УДК 517.5

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

Об условиях выпуклости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам

Получены достаточные условия выпуклости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам.

Библиография: 10 названий.

Sufficient conditions for the convexity of splines for three-point rational interpolants are established.

Bibliography: 10 items.

Ключевые слова: интерполяционные сплайны, рациональные сплайны, выпуклая интерполяция.

Keywords: interpolation splines, rational splines, convex interpolation.

Введение

Вопросы выпуклой интерполяции для полиномиальных сплайнов в достаточно полной форме изучены в работах [1]–[4]. Эти вопросы рассмотрены также для рациональных сплайнов специальных видов, напр., в работах [5]–[7].

Ниже рассматривается вопрос о достаточных условиях на непрерывную на данном отрезке функцию и произвольную сетку попарно различных узлов на этом отрезке, которые обеспечивают выпуклость (вверх или вниз) соответствующего интерполяционного рационального сплайна, построенного по данной сетке узлов при помощи трехточечных рациональных интерполянтов ([8]).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана действительная функция $f(x)$ и произвольная сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 3$). Возьмем набор произвольных чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ таких, что $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$). Коэффициенты рациональной функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i} \quad (1)$$

определим из условий интерполяции

$$R_i(x_j) = f(x_j) \quad (j = i-1, i, i+1; i = 1, 2, \dots, N-1).$$

Тогда с использованием разделенных разностей первого порядка $f(x_{i-1}, x_i)$ и второго порядка $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ при $i = 1, 2, \dots, N-1$ получим

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Будем считать также, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

Для заданной функции $f(x)$, сетки узлов Δ и набора полюсов $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ рассмотрим на отрезке $[a, b]$ рациональный сплайн $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$, для которого при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) выполняется равенство

$$R_{N,1}(x) = R_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}. \quad (3)$$

Непрерывность сплайна $R_{N,1}(x)$ на отрезке $[a, b]$ вытекает из условий интерполяции на рациональные функции $R_i(x)$ из (1).

Ниже показана также непрерывная дифференцируемость $R_{N,1}(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Некоторые аппроксимативные свойства рациональных сплайнов $R_{N,1}(x)$ рассмотрены в работах [8]–[10]. Условия сохранения выпуклости (вверх или вниз) функции $f(x)$ сплайном $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ даются следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и строго выпукла вверх (вниз) на отрезке $[a, b]$, на котором задана произвольная сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 3$).

Если для разделенных разностей второго порядка выполнены неравенства

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)}{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})} < 2 \quad (4)$$

($i = 2, 3, \dots, N-1$), то существуют числа $g_- = g_-(f, \Delta) < a$ и $g_+ = g_+(f, \Delta)$ такие, что при всех $g_i < g_-$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) и при всех $g_i > g_+$ сплайн $R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ является выпуклой вверх (соответственно, вниз) функцией на отрезке $[a, b]$.

При доказательстве этого утверждения используется следующая

ЛЕММА 0.1. Пусть функция $f(x)$ принимает конечные значения в узлах данной сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 3$) и пусть при заданном $i = 2, 3, \dots, N-1$ для разделенных разностей второго порядка выполняется неравенство (4).

Тогда существуют числа $t_1 < x_{i-2}$ и $t_2 > x_{i+1}$ такие, что при $g_j < t_1$ ($j = i-1, i$) и при $g_j > t_2$ ($j = i-1, i$) сплайн $R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ в интервале (x_{i-1}, x_i) является выпуклой вверх (вниз) функцией, если значение $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ или $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$ отрицательно (соответственно, положительно).

1. Доказательство леммы

Рассмотрим для $j = i-1, i$ ($i = 2, 3, \dots, N-1$) рациональные интерполянты

$$R_j(x) = \alpha_j + \beta_j(x - x_j) + \gamma_j \frac{1}{x - g_j}$$

с условиями $R_j(x_k) = f(x_k)$ при $k = j-1, j, j+1$ и $g_j \notin [x_{i-2}, x_{i+1}]$.

Тогда при $x \in (x_{j-1}, x_{j+1})$ выполняются равенства

$$R'_j(x) = \beta_j - \gamma_j \frac{1}{(x - g_j)^2}, \quad R''_j(x) = 2\gamma_j \frac{1}{(x - g_j)^3}. \quad (5)$$

При $x \in [x_{i-1}, x_i]$ рассмотрим сплайн $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ вида (3), для которого при любом $x \in (x_{i-1}, x_i)$ имеем

$$R''_{N,1} = R''_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R''_{i-1}(x) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \frac{2}{x_i - x_{i-1}} [R'_i(x) - R'_{i-1}(x)].$$

Отсюда и из равенств (5) получим

$$R''_{N,1}(x) = \left[-\gamma_i \frac{x_{i-1} - g_i}{(x - g_i)^3} + \gamma_{i-1} \frac{x_i - g_{i-1}}{(x - g_{i-1})^3} + \beta_i - \beta_{i-1} \right] \frac{2}{x_i - x_{i-1}}.$$

Подставляя в правую часть значения коэффициентов γ_j и β_j ($j = i - 1, i$) из (2) и преобразуя полученное выражение, имеем

$$\begin{aligned} R''_{N,1}(x) = & \{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i)[(x - g_i)^3 - (x_{i-1} - g_i)^2(x_{i+1} - g_i)](x - g_i)^{-3} - \\ & - f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)(x_{i-1} - g_{i-1})[(x - g_{i-1})^3 - (x_{i-2} - g_{i-1})(x_i - g_{i-1})^2](x - g_{i-1})^{-3} + \\ & + f(x_{i-1}, x_{i+1}) - f(x_{i-2}, x_i)\} \frac{2}{x_i - x_{i-1}}. \end{aligned}$$

Если перейти в этом равенстве к пределу при $|g_j| \rightarrow +\infty$ ($j = i - 1, i; x \in (x_{i-1}, x_i)$), то (в пределе правой части) получим линейную функцию

$$\begin{aligned} P_i(x) = & [f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(3x - x_{i+1} - 2x_{i-1}) + f(x_{i-1}, x_{i+1}) - \\ & - f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)(3x - x_{i-2} - 2x_i) - f(x_{i-2}, x_i)] \frac{2}{x_i - x_{i-1}}. \end{aligned}$$

Найдем значения $P_i(x)$ на концах промежутка $[x_{i-1}, x_i]$ и преобразуем их с использованием свойств разделенных разностей. Тогда соответственно получим

$$\begin{aligned} P_i(x_{i-1}) = & \{-f(x_i, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i) + f(x_{i-1}, x_{i+1}) - f(x_{i-2}, x_i) + \\ & + f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)[2(x_i - x_{i-1}) - (x_{i-1} - x_{i-2})]\} \frac{2}{x_i - x_{i-1}} = \\ & = -2f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + 4f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i), \\ P_i(x_i) = & \{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})[2(x_i - x_{i-1}) - (x_{i+1} - x_i)] - \\ & - f(x_{i-1}, x_i) + f(x_{i-2}, x_{i-1}) + f(x_{i-1}, x_{i+1}) - f(x_{i-2}, x_i)\} \frac{2}{x_i - x_{i-1}} = \\ & = 4f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) - 2f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

Ясно, что произведение $P_i(x_{i-1})P_i(x_i) > 0$ тогда и только тогда, когда значения

$$\frac{f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)}{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})}, \quad \frac{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})}{f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)}$$

принадлежат интервалу $(\frac{1}{2}, 2)$.

Значит, в случае принадлежности одного из этих значений интервалу $(\frac{1}{2}, 2)$ (другой также будет принадлежать ему) найдутся числа $t_1 < x_{i-2}$ и $t_2 > x_{i+1}$ такие, что для всех значений g_{i-1} и g_i , удовлетворяющих неравенству $g_j < t_1$ ($j = i-1, i$) или неравенству $g_j > t_2$ ($j = i-1, i$), функция $R''_{N,1}(x)$ на интервале (x_{i-1}, x_i) принимает значения одного и того же знака, совпадающего со знаком $P_i(x)$ на этом интервале.

Следовательно, в этом случае сам сплайн $R_{N,1}(x)$ на интервале (x_{i-1}, x_i) является выпуклой вверх функцией, когда значение $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ или $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$ отрицательно, и является выпуклой вниз функцией, когда значение $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ или $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$ положительно.

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и строго выпукла вверх на отрезке $[a, b]$ (случай выпуклости вниз рассматривается вполне аналогично). Тогда для произвольно заданной сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 3$) при любом $i = 1, 2, \dots, N-1$ для разделенной разности второго порядка функции $f(x)$ выполняется неравенство $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) < 0$.

В силу условия (4) по лемме найдутся числа $g_- = g_-(f, \Delta) < a$ и $g_+ = g_+(f, \Delta) > b$ такие, что для $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ с $g_i < g_-$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) и с $g_i > g_+$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) сплайн $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ является выпуклой вверх функцией на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) ($i = 2, 3, \dots, N-1$).

Выпуклость вверх сплайна $R_{N,1}(x)$ на промежутках $[x_0, x_1]$ и $[x_{N-1}, x_N]$ вытекает соответственно из тождеств $R_{N,1} \equiv R_1(x)$ и $R_{N,1}(x) \equiv R_{N-1}(x)$ на них и выпуклости вверх интерполянтов $R_j(x)$ на $[x_{j-1}, x_{j+1}]$.

Дело в том, что при $x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$ в силу неравенства $f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) < 0$ имеем

$$R''_j(x) = 2f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \frac{(x_{j-1} - g_j)(x_j - g_j)(x_{j+1} - g_j)}{(x - g_j)^3} < 0$$

для всех $j = 1, 2, \dots, N-1$.

Заметим также, что сплайн $R_{N,1}(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и в узлах x_j ($j = 1, 2, \dots, N-1$).

Действительно, при $x \in [x_{j-1}, x_j]$ и $x \in [x_j, x_{j+1}]$ соответственно выполняются равенства

$$R_{N,1}(x) = R_j(x) + [R_{j-1}(x) - R_j(x)] \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}},$$

$$R_{N,1}(x) = R_j(x) + [R_{j+1}(x) - R_j(x)] \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j},$$

а поэтому при $x \in (x_{j-1}, x_j)$ и $x \in (x_j, x_{j+1})$ соответственно имеем

$$R'_{N,1}(x) = R'_j(x) + [R'_{j-1}(x) - R'_j(x)] \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} - [R_{j-1}(x) - R_j(x)],$$

$$R'_{N,1}(x) = R'_j(x) + [R'_{j+1}(x) - R'_j(x)] \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} + [R_{j+1}(x) - R_j(x)].$$

Здесь при $x \rightarrow x_j$ получим

$$R_{j-1}(x) - R_j(x) \rightarrow R_{j-1}(x_j) - R_j(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0,$$

$$R_{j+1}(x) - R_j(x) \rightarrow R_{j+1}(x_j) - R_j(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0.$$

Тогда ясно, что

$$R'_{N,1}(x_j - 0) = R'_j(x_j) \quad \text{и} \quad R'_{N,1}(x_j + 0) = R'_j(x_j).$$

В силу непрерывной дифференцируемости сплайна $R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ на всем отрезке $[a, b]$ и его выпуклости вверх на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) ($i = 1, 2, \dots, N$) этот сплайн будет выпуклой вверх функцией на $[a, b]$.

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Miroshnichenko V.L. Convex and monotone spline interpolation // Constructive Theory of Function: Proc. Int. Conf. (Varna, 1984). Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci. 1984. Pp. 610–620.
- [2] Мирошниченко В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов // Вычислительные системы: сб. ст. ИМ СО АН СССР. 1991. Вып. 142: Сплаины и их приложения. Новосибирск. С. 3–14.
- [3] Волков Ю.С., Богданов В.В., Мирошниченко В.Л., Шевалдин В.Т. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами // Матем. заметки. 2010. Том 88, вып. 6. С. 836–844.
- [4] Волков Ю.С., Шевалдин В.Т. Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Том 18, вып. 4. С. 145–152.
- [5] Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7. Issue 2. Academic Press. Inc. Pp. 281–292.
- [6] Hussain M.Z., Sarfraz M., Shaikh T.S. Shape preserving rational cubic spline for positive and convex data // Egyptian Informatics Journal. 2011. Vol. 12. Pp. 231–236.
- [7] Edeoa A., Gofeb G., Tefera T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. 2015. Vol. 12. Issue 1. Pp. 110–122.
- [8] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплаины по рациональным интерполянтам // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Вып. 4. С. 22–31.
- [9] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Том 23, вып. 3. С. 224–233.
- [10] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплаины по трехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. 2017. Вып. 54. Казань: Казанское матем. общество. С. 304–306.

А.-Р.К. Рамазанов (A.-R. K. Ramazanov)

Дагестанский государственный университет, Дагестанский
научный центр РАН

E-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила в редакцию

17.10.2017

В.Г. Магомедова (V. G. Magomedova)

Дагестанский государственный университет

E-mail: vazipat@rambler.ru