УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

Обращение преобразования Лапласа посредством обобщенных специальных рядов по полиномам Лагерра

Рассмотрена задача об обращении преобразования Лапласа посредством специального ряда по полиномам Лагерра, который в частном случае совпадают с рядом Фурье по полиномам $l_{r,k}^{\gamma}(x)$ $(r \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$< f, g >= \sum\nolimits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) t^{\gamma} e^{-t} dt, \gamma > -1.$$

Даны оценки приближения функций частичными суммами специального ряда по полиномам Лагерра.

Библиография: 17 названий.

We consider the problem of inversion of the Laplace transform by means of a special series with respect to Laguerre polynomials, which in a particular case coincides with the Fourier series in polynomials $l_{r,k}^{\gamma}(x)$ $(r \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots)$, orthogonal with respect to a scalar product of Sobolev type of the following type

$$< f, g >= \sum\nolimits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) t^{\gamma} e^{-t} dt, \gamma > -1.$$

Estimates of the approximation of functions by partial sums of a special series with respect to Laguerre polynomials are given.

Bibliography: 17 items.

Ключевые слова: преобразования Лапласа, полиномы Лагерра, специальные ряды.

Keywords: Laplace transforms, Laguerre polynomials, special series.

Введение

В ряде работ автора [1] – [4] были введены, так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, которые, как выяснилось позже в [5], [6], представляют собой не что иное, как ряды Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, ассоциированным с соответствующими классическими ортогональными полиномами. Интерес к теории систем функций (особенно, полиномов), ортогональных по Соболеву в последние годы заметно усилился (см., например, [7] – [12] и цитированную там литературу). Были исследованы некоторые общие свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, в том числе и связанные со сравнительной асимптотикой [13]. Число работ по данной теме неуклонно растет [12]. В работах [1] – [6] были подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных функциональных пространств и классов. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. Такие проблемы непременно возникают, например, при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей статье эти вопросы рассмотрены для классических полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ в связи с задачей обращения преобразования Лапласа. Тот факт, что ряд Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву относительно скалярного произведения

$$< f, g >= \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)t^\alpha e^{-t}dt, \alpha > -1, \tag{1}$$

ассоциированным с полиномами Лагерра представляют собой смешанные ряды по полиномам Лагерра, позволяет применить к исследованию их аппроксимативных свойств методы и подходы, разработанные нами ранее [1] – [4] для решения аналогичной задачи для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам. Именно на таком пути в работах [5] и [6], в частности, были исследованы апроксимативные свойства частичных сумм ряда Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным классическими полиномами Лагерра. С другой стороны, в [5] и [6] были введены некоторые специальные ряды по полиномам Лагерра, которые также тесно связаны со смешанными рядами по полиномам Лагерра и в отдельных важных случаях совпадают с рядами Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву и порожденным полиномами Лагерра. В [5] и [6] были весьма подробно исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм указанных специальных рядов. В настоящей статье в связи с задачей об обращении преобразования Лапласа мы введем *обобщенные специальные ряды* по полиномам Лагерра, для которых специальные ряды, введенные в [5] и [6], являются частным случаем.

Отметим, что если нам задано преобразование Лапласа $\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ и для оригинала существуют производные $f^{(\nu)}(0)$ с $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$, то мы можем считать заданным и преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}[f(t) - P_{r-1}(t)]dt$, где $P_{r-1}(t) = P_{r-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!}$ – полином Тейлора для функции $f(t)$ в точке $t = 0$. В настоящей статье мы будем рассматривать задачи об обращении преобразования Лапласа второго из указанных типов. Именно на этом пути возникают специальные ряды по общим полиномам Лагерра $L_n^\alpha(t)$, обладающие на конечных отрезках вида $[0, A]$ лучшими, чем у классических рядов Фурье-Лагерра аппроксимативными свойствами для дифференцируемых функций (см.§6 настоящей работы).

1. Некоторые сведения о полиномах Лагерра

В дальнейшем нам понадобится ряд свойств свойств классических полиномов Лагерра $L_n^\alpha(t)$, которых для удобства ссылок мы соберем в этом параграфе. Пусть α – произвольное действительное число. Тогда имеют место [14]:

Формула Родрига

$$L_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!}t^{-\alpha}e^t\left\{t^{n+\alpha}e^{-t}\right\}^{(n)}; \tag{2}$$

Явный вид

$$L_n^\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{(-x)^\nu}{\nu!}; \tag{3}$$

Соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}L_n^\alpha(t)L_m^\alpha(t)dt = \delta_{nm}h_n^\alpha \quad (\alpha > -1), \tag{4}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1); \tag{5}$$

Формула Кристоффеля – Дарбу

$$\mathcal{K}_n^\alpha(t,\tau) = \sum_{k=0}^{n}\frac{L_\nu^\alpha(t)L_\nu^\alpha(\tau)}{h_\nu^\alpha} = \frac{n+1}{h_n^\alpha}\frac{L_n^\alpha(t)L_{n+1}^\alpha(\tau)-L_n^\alpha(\tau)L_{n+1}^\alpha(t)}{t-\tau}; \tag{6}$$

Свертка

$$\int_0^t L_n(t-\tau)L_m(\tau)d\tau = L_{n+m}(t) - L_{n+m+1}(t). \tag{7}$$

Далее отметим следующие равенства

$$\frac{d}{dt}L_n^\alpha(t) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t), \tag{8}$$

$$\frac{d^r}{dt^r}L_{k+r}^{\alpha-r}(t) = (-1)^r L_k^\alpha(t), \tag{9}$$

$$L_k^{-r}(t) = \frac{(-t)^r}{k^{[r]}}L_{k-r}^r(t), \tag{10}$$

где $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$L_n^{\alpha+1}(t) - L_{n-1}^{\alpha+1}(t) = L_n^\alpha(t), \tag{11}$$

$$(n+\alpha)L_n^{\alpha-1}(t) = \alpha L_n^\alpha(t) - xL_{n-1}^{\alpha+1}(t), \tag{12}$$

весовая оценка [15]

$$e^{-\frac{t}{2}}|L_n^\alpha(t)| \leqslant c(\alpha)B_n^\alpha(t), \quad \alpha > -1, \tag{13}$$

где здесь и далее $c, c(\alpha), c(\alpha, \ldots, \beta)$ – положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров,

$$B_n^\alpha(t) = \begin{cases} \theta^\alpha, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\, t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \leqslant \frac{\theta}{2}, \\ \Big[\theta(\theta^{\frac{1}{3}} + |t-\theta|)\Big]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \leqslant \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t, \end{cases}$$

где $\theta = \theta_n = \theta_n(\alpha) = 4n + 2\alpha + 2$.

Для нормированных полиномов Лагерра

$$l_n^\alpha(t) = \Big\{h_n^\alpha\Big\}^{-\frac{1}{2}} L_n^\alpha(t) \tag{14}$$

имеет место оценка [15]

$$e^{-\frac{t}{2}}\Big|l_{n+1}^\alpha(t) - l_{n-1}^\alpha(t)\Big| \leqslant \begin{cases} \theta^{\frac{\alpha}{2}-1}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{-\frac{3}{4}}\, t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \leqslant \frac{\theta}{2}, \\ t^{-\frac{\alpha}{2}}\, \theta^{-\frac{3}{4}}\Big[\theta^{\frac{1}{3}} + |t-\theta|\Big]^{\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \leqslant \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t. \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку $h_n^\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \asymp n^\alpha$, то из (13) и (14) следует, что

$$e^{-\frac{t}{2}}|l_n^\alpha(t)| \leqslant c(\alpha)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} B_n^\alpha(t), \quad t \geqslant 0. \tag{16}$$

2. Обращение преобразования Лапласа посредством специальных рядов по полиномами Лагерра

Пусть для функции $f(x)$, определенной на полуоси $[0,\infty)$, существуют производные $f^{(\nu)}(0)$ с $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$. Тогда мы можем определить на $(0,\infty)$ новую функцию ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha}(f(x) - P_{r-1}(x)), \quad \text{где} \quad P_{r-1}(x) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!}, \tag{17}$$

причем будем считать, что если $r = 0$, то $P_{r-1}(x) \equiv 0$. Предположим, что $g(x) \in L_{2,\rho}$, где $\rho(x) = e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$. Тогда $g(x)$ можно представить в виде ряда Фурье по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^\infty g_k^\alpha L_k^\alpha(x), \tag{18}$$

где

$$g_k^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha}\int_0^\infty g(t)L_k^\alpha(t)t^\alpha e^{-t}dt. \tag{19}$$

Кроме того представим в виде ряда Фурье по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$ функцию $\eta(x) = e^{-(p-1)x}$:

$$\eta(x) = \sum_{k=0}^\infty \eta_k^\alpha L_k^\alpha(x), \tag{20}$$

$$\eta_k^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha}\int_0^\infty \eta(t)L_k^\alpha(t)t^\alpha e^{-t}dt = \frac{1}{h_k^\alpha}\int_0^\infty e^{-pt}L_k^\alpha(t)t^\alpha dt. \tag{21}$$

Чтобы найти значение последнего интеграла воспользуемся тем фактом, что он представляет собой преобразование Лапласа функции $L_k^\alpha(t)t^\alpha$ и, как хорошо известно из [16], [17], имеет место равенство

$$\int_0^\infty e^{-pt}L_k^\alpha(t)t^\alpha dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k h_k^\alpha. \tag{22}$$

Из (21) и (22) имеем

$$\eta_k^\alpha = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k. \tag{23}$$

Пусть задано преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\left[f(t)-P_{r-1}(t)\right]dt, \tag{24}$$

которое с учетом (17) можем переписать так

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-(p-1)t}g(t)t^\alpha e^{-t}dt. \tag{25}$$

Если $p > \frac{1}{2}$, то к последнему интегралу мы можем применить обобщенное равенство Парсеваля, что с учетом (19) и (24) дает

$$p^{\alpha+1}F(p) = p^{\alpha+1}\sum_{k=0}^\infty h_k^\alpha g_k^\alpha \eta_k = \sum_{k=0}^\infty g_k^\alpha h_k^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)^k. \tag{26}$$

Полагая $z = 1-1/p$, мы можем переписать это равенство еще так:

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}F\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k=0}^\infty g_k^\alpha h_k^\alpha z^k. \tag{27}$$

Поскольку $G(z)$ – заданная функция, аналитическая в круге $|z|<1$, то неизвестные коэффициенты g_k^α из (26) можно найти из равенств

$$g_k^\alpha = \frac{1}{R^k h_k^\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(Re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi, \quad k=0,1,\ldots, \tag{28}$$

где $0<R<1$. При этом заметим, что приближенные значения интегралов из (28) с $0\leqslant k\leqslant N$ для произвольного натурального N (особенно для $N=2^m$) можно найти путем применения быстрого дискретного преобразования Фурье.

Равенство (18) с учетом (17) можно переписать так

$$f(x) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!} + x^\alpha\sum_{k=0}^\infty g_k^\alpha L_k^\alpha(x), \tag{29}$$

в, частности, если $\alpha = r$, то

$$f(x) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!} + x^r\sum_{k=0}^\infty g_k^r L_k^r(x). \tag{30}$$

Отметим, что рассмотренный нами выше подход к обращению преобразования Лапласа (24) приводит к задаче об исследовании вопросов сходимости специальных рядов по полиномам Лагерра вида (29) и (30). Специальные ряды (30) являлись одним из объектов исследования работ [5] и [6]. Ниже мы покажем, что ряд (29) представляет собой частный случай некоторых обобщенных специальных рядов по полиномам Лагерра, а ряд (30) представляет собой, не что иное, как ряд Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным полиномами Лагерра $L_k^0(x)$.

3. Обобщенные специальные ряды по полиномам Лагерра

Пусть $1 \leqslant r$ – целое, $\beta \in \mathbb{R}$, $f(t)$ – $r-1$ раз дифференцируемая в точке $t=0$,

$$P_{r-1}(f) = P_{r-1}(f)(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i, \tag{31}$$

$$f_\beta(t) = \frac{1}{t^\beta}[f(t) - P_{r-1}(f)(t)]. \tag{32}$$

Предположим, что для функции $f_\beta(t)$, определенной равенством (32) существуют коэффициенты Фурье-Лагерра

$$\hat{f}_{\beta,k}^\gamma = \frac{1}{h_k^\gamma} \int_0^\infty f_\beta(\tau) t^\gamma e^{-t} L_k^\gamma(t) dt =$$

$$\frac{1}{h_k^\gamma} \int_0^\infty [f(t) - P_{r-1}(f)(t)] t^{\gamma-\beta} e^{-t} L_k^\gamma(t) dt, \tag{33}$$

где $h_n^\gamma = \Gamma(n+\gamma+1)/n!$. Тогда мы можем рассмотреть ряд Фурье-Лагерра функции $f_\beta(t)$:

$$f_\beta(t) \sim \sum\nolimits_{k=0}^\infty \hat{f}_{\beta,k}^\gamma L_k^\gamma(t). \tag{34}$$

Если ряд (34) сходится к $f_\beta(t)$, то с учетом (32) мы можем записать

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^\beta \sum\nolimits_{k=0}^\infty \hat{f}_{\beta,k}^\gamma L_k^\gamma(t). \tag{35}$$

Это и есть *обобщенный специальный ряд по полиномам Лагерра.* Из равенств (17) и (32) непосредственно следует, что если $\gamma = \beta = \alpha$, то $g_(x) = f_\beta(x)$ и ряд (35) совпадает с рядом (29). В следующем параграфе мы покажем, в частности, что ряд (30) представляет собой ряд Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным полиномами Лагерра $L_n^0(x)$.

4. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные полиномами Лагерра

Пусть $-1 < \gamma$, $\rho = \rho(x) = x^\gamma e^{-x}$, $1 \leqslant p < \infty$, $\mathcal{L}_\rho^p$ – пространство измеримых функций $f(x)$, определенных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\rho^p} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Из равенства (4) следует, что если $\gamma > -1$, то полиномы $l_n^\gamma(x)$, $\quad (n = 0, 1, \ldots)$ (см.(14)) образуют ортонормированную в $\mathcal{L}_\rho^2$ систему. Как хорошо известно [14], система полиномов Лагерра (14) полна в $\mathcal{L}_\rho^2$. Эта система порождает на $[0, \infty)$ систему полиномов $l_{r,k}^\gamma(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, определенных равенствами

$$l_{r,k}^\gamma(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{36}$$

$$l_{r,r+k}^\gamma(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} l_k^\gamma(t)dt, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{37}$$

Через $W^r_{\mathcal{L}^p_\rho}$ обозначим подкласс функций $f = f(x)$ из $\mathcal{L}^p_\rho$, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, а $f^{(r)} \in \mathcal{L}^p_\rho$. В $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ мы введем скалярное произведение (1), которое превращает $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ в гильбертово пространство. Как показано в [5] и [6], система полиномов $\{l_{r,k}^\gamma(x)\}_{k=0}^\infty$ является полной и ортонормированной в $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$. Этот результат из [5] и [6] мы приведем вместе с доказательством.

Теорема 4.1. *Пусть $\gamma > -1$. Тогда система полиномов $\{l_{r,k}^\gamma(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой ортонормированных полиномов Лагерра* (14) *посредством равенств* (36) *и* (37)*, полна в $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (1).

Доказательство. Из (36) и (37) следует, что

$$(l_{r,k}^\gamma(x))^{(\nu)} = \begin{cases} l_{r-\nu,k-\nu}^\gamma(x), & \text{если } 0 \leqslant \nu \leqslant r-1,\ r \leqslant k, \\ l_{k-r}^\gamma(x), & \text{если } \nu = r \leqslant k, \\ l_{r-\nu,k-\nu}^\gamma(x), & \text{если } \nu \leqslant k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leqslant r. \end{cases} \tag{38}$$

В силу первого из равенств (38) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $(l_{r,k}^\gamma(x))_{x=0}^{(\nu)} = 0$, поэтому в силу второго равенства из (38), имеем

$$< l_{r,k}^\gamma, l_{r,l}^\gamma >= \int_0^\infty (l_{r,k}^\gamma(x))^{(r)} (l_{r,l}^\gamma(x))^{(r)} \rho(x) dx =$$

$$\int_0^\infty l_{k-r}^\gamma(x) l_{l-r}^\gamma(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad k, l \geqslant r, \tag{39}$$

а в силу третьего и четвертого из равенств (38) получаем

$$< l_{r,k}^\gamma, l_{r,l}^\gamma >= \sum_{\nu=0}^{r-1} (l_{r,k}^\gamma(x))^{(\nu)}|_{x=0} (l_{r,l}^\gamma(x))^{(\nu)}|_{x=0} = \delta_{kl}, \quad k, l < r. \tag{40}$$

Очевидно также, что

$$< l_{r,k}^\gamma, l_{r,l}^\gamma >= 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k. \tag{41}$$

Равенства (39) – (41) означают, что функции $l_{r,k}^\gamma(x)\,(k = 0, 1, \ldots)$ образуют в $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1).

Остается убедиться в ее полноте в $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $< f, l_k^\gamma >= 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leqslant r-1$, то $< f, l_{r,k}^\gamma >= f^{(k)}(0)$, поэтому с учетом того, что $< f, l_{r,k}^\gamma >= 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt$$

приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt. \tag{42}$$

С другой стороны, для всех $k \geqslant r$ имеем

$$0 =< f, l_{r,k}^\gamma >= \int_0^\infty f^{(r)}(x)(l_{r,k}^\gamma(x))^{(r)}\rho(x)dx = \int_0^\infty f^{(r)}(x) l_{k-r}^\gamma(x)\rho(x)dx.$$

Отсюда и из того, что $l_m^\gamma(x)$ $(m = 0, 1, \dots)$ образуют в $\mathcal{L}^2_\rho$ полную ортонормированную систему, имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[0, \infty)$. Поэтому из (42) следует, что $f(x) \equiv 0$. Теорема 4.1 доказана.

Ряд Фурье функции $f \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ по системе $\{l_{r,k}^\gamma(x)\}_{k=0}^\infty$ мы можем записать в виде

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^\infty < f, l_{r,k}^\gamma > l_{r,k}^\gamma(x), \tag{43}$$

где

$$< f, l_{r,k}^\gamma >= f^{(k)}(0), \quad k = 0, \dots, r-1, \tag{44}$$

$$< f, l_{r,k}^\gamma >= \int_0^\infty f^{(r)}(t) l_{k-r}^\gamma(t) e^{-t} t^\gamma dt = f_{r,k}^\gamma, \quad k = r, r+1, \dots. \tag{45}$$

В силу (44) и (45) мы можем (43) переписать еще так

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty f_{r,k}^\gamma l_{r,k}^\gamma(x). \tag{46}$$

Ряд, фигурирующий в правой части соотношения (46) впервые был исследован в работе автора [1], где он был назван *смешанным рядом по полиномам Лагерра* $L_k^\gamma(x)$. Из теоремы 4.1 следует, что если $f \in W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$, то ряд (46), будучи рядом Фурье по системе $\{l_{r,k}^\gamma(x)\}_{k=0}^\infty$, сходится к f в метрике гильбертова пространства $W^r_{\mathcal{L}^2_\rho}$ со скалярным произведением (1), другими словами, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^\infty (f_{r,k}^\gamma)^2 = 0.$$

Перейдем к получению некоторых представлений для полиномов $l^\gamma_{r,r+k}(x)$ при $k \geqslant 0$. Важное представление для полиномов $l^\gamma_{r,n+r}(x)$ можно получить если мы обратимся к равенствам (3) и (14) и запишем

$$l^\gamma_n(x) = \frac{1}{(h^\gamma_n)^{1/2}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\gamma}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}.$$

Из этого равенства, с учетом того, что

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} t^\nu dt = \frac{x^{\nu+r}}{(\nu+r)^{[r]}},$$

убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 4.2. *Имеют место равенства*

$$l^\gamma_{r,n+r}(x) = \frac{1}{(h^\gamma_n)^{1/2}} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n+\gamma}{n-\nu} \frac{x^{\nu+r}}{\nu!(\nu+r)^{[r]}} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Для получения дальнейших представлений полиномов $l^\gamma_{r,k}(x)$ обратимся к свойству (9) и запишем

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} L^\gamma_k(t) dt = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} L^{\gamma-r}_{k+r}(t) dt$$

$$= (-1)^r L^{\gamma-r}_{k+r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \{L^{\gamma-r}_{k+r}(t)\}^{(\nu)}_{t=0}. \tag{47}$$

Далее

$$\{L^{\gamma-r}_{k+r}(t)\}^{(\nu)} = (-1)^\nu L^{\gamma-r+\nu}_{k+r-\nu}(t), \tag{48}$$

а в силу (3)

$$L^{\gamma-r+\nu}_{k+r-\nu}(0) = \binom{k+\gamma}{k+r-\nu} = \frac{\Gamma(k+\gamma+1)}{\Gamma(\nu-r+\gamma+1)(k+r-\nu)!}. \tag{49}$$

Сопоставляя (48) и (49), имеем

$$B^\gamma_{k,\nu} = \{L^{\gamma-r}_{k+r}(t)\}^{(\nu)}_{t=0} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(k+\gamma+1)}{\Gamma(\nu-r+\gamma+1)(k+r-\nu)!}. \tag{50}$$

Из (47) и (50) находим

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} L^\gamma_k(t) dt = (-1)^r L^{\gamma-r}_{k+r}(x) - (-1)^r \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{B^\gamma_{k,\nu} x^\nu}{\nu!}. \tag{51}$$

С другой стороны, в силу определения (37) и равенства (14) имеем

$$l^\gamma_{r,r+k}(x) = \frac{1}{\sqrt{h^\gamma_k}(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} L^\gamma_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{52}$$

Сопоставляя (51) с (52) мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.3. *Пусть $\gamma > -1$, $k \geqslant 0$. Тогда имеет место равенство*

$$l_{r,r+k}^{\gamma}(x) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{h_k^{\gamma}}}\left[L_{k+r}^{\gamma-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{B_{k,\nu}^{\gamma}x^{\nu}}{\nu!}\right], \tag{53}$$

в котором

$$B_{k,\nu}^{\gamma} = \frac{(-1)^{\nu}\Gamma(k+\gamma+1)}{\Gamma(\nu-r+\gamma+1)(k+r-\nu)!}.$$

Следствие 1. *Пусть $k \geqslant 0$. Тогда*

$$l_{r,r+k}^{0}(x) = (-1)^r L_{k+r}^{-r}(x) = \frac{x^r L_k^r(x)}{(k+r)^{[r]}}.$$

Доказательство. Из (51) следует, что если $\gamma = 0$, то $B_{k,\nu}^{\gamma} = 0$ для всех $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$ и, как следствие, в этом случае равенство (54) принимает вид

$$l_{r,r+k}^{0}(x) = (-1)^r L_{k+r}^{-r}(x), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{54}$$

Поскольку в силу равенства (8)

$$L_{k+r}^{-r}(x) = \frac{(-x)^r}{(k+r)^{[r]}}L_k^r(x),$$

то утверждения следствия 1 вытекает из (54).

В качестве одного из приложений следствия 1 покажем, что смешанный ряд (46) в случае $\gamma = 0$ совпадет со специальным рядом (30). В силу (54) ряд (46) при $\gamma = 0$ приобретает следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + x^r\sum_{k=r}^{\infty}\frac{f_{r,k}^{0}}{(k+r)^{[r]}}L_k^r(x). \tag{55}$$

Далее

$$f_{r,k}^{0} = \int\limits_0^{\infty} f^{(r)}(\tau)e^{-\tau}L_k(\tau)d\tau = \frac{1}{k!}\int\limits_0^{\infty}(f(\tau) - P_{r-1}(f)(\tau))^{(r)}(e^{-\tau}\tau^k)^{(k)}d\tau =$$

$$\frac{(-1)^r}{k!}\int\limits_0^{\infty}(f(\tau) - P_{r-1}(f)(\tau))(e^{-\tau}\tau^k)^{(k+r)}d\tau =$$

$$\frac{(-1)^r}{k!}\int\limits_0^{\infty}(f(\tau) - P_{r-1}(f)(\tau))\tau^{-r}e^{-\tau}L_{k+r}^{-r}(\tau)(k+r)!d\tau =$$

$$\frac{(k+r)!}{k!}(-1)^r\int\limits_0^{\infty}\frac{(f(\tau) - P_{r-1}(f)(\tau))}{\tau^r}e^{-\tau}\frac{(-\tau)^r}{(k+r)^{[r]}}L_k^r(\tau)d\tau =$$

$$\int_0^{\infty}\frac{f(t) - P_{r-1}(f)(t)}{t^r}e^{-\tau}t^r L_k^r(\tau)d\tau = h_k^r\hat{f}_{r,k}^r. \tag{56}$$

В силу (56) и того, что $h_k^r = (k+1)_r$, ряд (55) мы можем переписать так

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^r \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^r \hat{f}_{r,k}^r L_k^r(t)}{(k+1)_r} = P_{r-1}(f)(t) + t^r \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k}^r L_k^r(t).$$

С другой стороны, из равенств (19) и (33) следует, что $\hat{f}_{r,k}^r = g_k^r$. Таким образом, в случае $\gamma = 0$ ряд (46), который представляет собой ряд Фурье по полиномам $l_{r,k}^0(x)$, ортогональным по Соболеву, порожденным полиномами Лагерра $L_k^0(x)$, совпадает со специальным рядом (30).

5. Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра

Вернемся к вопросу об обращении преобразования Лапласа (24) посредством специального ряда (29), коэффициенты g_k^α которого могут быть найдены с помощью равенства (28). При этом следует отметить, что мы можем найти только конечное число коэффициентов g_k^α с $k = 0, 1, \ldots, N$, поэтому вместо искомого оригинала $f(t)$ (или, что то же, $f(t) - \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{t^\nu}{\nu!}$) мы получим его приближение

$$Y_N(t) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{t^\nu}{\nu!} + t^\alpha \sum\nolimits_{k=0}^{N} g_k^\alpha L_k^\alpha(t).$$

Отсюда возникает задача об исследовании величины $|f(t) - Y_N(t)|$. Более подробно эту задачу мы рассмотрим для частичных сумм более общего специального ряда, получающегося из обобщенного специального ряда (35) в случае $\beta = r$. Через $\mathcal{L}_n^\gamma(f) = \mathcal{L}_n^\gamma(f)(t)$ обозначим частичную сумму этого ряда вида

$$\mathcal{L}_n^\gamma(f)(t) = P_{r-1}(f) + t^r \sum_{k=0}^{n-r} \hat{f}_{r,k}^\gamma L_k^\gamma(t).$$

Заметим, что если $f(t) = q_n(t)$ представляет собой алгебраический полином степени n, то $\mathcal{L}_n^\gamma(q_n)(t) \equiv q_n(t)$ при $\gamma > -1$, другими словами, оператор $\mathcal{L}_n^\gamma(f)$ является проектором на подпространство H^n, состоящем из алгебраических полиномов степени n. Это свойство частичных сумм $\mathcal{L}_n^\gamma(f)(t)$ играет важную роль при решении задачи об оценке отклонения $\mathcal{L}_n^\gamma(f)(t)$ от исходной функции $f = f(t)$. Пусть $f(t)$ – непрерывная функция, заданная на полуоси $[0, \infty)$ и такая, что в точке $t = 0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, r-1)$. Кроме того будем считать, что для всех $k = 0, 1, \ldots$ существуют коэффициенты $\hat{f}_{r,k}^\gamma$, определяемые равенством (33) с $\beta = r$. Тогда мы можем определить специальный ряд (35) и его частичную сумму $\mathcal{L}_n^\gamma(f)(t)$. Рассмотрим задачу об оценке величины

$$R_{n,r}^\gamma(f)(t) = |f(t) - \mathcal{L}_n^\gamma(f)(t)| t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}}. \tag{57}$$

Весовой множитель $t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}$, фигурирующий в правой части равенства (57), связан с тем обстоятельством, что разность $|f(t) - \mathcal{L}_n^\gamma(f)(t)|$ стремится к нулю вместе с t со скоростью, не меньшей, чем $t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}$. Обозначим через $q_n(t)$ - алгебраический полином степени n, для которого

$$f^{(\nu)}(0) = q_n^{(\nu)}(0) \ (\nu = 0, 1, \ldots, r-1). \tag{58}$$

Тогда

$$f(t)-\mathcal{L}_n^\gamma(f)(t)=f(t)-q_n(t)+q_n(t)-\mathcal{L}_n^\gamma(f)(t)=$$

$$f(t)-q_n(t)+\mathcal{L}_n^\gamma(q_n-f)(t), \tag{59}$$

поэтому в силу (57) и (59)

$$|R_{n,r}(f)(t)|\leqslant |f(t)-q_n(t)|t^{-\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}+|\mathcal{L}_n^\gamma(q_n-f)(t)|t^{-\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}. \tag{60}$$

С другой стороны, в силу (58) $P_{r-1}(q_n-f)\equiv 0$, поэтому имеем

$$\mathcal{L}_n^\gamma(q_n-f)(t)=t^r\sum_{k=0}^{n-r}\widehat{(q_n-f)}_{r,k}L_k^\gamma(t)=$$

$$t^r\sum_{k=0}^{n-r}\frac{1}{h_k^\gamma}\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))\tau^{\gamma-r}e^{-\tau}L_k^\gamma(\tau)L_k^\gamma(t)d\tau.$$

Отсюда

$$e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac14}\mathcal{L}_n^\gamma(q_n-f)(t)=$$

$$e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{r}{2}+\frac14}\int\limits_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))e^{-\tau}\tau^{\gamma-r}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{L_k^\gamma(t)L_k^\gamma(\tau)}{h_k^\gamma}d\tau. \tag{61}$$

Положим

$$E_n^r(f)=\inf_{q_n}\sup_{t>0}|q_n(t)-f(t)|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac14}, \tag{62}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_n(t)$ степени n для которых $f^{(\nu)}(0)=q_n^{(\nu)}(0)$ $(\nu=0,\dots,r-1)$. Тогда из (61) находим

$$e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac14}|\mathcal{L}_n^\gamma(q_n-f)(t)|\leqslant E_n^r(f)\lambda_{r,n}^\gamma(t), \tag{63}$$

где

$$\lambda_{r,n}^\gamma(t)=t^{\frac{r}{2}+\frac14}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\gamma-\frac{r}{2}-\frac14}|\mathcal{K}_{n-r}^\gamma(t,\tau)|d\tau, \tag{64}$$

а ядро $\mathcal{K}_{n-r}^\gamma(t,\tau)$ определяется равенством (6). Из (60), (62) – (64) выводим следующее неравенство типа Лебега

$$|R_{n,r}^\gamma(f)(t)|\leqslant E_n^r(f)(1+\lambda_{r,n}^\gamma(t)). \tag{65}$$

В связи с неравенством (65) возникает задача об оценке функции Лебега $\lambda_{r,n}^\gamma(t)$, определяемой равенством (64). С этой целью мы введем следующие обозначения: $G_1=[0,\frac{3}{\theta_n}]$, $G_2=[\frac{3}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, $G_3=[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$, $G_4=[\frac{3\theta_n}{2},\infty]$. В работах [5] и [6], существенно используя весовые оценки (13), (15) и (16), были получены оценки для $\lambda_{r,n}^\gamma(t)$ при $t\in G_s$ $(s=1,2,3,4)$. А именно, доказана

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть* $1 \leqslant r$ *– целое,* $r-\frac{1}{2}<\gamma<r+\frac{1}{2}$, $\theta_n=4n+2\gamma+2$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $t \in G_1=[0,\frac{3}{\theta_n}]$, *то*

$$\lambda_{r,n}^{\gamma}(t) \leqslant c(\gamma,r)[\ln(n+1)+n^{\gamma-r}]; \tag{66}$$

2) если $t \in G_2=[\frac{3}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, *то*

$$\lambda_{r,n}^{\gamma}(t) \leqslant c(\gamma,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\gamma-r}{2}}\right]; \tag{67}$$

3) если $t \in G_3=[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$, *то*

$$\lambda_{r,n}^{\gamma}(t) \leqslant c(\gamma,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{t}{\theta_n^{1/3}+|t-\theta_n|}\right)^{1/4}\right]; \tag{68}$$

4) если $t \in G_4=[\frac{3\theta_n}{2},\infty)$, *то*

$$\lambda_{r,n}^{\gamma}(t) \leqslant c(\gamma,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}. \tag{69}$$

Список литературы

[1] Шарапудинов И.И. "Смешанные ряды по ортогональным полиномам": Издательство Дагестанского научного центра. 2004. С. 1–176. Махачкала.

[2] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. 2005. Т. 78, вып. 3. С. 442–465.

[3] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. 2006. Т. 197, вып. 3. С. 135–154.

[4] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Математические заметки. 2008. Т. 84, вып. 3. С. 452–471.

[5] Шарапудинов И.И. Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 58, вып. 2. С. 440–467.

[6] Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4. С. 31–73.

[7] Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Issue 2. Pp. 289–303.

[8] Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. Pp. 547—594.

[9] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. North-Holland. 1993. Vol. 48. Pp. 113 – 131.

[10] Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65. Pp. 151-175.

[11] Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.

[12] Marcellan F. Yuan Xu "ON SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS": arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014. Pp. 1–40.

[13] Lopez G., Marcellan F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11. Issue 1. Pp. 107–137.

[14] Сеге Г. "Ортогональные многочлены": Физматгиз. Москва. 1962.

[15] Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Mathem. 1965. Vol. 87. Pp. 698–708.

[16] Диткин В.А., Прудников А.П. "Операционное исчисление": Высшая школа. Москва. 1975.

[17] Крылов В.И., Скобля Н.С. "Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа": Наука. Москва. 1974.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН
Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию
26.09.2017