УДК 517.946

Ф. М.-С. Насрулаев

Многогранные поверхностные полосы и некоторые их применения

Целью настоящей заметки является применение результатов работы [1] к исследованию свойств замкнутой геодезической ломаной, лежащей на полной многогранной седловой поверхности с так называемым взаимно однозначным сферическим изображением (многогранная поверхность класса $\mathcal{E}$).

Библиография: 2 названия.

The purpose of this note is to apply the results of work [1] to investigating the properties of a closed geodesic polygon lying on a complete polyhedral saddle surface with a so-called one-to-one spherical image (polyhedron surface of class $\mathcal{E}$).

Bibliography: 2 items.

Ключевые слова: многогранные поверхности, сферическое изображение.

Keywords: polyhedral surfaces, spherical image.

I. Понятие многогранной поверхностной полосы было введено в совместной нашей работе с А.Л. Вернером [1]. Под многогранной поверхностной полосой P будем понимать конечное число $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ плоских углов и плоских полос между параллельными прямыми $l_i^{'}$ и $l_i^{''}$, $i = \overline{1, m}$ (плоскость грани Γ_i обозначим через Q_i, единичный вектор нормали плоскости Q_i — через $\overline{n}_i$), удовлетворяющих следующим условиям:

1) Для всех $i = 1, \ldots, m-1$ лучи $l_i^{''}$ и $l_{i+1}^{'}$ имеют общий отрезок;
2) Ориентации граней Γ_{i-1} и Γ_i, определенные соответственно нормалями $\overline{n}_{i-1}$ и $\overline{n}_i$, согласованы;
3) Если плоскости Q_{i-1} и Q_i совпадают, $\overline{n}_{i-1} = -\overline{n}_i$.

Если при этом окажется, что $l_m^{''}$ и $l_i^{'}$ имеют общий отрезок и ориентации граней Γ_m и Γ_i согласованы, то полосу P называем замкнутой. Прямую, на которой лежат $l_{i-1}^{'}$ и $l_i^{''}$ обозначим l_i и назовем ребром полосы P.

Пусть P — замкнутая многогранная полоса, S — единичная сфера с центром в точке 0, ориентированную выбором внешней нормали. Сферическое изображение P^* полосы P строим следующим образом: будем поворачивать плоскость $Q_{i-1} \supset \Gamma_{i-1}$ до совпадения с плоскостью $Q_i \supset \Gamma_i$ вокруг ребра l_i так, чтобы она все время оставалась опорной к двугранному углу, образованному гранями Γ_{i-1} и Γ_i. При этом единичная нормаль вращаемой плоскости начертит на S звено $B_{i-1}B_i$. Очевидно, звено $B_{i-1}B_i$ будет кратчайшей на S, соединяющей точки B_{i-1} и B_i (соответственно концы нормалей $\overline{n}_{i-1}$ и $\overline{n}_i$, отложенных из точки 0). Направление движения от плоскости Q_{i-1} к плоскости Q_i далее определяет единичным вектором $\overline{e}_i$, лежащим на прямой l_i и образующим с рассматриваемым вращением правый винт. Точки B_i определят на S замкнутую ломаную P^* — сферическое изображение полосы P.

Обходу полосы P в направлении возрастания индексов ее граней соответствует на P^* обход, при котором монотонно возрастают индексы вершин ломаной P^*. Этот обход на P^* назовем правильным. Поскольку сфера S ориентирована, то при правильном обходе ломаной P^* можно говорить о правой и левой сторонах вдоль P^* на S.

Пусть β_i — углы слева в вершинах B_i ломаной P^*. Левым поворотом $\tau_{\text{л}}(B_i)$ ломаной P^* в вершине B_i назовем разность $\pi - \beta_i$, или же — это угол между продолжением $\tilde{\lambda}_i$ звена $\lambda_i = B_{i-1}B_i$ и звеном $\lambda_{i+1} = B_i B_{i+1}$, взятый со знаком плюс, если кратчайшее вращение $\tilde{\lambda}_i$ до λ_{i+1} идет в положительном направлении, и со знаком минус – если в противоположном. Левым поворотом ломаной P^* называем величину

$$\tau_{\text{л}}(P^*) = \sum_{i=1}^{m} \tau_{\text{л}}^*(B_i).$$

Определим поворот самой полосы P. В каждой плоскости Q_i нормаль $\overline{n}_i$ задает положительное направление вращения, с которым $\overline{n}_i$ образует правый винт. Поворотом $\tau(\Gamma_i)$ грани Γ_i называем величину плоского угла этой грани со знаком плюс, если вращение от l_i' к l_i'' внутри Γ_i идет в положительном направлении, и со знаком минус, если это вращение в противоположном направлении; если l_i' и l_i'' — параллельны, то полагаем $\tau(\Gamma_i) = 0$.

Поворотом полосы P слева называем величину

$$\tau_{\text{л}}(P) = \sum_{i=1}^{m} \tau(\Gamma_i).$$

Правый поворот полосы P определяем равенством

$$\tau_{\text{п}}(P) = -\tau_{\text{л}}(P).$$

Целесообразность введения понятий $\tau_{\text{л}}(P)$ и $\tau_{\text{п}}(P)$ показывает следующая

Лемма 1. *Пусть L — простая замкнутая ломаная на P, пересекающая каждое ребро полосы P ровно в одной точке. Тогда*

$$\tau_{\text{л}}(P) = \tau_{\text{л}}(L),$$

где $\tau_{\text{л}}(L)$ — левый поворот ломаной L на P, и обходы L и P идут в одном направлении.

Грань Γ_i многогранной полосы P назовем гранью выпуклости, если соседние с ней грани Γ_{i-1} и Γ_{i+1} лежат по одну сторону от плоскости Q_i грани Γ_i; грань Γ_i называем гранью перегиба, если грани Γ_{i-1} и Γ_{i+1} лежат по разные стороны от плоскости Q_i. Если у грани Γ_i ее поворот $\tau(\Gamma_i) > 0$, то называем грань Γ_i гранью первого типа, а если $\tau(\Gamma_i) > 0$, то гранью второго типа.

Теорема 1. *Пусть P — замкнутая многогранная полоса, ломаная P^* — ее сферическое изображение на S. Тогда*

$$\tau_л(P^*) = \tau_л(P) + 2\pi k,$$

причем

$$k = \frac{k_2 - k_1}{2} - k_3 + k_4$$

где k_1 — число граней перегиба первого типа, k_2 — число граней перегиба второго рода, k_3 — число невыпуклых граней выпуклости первого типа, k_4 — число невыпуклых граней выпуклости второго типа.

Поскольку число граней перегиба $k_1 + k_2$ замкнутой многогранной полосы четно, то число $(k_2 - k_1)/2$ целое, а потому и число k — целое. Очевидно, что для правых поворотов имеем равенство

$$\tau_п(P^*) = \tau_п(P) - 2\pi k.$$

II. Пусть простая замкнутая ломаная $L \subset \mathcal{F}$ проходит через вершины $A_1, A_2, \ldots, A_m$ поверхности $\mathcal{F}$. Тогда сферическое изображение L^* ломаной L на сфере S будет, вообще говоря, некоторой областью, ограниченной кривыми $L_л^*$ и $L_п^*$, являющимися сферическими изображениями соответственно ломаных $L_л$ и $L_п$, лежащих на поверхности $\mathcal{F}$. Опишем построение ломаных $L_л$ и $L_п$.

Как и прежде обход, соответствующий возрастанию индексов вершин $A_1, A_2, \ldots, A_m$ на L, будем называть правильным. Пусть к вершине $A_i \in L$ подходят на $\mathcal{F}$ ребра l_{i-1} и l_i ломаной L. Окрестность точки A_i на поверхности $\mathcal{F}$ отрезки l_{i-1} и l_i разбивают на два сектора $T_л$ и $T_п$. Возьмем точки $Y_{i-1} \in l_{i-1}$ и $X_i \in l_i$, близкие к A_i, и построим ломаные $\gamma_л^i$ и $\gamma_п^i$ с концами в точках Y_{i-1} и X_i такие, что $\gamma_л^i \subset T_л$, $\gamma_л^i \subset T_п$ и ломаные $\gamma_л^i$ и $\gamma_п^i$ пересекают лишь ребра поверхности $A_1, A_2, \ldots, A_m$, исходящие из точки A_i, причем по одному разу. Так поступаем в каждой вершине $A_i \in L$. Некоторые звенья l_i ломаной L могут совпадать с ребрами поверхности $\mathcal{F}$. Пусть l_j — такое ребро, а $\mathcal{F}_j'$ и $\mathcal{F}_j''$ грани поверхности $\mathcal{F}$, лежащие соответственно слева и справа от звена l_j. Тогда на уже построенных ломаных $\gamma_л^j$ и $\gamma_л^{j+1}$ возьмем точки $X_j' \in \Gamma_j' \cap \gamma_л^j$ и $Y_j' \in \Gamma_j' \cap \gamma_л^{j+1}$ настолько близкие к X_j и Y_j, что соединяющий их отрезок $l_л^j \subset \Gamma_j'$. Аналогично строим отрезок $l_п^j \subset \Gamma_j''$.

Заменим дуги $Y_{i-1}A_iX_i$ ломаной L ломаными $\gamma_л^i$ $(\gamma_п^i)$, а те отрезки X_j, Y_j, которые лежат на ребрах поверхности $\mathcal{F}$ отрезками $l_л^j$ $(l_п^j)$. Получим ломаные $L_л^j$ и $L_п^j$, первая из которых проходит не правее, а вторая – не левее ломаной L, причем ломаные $L_л$ и $L_п$ не проходят через вершины на $\mathcal{F}$, их звенья не идут по ребрам поверхности $\mathcal{F}$ и между $L_л$ и $L_п$, а также $L_п$ и L нет вершин поверхности $\mathcal{F}$. По построению, сферические изображения $L_л^*$ и $L_п^*$ соответственно ломаных $L_л$ и $L_п$, ограничивают сферические изображения L^* ломаной L.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{F}$ многогранная седловая поверхность класса $\mathcal{E}$, L — простая замкнутая ломаная на $\mathcal{F}$, а $L_л$, $L_п$ и $L_л^*$, $L_п^*$ имеют указанный выше смысл. Тогда при обходе кривой $L_л^*$ $(L_п^*)$, индуцированным правильным обходом ломаной L, множество L^* лежит не левее (не правее) $L_п^*$ $(L_л^*)$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{L}^i_{\text{л}} = \gamma^i_{\text{л}} \cup l^i_{\text{л}} \cup l^{i-1}_{\text{л}}$ и $\tilde{L}^i_{\text{п}} = \gamma^i_{\text{п}} \cup l^i_{\text{п}} \cup l^{i-1}_{\text{п}}$. Возьмем на $\tilde{L}^i_{\text{л}}$ $(\tilde{L}^i_{\text{п}})$ две различные точки $Z^{i-1}_{\text{л}}$ $(Z^{i-1}_{\text{п}}) \in l^{i-1}_{\text{л}}$ $(l^{i-1}_{\text{п}})$ и $Z^i_{\text{л}}$ $(Z^i_{\text{п}}) \in l^i_{\text{л}}$ $(l^i_{\text{п}})$. Ломаную, соединяющую точки $Z^{i-1}_{\text{л}}$ $(Z^i_{\text{л}})$ и $Z^{i-1}_{\text{п}}$ $(Z^i_{\text{п}})$, и пересекающую ребро l_{i-1} (l_i) лишь в одной внутренней точке, обозначим через R_{i-1} (R_i), а ломаную $Z^{i-1}_{\text{л}} Z^i_{\text{л}}$ $(Z^{i-1}_{\text{п}} Z^i_{\text{п}})$, принадлежащую $\tilde{L}^i_{\text{л}}$ $(\tilde{L}^i_{\text{п}})$ — через $L^i_{\text{л}}$ $(L^i_{\text{п}})$. Область $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, содержащую единственную вершину A_i и ограниченную ломаной $L_i = L^i_{\text{л}} \cap L^i_{\text{п}} \cap R_{i-1} \cap R_i$ назовем зоной вершины A_i. Разобьем указанным способом всю область между ломаными $L_{\text{л}}$ и $L_{\text{п}}$ на зоны, содержащие лишь по одной вершине. Тогда утверждение леммы достаточно доказать хотя бы для одной зоны $\mathcal{F}_i$. Далее доказательство леммы следует из теоремы 5 работы [2] А.Л.Вернера.

Поскольку L — простая замкнутая ломаная на поверхности $\mathcal{F}$, то, по построению, замкнутые ломаные $L_{\text{л}}$ и $L_{\text{п}}$ также — простые. А так как между L и $L_{\text{л}}$, L и $L_{\text{п}}$ нет вершин поверхности $\mathcal{F}$, то из леммы 1 следует:

$$\tau_{\text{л}}(L) = \tau_{\text{л}}(L_{\text{л}}) \quad \text{и} \quad \tau_{\text{п}}(L) = \tau_{\text{п}}(L_{\text{л}}). \tag{1}$$

Далее, из теоремы 1 имеем:

$$\tau_{\text{л}}(L_{\text{л}}) = \tau_{\text{л}}(L_{\text{л}}) + 2\pi k_1, \tag{2}$$

$$\tau_{\text{п}}(L^*_{\text{п}}) = \tau_{\text{п}}(L_{\text{п}}) - 2\pi k_2. \tag{3}$$

Мы утверждаем, что в формулах (2) и (3) числа $k_1 = k_2$. Идея доказательства состоит в том, чтобы получить ломаную $L_{\text{п}}$ из ломаной $L_{\text{л}}$ последовательно заменяя ломаные $\gamma^i_{\text{л}}$ ломаными $\gamma^i_{\text{п}}$, т.е. последовательно «перетягивая» ломаную $L_{\text{л}}$ через вершины на L. Пусть эта замена сделана в одной вершине $A_i \in L$. Полученную при этом из $L_{\text{л}}$ новую ломаную обозначим $\tilde{L}$, а ее сферическое изображение $\tilde{L}^*$. Пусть G' — замкнутая область на сфере S, лежащая правее ломаной $L^*_{\text{л}}$, а G'' — замкнутая область на S, лежащая правее ломаной $\tilde{L}^*$ (имеются ввиду обходы $L^*_{\text{л}}$ и $\tilde{L}^*$, индуцированные положительным обходом ломаной L), а D_i – замыкание сферического изображения вершины $A_i \in L$. Тогда

$$\delta(G'') = \delta(G') + \delta(D_i), \tag{4}$$

где $\delta(M)$ – площадь множества $M \subset S$. По теореме Гаусса-Бонне имеем:

$$2\pi - \tau_{\text{л}}(L^*_{\text{л}}) = 4\pi - \delta(G') \quad \text{и} \quad 2\pi - \tau_{\text{п}}(\tilde{L}^*) = \delta(G'') \tag{5}$$

Складывая равенства (5) и учитывая (4), получим

$$\tau_{\text{л}}(L^*_{\text{л}}) + \tau_{\text{п}}(\tilde{L}^*) = \delta(D_i). \tag{6}$$

С другой стороны, для поворотов ломаных $L_{\text{л}}$ и $\tilde{L}$ на $\mathcal{F}$ имеем:

$$\tau_{\text{л}}(L_{\text{л}}) + \tau_{\text{п}}(\tilde{L}) = \omega(A_i). \tag{7}$$

Так как $\omega(A_i) = -\delta(D_i)$ (см.[2]), то из (6), (7) и (2) следует, что

$$\tau_{\text{п}}(\tilde{L}^*) = \tau_{\text{п}}(\tilde{L}) - 2\pi k_1, \tag{8}$$

Т.е. при «перетягивании» через одну вершину значение k_1 не изменилось. Последовательно продолжая этот процесс приходим к выводу: $k_2 = k_1$.

Переходим теперь к основному утверждению: **если L — замкнутая геодезическая на полной многогранной поверхности класса $\mathcal{E}$, то в формулах (2) и (3)**

$$k_1 = k_2 = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $G_{\text{л}}$ ($G_{\text{п}}$) — область на S, лежащая левее (правее) $L^*_{\text{л}}$ ($L^*_{\text{п}}$) при обходах на них, индуцированных правильным обходом замкнутой геодезической ломаной L. Тогда

$$0 \leqslant \delta(G_{\text{л}}) \leqslant 4\pi, \quad 0 \leqslant \tau(G_{\text{п}}) \leqslant 4\pi. \tag{10}$$

По теореме Гаусса-Бонне

$$\delta(G_{\text{л}}) = 2\pi - \tau_{\text{л}}(L^*_{\text{л}}); \quad \delta(G_{\text{п}}) = 2\pi - \tau_{\text{п}}(L^*_{\text{п}}) \tag{11}$$

Из равенств (1), (2) и (3), в которых $k_2 = k_1 = k$, и из (10) и (11), имеем:

$$2\pi - \tau_{\text{л}}(L) - 2\pi k \leqslant 4\pi \quad \text{и} \quad 2\pi - \tau_{\text{п}}(L) + 2\pi k \leqslant 4\pi. \tag{12}$$

Так как L — геодезическая ломаная, то $\tau_{\text{л}} \leqslant 0$ и $\tau_{\text{п}} \leqslant 0$. Поэтому из (12) следует, что

$$0 \leqslant -\tau_{\text{л}}(L) \leqslant 2\pi(1+k) \quad \text{и} \quad 0 \leqslant -\tau_{\text{п}}(L) \leqslant 2\pi(1-k), \tag{13}$$

т. е.

$$-1 \leqslant k \leqslant 1. \tag{14}$$

Для доказательства нашего утверждения (9) достаточно показать, что в соотношении (14) с обеих сторон имеет место строгое неравенство. Допустим противное. Пусть, например, $k = -1$. Тогда из соотношений (10)–(13) следует, что $\tau_{\text{л}}(L) = 0$, и $\delta(G) = 4\pi$ Это значит, что на части $\mathcal{F}_{\text{л}}$ поверхности $\mathcal{F}$, лежащей левее L, нет ни одной вершины, и ее кривизна $\omega(\mathcal{F}_{\text{л}}) = 0$. Следовательно, поверхность $\mathcal{F}_{\text{л}}$ — цилиндрическая, и потому ее сферическое изображение $\mathcal{F}^*_{\text{л}}$ содержит экватор на S, перпендикулярный образующей (ребру) на $\mathcal{F}_{\text{л}}$. Тогда по каждую сторону от $L^*_{\text{л}}$ на S лежат области, площади которых равны 2π. Это противоречит следствию из нашего допущения, что $\delta(G_{\text{л}}) = 4\pi$. Аналогично исключается и случай, когда $k = +1$. Учитывая, что в (14) k – целое число, имеем $k = 0$.

Список литературы

[1] Вернер А.Л., Насрулаев Ф.С. Многогранные полосы и топологическое строение гиперболических многогранных поверхностей со взаимно однозначным сферическим изображением // Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. 1967. Вып. 328.

[2] Вернер А.Л. Многогранные углы со взаимно однозначным сферическим изображением // Матем. сборник. 1966. Т. 71, Вып. 2. С. 261–286.

Ф. М.-С. Насрулаев (F. M.-S. Nasrulaev)
Дагестанский государственный университет
E-mail: saytarvi@gmail.com

Поступила в редакцию
17.11.2017