ представляет собой целую часть числа α . Нам понадобятся следующие системы отрезков

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\varepsilon^1 &= \{\Delta_k(\lambda) : p_k = 1, |\Delta_k(\lambda)| < \varepsilon\}_{k \in \mathbb{Z}}, \\ \mathfrak{B}_\varepsilon^{p(\cdot)} &= \left\{ \tilde{\Delta}_k(\lambda) : p_k > 1, |\tilde{\Delta}_k(\lambda)| < 3\varepsilon \right\}_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $p \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $w \in \mathcal{H}(E, p)$, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда семейство сдвигов операторов Стеклова $\{S_{\lambda, \tau}(f)\}_{1 \leq \lambda < \infty, |\tau| \leq \pi/\lambda^\gamma}$ будет равномерно ограничено в пространстве $L_{2\pi, w}^{p(x)}$ если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_\varepsilon^1} \frac{1}{|B|^{\frac{1}{\gamma}}} \int_B w(x) dx < C(p, w), \quad (9)$$

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{p(\cdot)}} \left(\frac{1}{|B|^{\frac{1}{\gamma}}} \int_B w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|B|^{\frac{1}{\gamma}}} \int_B w(x)^{-\frac{1}{p(B)-1}} dx \right)^{p(B)-1} < C(p, w). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\|f\|_{p(\cdot), w} \leq 1. \quad (11)$$

Из (7) имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} |S_{\lambda, \tau}(f)(x)|^{p(x)} w(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t) dt \right|^{p(x)} w(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t) dt \right|^{p(x)} w(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t) dt \right|^{p(x)-p_k+p_k} w(x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее из (6) имеем

$$\left| \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t) dt \right| \leq \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} |f(t)| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \leq c(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}. \quad (13)$$

и

$$\lambda^{p(x)-p_k} \leq \lambda^{\frac{c(p)}{\ln \lambda}} \leq c(p) \quad (14)$$

Из (11), (13) и (14) получим

$$\begin{aligned} I &\leq c(p, w) \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t) dt \right|^{p_k} w(x) dx = \\ &= c(p, w) \left(\sum_{k \in K_1} + \sum_{k \in K_2} \right) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t) dt \right|^{p_k} w(x) dx = c(p, w) (\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2), \end{aligned} \quad (15)$$

где $K_1 = \{k : p_k = 1\}$, $K_2 = \{k : p_k > 1\}$.

Оценим $\mathfrak{S}_1$. Учитывая (11) и условие (9) получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \sum_{k \in K_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t) dt \right| w(x) dx \leq \sum_{k \in K_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} f(t) dt \right| w(x) dx = \\ &= \sum_{k \in K_1} \lambda \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) dx \left| \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} f(t) dt \right| \leq \\ &= C(p, w) \sum_{k \in K_1} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)| dt \leq C(w) 3 \|f\|_{1,1} \leq C(p, w). \end{aligned} \quad (16)$$

Перейдем к оценке $\mathfrak{S}_2$. Пусть $p'_k = \frac{p_k}{p_k-1}$, тогда, применяя 4°, получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2 &= \sum_{k \in K_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t) dt \right|^{p_k} w(x) dx \leq \sum_{k \in K_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} f(t) dt \right|^{p_k} w(x) dx = \\ &= \sum_{k \in K_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \lambda \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} [w^{-\frac{1}{p_k}}(t) f(t) w^{\frac{1}{p_k}}(t)] dt \right|^{p_k} w(x) dx \leq \\ &= \sum_{k \in K_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\lambda \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)|^{p_k} w(t) dt \right)^{\frac{1}{p_k}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w^{-\frac{p'_k}{p_k}}(t) dt \right)^{\frac{1}{p_k}} \right)^{p_k} w(x) dx = \\ &= \sum_{k \in K_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \lambda^{p_k} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)|^{p_k} w(t) dt \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w^{-\frac{p'_k}{p_k}}(t) dt \right)^{\frac{p_k}{p'_k}} w(x) dx = \\ &= \sum_{k \in K_2} \lambda \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) dx \left(\lambda \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w^{-\frac{1}{p_k-1}}(t) dt \right)^{p_k-1} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)|^{p_k} w(t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом условия (10) из (17) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2 &\leq C(w, p) \sum_{k \in K_2} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)|^{p_k} w(t) dt = \\ &= C(w, p) \sum_{k \in K_2} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \right) |f(t)|^{p_k} w(t) dt \leq \end{aligned}$$

$$C(w, p) \sum_{k=0}^{2N-1} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \right) |f(t)|^{p_k} w(t) dt.$$

Полагая

$$h_1(x) = p_k, x \in [x_{k-1}, x_k], h_2(x) = p_k, x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$h_3(x) = p_k, x \in [x_{k+1}, x_{k+2}], 0 \leq k \leq 2N-1,$$

$$h_i(x+2\pi) = h_i(x), x \in [-\pi, \pi], i = 1, 2, 3,$$

последнее неравенство можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2 &\leq C(w, p) \sum_{k=0}^{2N-1} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|^{h_1(t)} w(t) dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)|^{h_2(t)} w(t) dt + \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} |f(t)|^{h_3(t)} w(t) dt \right) = \\ &\quad C(w, p) \left(\int_{x_{-1}}^{x_{2N-1}} |f(t)|^{h_1(t)} w(t) dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{x_0}^{x_{2N}} |f(t)|^{h_2(t)} w(t) dt + \int_{x_1}^{x_{2N+1}} |f(t)|^{h_3(t)} w(t) dt \right) \stackrel{(8)}{=} \\ &\quad C(w, p) \left(\int_{-\pi-h}^{\pi-h} |f(t)|^{h_1(t)} w(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{h_2(t)} w(t) dt + \int_{-\pi+h}^{\pi+h} |f(t)|^{h_3(t)} w(t) dt \right) = \\ &\quad C(w, p) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{h_1(t)} w(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{h_2(t)} w(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{h_3(t)} w(t) dt \right). \end{aligned}$$

Так как

$$h_i(x) \leq p(x), i = 1, 2, 3,$$

то по свойству 3° нормы (1) получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2 &\leq C(w, p) (\|f\|_{h_1(\cdot), w} + \|f\|_{h_2(\cdot), w} + \|f\|_{h_3(\cdot), w}) \leq \\ &\quad C(w, p) (r_{h_1, p} + r_{h_2, p} + r_{h_3, p}) = C(w, p). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (16) и (18) следует равномерная ограниченность семейства сдвигов функции Стеклова на единичном шаре пространства $L_{2\pi, w}^{p(x)}$. $\square$

Список литературы

- [1] Шарапудинов И.И. О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632.

- [2] Шарапудинов И.И. Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2012. 270 с.
- [3] Diening L., Harjulehto P., Hästö P. and Ruzicka M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer, 2011. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 2017. 509 p.
- [4] Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis. Springer, 2013. 312 p.
- [5] Магомед-Касумов М.Г. Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказский математический журнал. 2014. Т. 16, № 3. С. 38–46.

Шах-Эмиров Т.Н. (Shakh-Emirov T.N.)
Дагестанский научный центр РАН

Поступила в редакцию
09.11.2017