УДК 517.538

И. И. Шарапудинов, Т. Н. Шах-Эмиров

Сходимость рядов Фурье по полиномам Якоби в весовом пространстве Лебега с переменным показателем

Рассмотрена задача о базисности системы полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ в весовом пространстве Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $\mu = \mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. В случае $\alpha, \beta > -1/2$ показано, что если переменный показатель $p = p(x)$ удовлетворяет на $[-1, 1]$ некоторым естественным условиям, то ортонормированная система полиномов Якоби $p_n^{\alpha,\beta}(x) = (h_n^{\alpha,\beta})^{-\frac{1}{2}} P_n^{\alpha,\beta}(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) является базисом в $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ при $4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$, $4\frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1}$.

Библиография: 32 названия.

The problem of basis property of the Jacobi polynomials system $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ in the weighted Lebesgue space $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ with variable exponent $p(x)$ and $\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ is considered. It is shown that if $\alpha, \beta > -1/2$ and $p(x)$ satisfies on $[-1, 1]$ some natural conditions then the orthonormal Jacobi polynomials system $p_n^{\alpha,\beta}(x) = (h_n^{\alpha,\beta})^{-\frac{1}{2}} P_n^{\alpha,\beta}(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) is a basis of $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ as $4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$, $4\frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1}$.

Bibliography: 32 items.

Ключевые слова: базисность полиномов Якоби, суммы Фурье-Якоби, сходимость в весовом пространстве Лебега с переменным показателем, условие Дини-Липшица.

Keywords: basis property of the Jacobi polynomials, Fourier-Jacobi sums, convergence in the weighted Lebesgue space with variable exponent, Dini-Lipshits condition.

Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследования, связанные с задачей о сходимости рядов Фурье-Якоби в пространствах Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ с переменным показателем $p(x)$, начатые в работе [1], в которой рассмотрена задача о сходимости в весовом пространстве Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ с весом $\mu(x) = (1-x^2)^\alpha$ сумм Фурье по ультрасферическим полиномам Якоби $p_n^{\alpha,\alpha}(x) = (h_n^{\alpha,\alpha})^{-\frac{1}{2}} P_n^{\alpha,\alpha}(x)$ ($n=0, 1, \dots$), ортонормированных с весом $\mu(x) = (1-x^2)^\alpha$. В настоящей статье мы обобщаем результаты, полученные в [1] на случай, когда вес имеет вид $\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, где $\alpha, \beta > -1/2$. Будет рассмотрена задача о базисности системы полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ в весовом пространстве Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $\mu = \mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. В случае $\alpha, \beta > -1/2$ будет показано, что если переменный показатель $p = p(x)$

подчинен на $[-1, 1]$ некоторым естественным условиям, то ортонормированная система полиномов Якоби $p_n^{\alpha, \beta}(x) = (h_n^{\alpha, \beta})^{-\frac{1}{2}} P_n^{\alpha, \beta}(x)$ ($n=0, 1, \dots$) является базисом в $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$, если $4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$, $4\frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1}$. При этом отметим, что если это условие нарушено, то система полиномов Якоби, как это показано в работах [6] и [7], не является базисом пространства $L_\mu^p([-1, 1])$ даже для постоянного показателя p . Полученный нами результат представляет собой обобщение на пространства Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ с переменным показателем $p(x)$ хорошо известных свойств сумм Фурье-Якоби, установленных в работах [3] – [7] для весовых пространств Лебега $L_\mu^p([-1, 1])$ с постоянным показателем p , для которого $4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$. Отметим также работу [8], в которой аналогичная проблема рассмотрена в пространстве Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ с переменным показателем $p(x)$ в случае, когда $\alpha = \beta = 0$ и, следовательно, $\mu(x) \equiv 1$ (случай полиномов Лежандра).

1. Некоторые сведения о пространстве Лебега с переменным показателем

Нам понадобится ряд свойств этих пространств, которые мы напомним в этом параграфе. Пусть E произвольное множество, на котором задана мера Лебега m , $p = p(x)$ – неотрицательная m – измеримая функция, заданная на E . Через $L_m^{p(x)}(E)$ обозначим пространство m -измеримых функций $f = f(x)$, заданных на E , для которых конечен интеграл Лебега $\int_E |f(x)|^{p(x)} m(dx)$. Если $p = p(x)$ существенно ограничена на E , то, как показано в [2], $L_m^{p(x)}(E)$ является линейным топологическим пространством, в котором при дополнительном условии $1 \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$ можно ввести норму

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} m(dx) \leq 1\}, \quad (1)$$

которая превращает $L_m^{p(x)}(E)$ в банахово пространство. Если $E \in \mathbb{R}^n$, $m(dx) = w(x)dx$, мы будем писать $L_w^{p(x)}(E)$ вместо $L_m^{p(x)}(E)$ и называть $L_w^{p(x)}(E)$ весовым пространством Лебега с переменным показателем $p(x)$ и весом $w = w(x)$. Если к тому же $w(x) \equiv 1$, то будем писать $L^{p(x)}(E)$ вместо $L_1^{p(x)}(E)$.

Если $1 < p(x) < \infty$, то можно определить новый переменный показатель $p'(x) = p(x)/(p(x) - 1)$ и ввести соответствующее пространство $L_m^{p'(x)}(E)$. В работе [2] было показано, что если $1 < p(x) \leq \bar{p}(E) < \infty$, то пространство $(L_m^{p(x)}(E))'$, состоящее из непрерывных линейных функционалов F , заданных в $L_m^{p(x)}(E)$, совпадает с линейной оболочкой пространства $L_m^{p'(x)}(E)$ в том смысле, что произвольный элемент $F \in (L_m^{p(x)}(E))'$ имеет вид

$$F(f) = \int_E f(x)g(x)m(dx), \quad \frac{g}{\alpha} \in L_m^{p'(x)}(E), \quad \alpha \neq 0. \quad (2)$$

В частности, если $1 < \underline{p}(E) \leq p(x) \leq \bar{p}(E) \leq \infty$, то и p' обладает этим свойством и поэтому $(L_m^{p(x)}(E))' = L_m^{p'(x)}(E)$ и, как следствие, пространство $L_m^{p(x)}(E)$

рефлексивно. Этот результат позволяет ввести в $L_m^{p(x)}(E)$ другие нормы, эквивалентные исходной норме $\|f\|_{p(\cdot)}(E)$ (см. (1)). Итак, пусть $1 < \underline{p}(E) \leq p(x) \leq \bar{p}(E) < \infty$, тогда сопряженная функция $p'(x) = p(x)/(p(x) - 1)$ обладает, как уже отмечалось, такими же свойствами, т.е. $1 < \underline{p}'(E) \leq p'(x) \leq \bar{p}'(E) < \infty$, поэтому мы можем ввести в рассмотрение следующую норму для $f \in L_m^{p(x)}(E)$:

$$\|f\|_{p(\cdot)}^*(E) = \sup_{\substack{g \in L_m^{p'(\cdot)}(E), \\ \|g\|_{p'(\cdot)}(E) \leq 1}} \int_E f(x)g(x)m(dx), \quad (3)$$

для которой имеет место (см. [12]) неравенство

$$\|f\|_{p(\cdot)}^*(E) \leq 2\|f\|_{p(\cdot)}(E). \quad (4)$$

Пусть p и q два переменных показателя, заданных на E , для которых $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q}(E) < \infty$. Тогда для $f \in L_m^{q(x)}(E)$ имеет место [11] – [13] неравенство

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) \leq c(p, q)\|f\|_{q(\cdot)}(E), \quad (5)$$

где здесь и всюду в дальнейшем через $c, c(p), c(p, q), \dots$ обозначаются положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров.

Далее, пусть E_1 и E_2 два измеримых множества с соответствующими мерами Лебега m_1 и m_2 , причем $m_i(E_i) < \infty, i = 1, 2$. Пусть $f = f(x, t)$ – измеримая функция, заданная на декартовом произведении $E_1 \times E_2$. Тогда имеет место [11] – [13] неравенство

$$\left\| \int_{E_2} f(\cdot, t)m_2(dt) \right\|_{p(\cdot)}(E_1) \leq 2 \int_{E_2} \|f(\cdot, t)\|_{p(\cdot)}(E_1)m_2(dt). \quad (6)$$

2. Условие Дини-Липшица и его следствия

В работе [9] на примере системы Хаара впервые был рассмотрен вопрос о сходимости в пространстве $L^{p(x)}([0, 1])$ сумм Фурье по ортонормированным системам функций. В связи с этой задачей в [9] было показано, что для базисности в $L^{p(x)}([0, 1])$ системы Хаара $\{\chi_n(x)\}$ достаточно и, в определенном смысле, необходимо, чтобы переменный показатель $p(x)$ подчинялся условию Дини-Липшица вида $(x, y \in [0, 1], d > 0)$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{d}{-\ln|x - y|}, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Обозначим через $\mathcal{P}_{2\pi}$ множество всех 2π -периодических переменных показателей $p > 1$, для которых имеет место неравенство (7). В работе [10] было доказано, что условие $p \in \mathcal{P}_{2\pi}$ является достаточным и, в определенном смысле, необходимым для равномерной ограниченности некоторых семейств операторов свертки в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$, где $L_{2\pi}^{p(x)}$ – пространство 2π -периодических измеримых функций, для которых определена норма $\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}([0, 2\pi])$. В работе [11] было доказано, что тригонометрическая система является базисом в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$ тогда и только тогда, когда переменный показатель

$p > 1$ удовлетворяет условию (7). В [8] было показано, что условие (7) необходимо и достаточно для базисности системы полиномов Лежандра в пространстве $L^{p(x)}([-1, 1])$ при дополнительном условии, которое состоит в том, что для переменного показателя p найдутся отрезки вида $[-1, -1 + \delta_1]$ и $[1 - \delta_2, 1]$, на которых p сохраняет постоянные значения, причем $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3}, 4)$.

В [14], [15] доказано (см. также цитированную в [14], [15] литературу), что при соблюдении условия (7) и некоторого дополнительного условия на $p(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ максимальная функция Харди-Литльвуда $M(f)$ является элементом пространства $L^{p(x)}(\mathbb{R})$ вместе с f . Сформулируем этот результат более точно, следуя [15]. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, f – локально интегрируемая функция, заданная на Ω . Тогда мы можем определить максимальную функцию Харди-Литльвуда $M(f) = M(f)(x)$, полагая

$$M(f)(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_{B \cap \Omega} |f(y)| dy, \quad (8)$$

где верхняя грань берется по всем открытым шарам $B \in \mathbb{R}^n$, содержащим точку x , $|B|$ – объем шара B . Хорошо известно, что если постоянное число p удовлетворяет условию $1 < p < \infty$, то $M(f)$ вместе с f принадлежит $L^p(\Omega)$, причем $\|M(f)\|_p(\Omega) \leq c(p)\|f\|_p(\Omega)$. В [15] (см. также [14]) показано, что этот результат допускает обобщение на пространства $L^{p(x)}(\Omega)$, если переменный показатель $p > 1$ подчиняется n -мерному аналогу условия (7) и дополнительному условию

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{\ln(e + |x|^n)}, \quad x, y \in \Omega, \quad |y| > |x|, \quad (9)$$

где для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ принято обозначение $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. А именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть задано открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ – переменный показатель, для которого $1 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$. Предположим, что p удовлетворяет условиям (7) и (9) для $x, y \in \Omega$. Тогда имеет место оценка

$$\|M(f)\|_{p(\cdot)}(\Omega) \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot)}(\Omega). \quad (10)$$

Это очень важный результат, который находит себе многочисленные приложения. В качестве одного из следствий оценки (10) отметим свойство ограниченности в $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ некоторых сингулярных интегралов и преобразований Кальдерона-Зигмунда (см. [15], [14] и цитированную там литературу). В настоящей статье нам понадобится свойство ограниченности в $L^{p(x)}(\mathbb{R})$ преобразования Гильберта, которое мы рассмотрим более подробно в следующем параграфе.

3. Преобразование Гильберта в $L^{p(x)}(\mathbb{R})$

Пусть $p > 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$. Тогда мы можем определить преобразование Гильберта $H(f) = H(f)(x)$ следующим образом:

$$H(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t) dt}{t - x}, \quad (11)$$

где интеграл в (11) понимается в смысле главного значения Коши, т.е. $H(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(f)(x)$, $H_\varepsilon(f)(x) = \int_{|t-x| > \varepsilon} \frac{f(t)dt}{t-x}$. Хорошо известно, что функция $Hf(x)$ конечна для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Более того, если $f \in L^p(\mathbb{R})$, где $p = \text{const} > 1$, то из известной теоремы Рисса следует, что $\|H(f)\|_p(\mathbb{R}) \leq c(p)\|f\|_p(\mathbb{R})$. Как это показано в [15], [14], эта оценка допускает обобщение на случай, когда $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$, если переменный показатель $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ удовлетворяет условиям (7) и (9). Другими словами, если переменный показатель $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ удовлетворяет условиям, которые обеспечивают справедливость оценки (10), то имеет место оценка

$$\|H(f)\|_{p(\cdot)}(\mathbb{R}) \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot)}(\mathbb{R}). \quad (12)$$

Через $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ обозначим множество переменных показателей $p > 1$, заданных на вещественной оси $\mathbb{R}$, для каждого из которых найдется такое число $\Delta > 1$, что $p(x) = p(\Delta)$ при $|x| \geq \Delta$, а на отрезке $E = [-\Delta, \Delta]$ p удовлетворяет условию (7). Очевидно, что если $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, то условие (9) также выполнено, поэтому для такого переменного показателя справедлива оценка (12). Рассмотрим преобразование Гильберта следующего вида

$$H^{a,b}f = H^{a,b}f(x) = \int_a^b \frac{f(t)dt}{t-x}. \quad (13)$$

Пусть переменный показатель p удовлетворяет на $[a, b]$ условию (7). Тогда мы можем продолжить $p = p(x)$ на все $\mathbb{R}$ следующим образом. Пусть $A = 1 + \max\{|a|, |b|\}$, $p(x) = 3/2$ при $|x| \geq A$, а на отрезки $[-A, a]$ и $[b, A]$ продолжим $p(x)$ линейно и непрерывно. Тогда нетрудно убедиться в том, что продолженная функция p удовлетворяет условиям (7) и (9) на всем $\mathbb{R}$. С другой стороны, если функция $f \in L^{p(x)}([a, b])$, то можно ее продолжить на все $\mathbb{R}$, полагая $f(x) \equiv 0$ при $x \notin [a, b]$ и рассмотреть преобразование Гильберта

$$Hf = Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)dt}{t-x} = \int_a^b \frac{f(t)dt}{t-x} = H^{a,b}f(x).$$

Отсюда и из (12) выводим

$$\|H^{a,b}(f)\|_{p(\cdot)}(\mathbb{R}) = \|H(f)\|_{p(\cdot)}(\mathbb{R}) \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot)}(\mathbb{R}) = c(p)\|f\|_{p(\cdot)}([a, b]). \quad (14)$$

4. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Для произвольных действительных α и β полиномы Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ можно определить [17] с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\mu(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \mu(x) \sigma^n(x) \}, \quad (15)$$

где $\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $\mu(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \beta}(x) P_m^{\alpha, \beta}(x) \rho(x) dx = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (16)$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \quad (17)$$

Пусть $-1 < \alpha, \beta$ – произвольные вещественные числа,

$$s(\theta) = s^{\alpha,\beta}(\theta) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_n = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Тогда для $0 < \theta < \pi$ имеет место асимптотическая формула

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos \theta) = n^{-\frac{1}{2}} s(\theta) \left(\cos(\lambda_n \theta + \gamma) + \frac{v_n(\theta)}{n \sin \theta} \right), \quad (18)$$

в которой для функции $v_n(\theta) = v_n(\theta; \alpha, \beta)$ справедлива оценка

$$|v_n(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, \delta) \quad \left(0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n} \right). \quad (19)$$

Из (18) и (19) непосредственно выводим следующие оценки

$$|P_n^{\alpha,\beta}(\cos \theta)| \leq c(\alpha, \beta, \gamma)(n+1)^\alpha, \quad |\theta| \leq \frac{\gamma}{n+1}, \quad (20)$$

$$\sqrt{n+1}(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}|P_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta) \quad (-1 \leq x \leq 1, \alpha, \beta \geq -1/2). \quad (21)$$

Указанные оценки вместе с формулой Кристоффеля-Дарбу

$$K_n^{\alpha,\beta}(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k^{\alpha,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_k^{\alpha,\beta}} = \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}$$

$$\times \frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y) - P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y} \quad (22)$$

играют основополагающую роль при изучении аппроксимативных свойств сумм Фурье по полиномам Якоби. Отметим еще следующие свойства полиномов Якоби:

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x), \quad (23)$$

$$(1-x)P_n^{\alpha+1,\beta}(x) =$$

$$\frac{2}{2n+\alpha+\beta+2} \left[(n+\alpha+1)P_n^{\alpha,\beta}(x) - (n+1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) \right]. \quad (24)$$

Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – полином Чебышева первого рода. Тогда [17]

$$P_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2} T_n(x). \quad (25)$$

5. О равномерной ограниченности и сходимости сумм Фурье по ультрасферическим полиномам Якоби в весовом пространстве Лебега с переменным показателем

Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\mu = \mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ – пространство Лебега с переменным показателем $p = p(x)$ и весом μ . Если $p \geq 1$ и $f \in L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$, то мы можем определить коэффициенты Фурье-Якоби

$$f_k^{\alpha, \beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha, \beta}} \int_{-1}^1 f(t) P_k^{\alpha, \beta}(t) \mu(t) dt \quad (26)$$

и сумму Фурье-Якоби

$$S_n^{\alpha, \beta}(f) = S_n^{\alpha, \beta}(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^{\alpha, \beta} P_k^{\alpha, \beta}(x). \quad (27)$$

Основная цель настоящей статьи заключается в том, чтобы найти условия на переменный показатель $p = p(x)$, которые гарантируют сходимость при $n \rightarrow \infty$ сумм Фурье $S_n^{\alpha, \beta}(f)$ по ультрасферическим полиномам Якоби $P_k^{\alpha, \beta}(x)$ к функции $f \in L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ по норме пространства $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$. Другими словами, мы рассмотрим задачу о базисности в банаховом пространстве $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ системы ортонормированных полиномов Якоби $p_k^{\alpha, \beta}(x) = (h_k^{\alpha, \beta})^{-1/2} P_k^{\alpha, \beta}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), ограничившись при этом случаем $\alpha, \beta \geq -1/2$. С этой целью вводится класс переменных показателей $\mathcal{P}(-1, 1)$, удовлетворяющих перечисленным ниже условиям A), B) и C). Показано, что условия A), B) и C), взятые вместе, обеспечивают равномерную ограниченность в $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ последовательности линейных операторов $S_n^{\alpha, \beta}(f)$ ($n = 0, 1, \dots$) при соблюдении дополнительного условия (38). При этом отметим, что A) и B) являются также и необходимыми условиями для равномерной ограниченности в $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ последовательности линейных операторов $S_n^{\alpha, \beta}(f)$ ($n = 0, 1, \dots$). Что же касается условия C), то вопрос о его необходимости в случае $\alpha, \beta > -1/2$ остается открытым, а когда $\alpha = \beta = -1/2$ оно становится излишним.

Нам понадобятся некоторые преобразования для сумм Фурье-Якоби $S_n^{\alpha, \beta}(f, x)$. С этой целью воспользуемся формулой Кристоффеля-Дарбу (22). Тогда (27) можно переписать так

$$S_n^{\alpha, \beta}(f, x) = \int_{-1}^1 K_n^{\alpha, \beta}(x, y) f(y) \mu(y) dy. \quad (28)$$

ЛЕММА 5.1. *Если $x \neq y$, то ядро Кристоффеля-Дарбу $K_n^{\alpha, \beta}(x, y)$ допускает следующее представление*

$$K_n^{\alpha, \beta}(x, y) = K_{n1}^{\alpha, \beta}(x, y) + K_{n2}^{\alpha, \beta}(x, y), \quad (29)$$

где

$$K_{n1}^{\alpha, \beta}(x, y) = -\gamma_n(\alpha, \beta) \frac{(1-x)P_n^{\alpha+1, \beta}(x)P_n^{\alpha, \beta}(y)}{x-y}, \quad (30)$$

$$K_{n2}^{\alpha, \beta}(x, y) = \gamma_n(\alpha, \beta) \frac{(1-y)P_n^{\alpha+1, \beta}(y)P_n^{\alpha, \beta}(x)}{x-y}, \quad (31)$$

где $\gamma_n(\alpha, \beta) = O(n)$ ($n \rightarrow \infty$).

Доказательство леммы 5.1 непосредственно вытекает из (22) и (24).

С учетом леммы 5.1 равенство (28) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} S_n^{\alpha, \beta}(f, x) &= \gamma_n(\alpha, \beta) P_n^{\alpha, \beta}(x) \int_{-1}^1 \frac{(1-y) P_n^{\alpha+1, \beta}(y) f(y) \mu(y) dy}{x-y} \\ &\quad - \gamma_n(\alpha, \beta) (1-x) P_n^{\alpha+1, \beta}(x) \int_{-1}^1 \frac{P_n^{\alpha, \beta}(y) f(y) \mu(y) dy}{x-y}, \end{aligned} \quad (32)$$

где интегралы понимаются в смысле главных значений Коши. В дальнейшем (до теоремы 5.1) мы рассмотрим случай, когда $\alpha, \beta > -1/2$, $\mu(x) = (1-x)^\alpha(1-x)^\beta$, $x \in [0, 1]$. Поскольку функция $f(x)(1-x)^\alpha(1-x)^\beta$ интегрируема на $(-1, 1)$, то в этом случае из (32) с учетом весовой оценки (21) для почти всех $x \in [0, 1]$ выводим

$$\begin{aligned} &(1-x)^{\frac{\alpha}{p(x)}} |S_n^{\alpha, \beta}(f, x)| \leq \\ &c(\alpha, \beta) \sqrt{n+1} (1-x)^{u(x)} \left| \int_{-1}^1 \frac{(1-y) \mu(y) P_n^{\alpha+1, \beta}(y) f(y) dy}{x-y} \right| \\ &\quad + c(\alpha, \beta) \sqrt{n+1} (1-x)^{v(x)} \left| \int_{-1}^1 \frac{\mu(y) P_n^{\alpha, \beta}(y) f(y) dy}{x-y} \right| \leq \\ &\sigma_1(f, x) + \sigma_2(f, x) + \sigma_3(f, x) + \sigma_4(f, x), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\sigma_1(f, x) = c(\alpha, \beta) \sqrt{n+1} (1-x)^{u(x)} \left| \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{(1-y) \mu(y) P_n^{\alpha+1, \beta}(y) f(y) dy}{x-y} \right|, \quad (34)$$

$$\sigma_2(f, x) = c(\alpha, \beta) \sqrt{n+1} (1-x)^{u(x)} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-y) \mu(y) P_n^{\alpha+1, \beta}(y) f(y) dy}{x-y} \right|, \quad (35)$$

$$\sigma_3(f, x) = c(\alpha, \beta) \sqrt{n+1} (1-x)^{v(x)} \left| \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu(y) P_n^{\alpha, \beta}(y) f(y) dy}{x-y} \right|, \quad (36)$$

$$\sigma_4(f, x) = c(\alpha, \beta) \sqrt{n+1} (1-x)^{v(x)} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{P_n^{\alpha, \beta}(y) \mu(y) f(y) dy}{x-y} \right|, \quad (37)$$

а $u(x) = \frac{\alpha}{p(x)} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}$, $v(x) = \frac{\alpha}{p(x)} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$. Мы рассмотрим вопрос об оценке норм $\|\sigma_i(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1])$ ($i = 1, 2, 3, 4$) при определенных условиях на переменный показатель p . А именно, через $\mathcal{P}(-1, 1)$ мы обозначим пространство переменных показателей p , определенных на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих перечисленным ниже условиям:

А) p обладает свойством (7) на $[-1, 1]$;

В) $\underline{p}([-1, 1]) = \min_{x \in [-1, 1]} p(x) > 1$;

С) для p найдутся такие положительные (сколь угодно малые) числа $\delta_i = \delta_i(p)$ ($i = 1, 2$), что $p(x) = p(-1)$ при $x \in [-1, -1 + \delta_1]$ и $p(x) = p(1)$ при $x \in [1 - \delta_2, 1]$.

Следующее утверждение является основополагающим.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\alpha, \beta > -1/2$, $p \in \mathcal{P}(-1, 1)$, $\mu = \mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $f \in L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$, $\|f\|_{p(\cdot)}([-1, 1]) \leq 1$,

$$4 \frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4 \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}, \quad 4 \frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < 4 \frac{\beta+1}{2\beta+1}. \quad (38)$$

Тогда

$$\|\sigma_i(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (39)$$

Доказательству этой леммы мы предпошлим некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 5.3. Пусть $0 < \gamma < 1$. Тогда имеет место неравенство

$$|a^\gamma - 1| \leq \frac{2|a-1|}{a^{1-\gamma}+1}, \quad 0 \leq a < \infty. \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $a \geq 1$, то нужно проверить, что $(a^\gamma - 1)(a^{1-\gamma} + 1) < 2(a-1)$ или, что то же, $1-a \leq a^{1-\gamma} - a^\gamma$. Но это неравенство справедливо, так как $a^\gamma \leq a$ и $1 \leq a^{1-\gamma}$. Если же $0 < a < 1$, то нужно проверить, что $(1-a^\gamma)(a^{1-\gamma} + 1) < 2(1-a)$ или, что то же, $a^{1-\gamma} - a^\gamma \leq 1-a$. Это неравенство следует из того, что $a^{1-\gamma} < 1$ и $a^\gamma > a$. Итак неравенство (40) справедливо при любом $a \geq 0$.

Из леммы 5.3 непосредственно вытекает

ЛЕММА 5.4. Пусть $-1 < a, b < 1$, $0 < \gamma < 1$. Тогда

$$\frac{1}{|a-b|} \left| \left(\frac{1-b}{1-a} \right)^\gamma - 1 \right| \leq \frac{2}{(1-a)^\gamma((1-a)^{1-\gamma} + (1-b)^{1-\gamma})}. \quad (41)$$

Доказательство леммы 5.2.

Пусть $p \in \mathcal{P}(-1, 1)$, тогда найдутся такие положительные числа $\delta_s = \delta_s(p)$ ($s = 1, 2$), что $p(x) = p(-1)$ при $x \in [-1, -1 + \delta_1]$ и $p(x) = p(1)$ при $x \in [1 - \delta_2, 1]$. Аналогичными свойствами обладает и сопряженная функция $q(x) = p(x)/(p(x) - 1)$. Перейдем к доказательству оценки (39) для $i = 1$. Из (34) с учетом (21) для $0 \leq x < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1(f, x) &\leq c(\alpha)(1-x)^{u(x)} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \mu(y)(1+y)^{-\beta/2-1/4} |f(y)| dy = \\ &c(\alpha)(1-x)^{u(x)} \left[\int_{-1}^{-1+\delta_1} + \int_{-1+\delta_1}^{-1/2} \right] \mu(y)(1+y)^{-\beta/2-1/4} |f(y)| dy \\ &\leq \sigma_{11}(f, x) + \sigma_{12}(f, x), \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\sigma_{11}(f, x) = c(\alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \int_{-1}^{-1+\delta_1} (1+y)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \mu^{\frac{1}{q(-1)}}(y) \mu^{\frac{1}{p(-1)}}(y) |f(y)| dy, \quad (43)$$

$$\sigma_{12}(f, x) = c(\alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \int_{-1+\delta_1}^{-1/2} |f(y)| dy. \quad (44)$$

Используя неравенство Гельдера, из (43) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(f, x) &\leq c(\alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} (1+y)^{-q(-1)(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4})+\beta} dy \right)^{\frac{1}{q(-1)}} \times \\ &\quad \left(\int_{-1}^{-1+\delta_1} \mu(y) |f(y)|^{p(-1)} dy \right)^{\frac{1}{p(-1)}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Первый из интегралов в (45) конечен, так как в силу (38) $\beta - q(-1)(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}) > -1$. Что касается второго из интегралов в (45), то он равен $\|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, -1 + \delta_1])$, поэтому он допускает оценку $\|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, -1 + \delta_1]) \leq \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq 1$. Отсюда и из (45) находим

$$\sigma_{11}(f, x) \leq c(p, \alpha, \beta)(1-x)^{u(x)}. \quad (46)$$

С другой стороны, для $\sigma_{12}(f, x)$ из (44) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(f, x) &\leq c(p, \alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \int_{-1+\delta_1}^{-\frac{1}{2}} |f(y)| dy \\ &\leq c(p, \alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \|f\|_{p(\cdot)}([-1, -1 + \delta_1]) \\ &\leq c(p, \alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq c(p, \alpha, \beta)(1-x)^{u(x)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Из (42), (46) и (47) получаем

$$\sigma_1(f, x) \leq c(p, \alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \quad (0 \leq x < 1). \quad (48)$$

Совершенно аналогично из (36) выводим

$$\sigma_3(f, x) \leq c(p, \alpha, \beta)(1-x)^{v(x)} \quad (0 \leq x < 1). \quad (49)$$

Далее, из (48) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sigma_1(f, x))^{p(x)} dx &= \int_0^{1-\delta_2} (\sigma_1(f, x))^{p(x)} dx + \int_{1-\delta_2}^1 (\sigma_1(f, x))^{p(1)} dx \leq \\ &c(\alpha, \beta, p) + c(\alpha, \beta, p) \int_{1-\delta_2}^1 (1-x)^{p(1)u(1)} dx = \\ &c(\alpha, \beta, p) + c(\alpha, \beta, p) \int_{1-\delta_2}^1 (1-x)^{p(1)(\frac{\alpha}{p(1)} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4})} dx = \\ &c(\alpha, \beta, p) + c(\alpha, \beta, p) \int_{1-\delta_2}^1 (1-x)^{\alpha - p(1)(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4})} dx \leq c(\alpha, \beta, p), \end{aligned} \quad (50)$$

так как из (38) следует, что $p(1) < 4(\alpha + 1)/(2\alpha + 1)$ и, стало быть $\alpha - p(1)(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}) > -1$. Из (50) выводим $\|\sigma_1(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p)$, и аналогично, из (49)

выводим $\|\sigma_3(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p)$. Таким образом, оценка (39) для $i = 1$ и $i = 3$ доказана.

Перейдем к случаю $i = 2$. Положим

$$A_n(y) = \sqrt{n+1}(1+y)^\beta P_n^{\alpha+1, \beta}(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}, \quad (51)$$

тогда из (35) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_2(f, x) &= c(\alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \left| \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} + \int_{1-\delta_2}^1 \right) \frac{A_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} f(y) dy}{x-y} \right| \\ &\leq \sigma_{21}(f, x) + \sigma_{22}(f, x), \end{aligned} \quad (52)$$

где $\sigma_{21}(f, x) = c(\alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} \mathcal{F} \right|$, $\sigma_{22}(f, x) = c(\alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \left| \int_{1-\delta_2}^1 \mathcal{F} \right|$, а $\mathcal{F}$ – выражение, фигурирующее под знаком интеграла в левой части неравенства (52). Положим $\varphi_n(y) = A_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}$ и заметим, что в силу (21) найдется постоянная $c(\alpha, \beta, p)$, для которой

$$|\varphi_n(y)| \leq c(\alpha, \beta, p) \quad (-1/2 \leq y \leq 1 - \delta_2/2). \quad (53)$$

Запишем $\sigma_{21}(f, x)$ в виде

$$\sigma_{21}(f, x) = c(\alpha, \beta)(1-x)^{u(x)} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} \frac{\varphi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right| \quad (54)$$

и рассмотрим два случая: а) $0 \leq x \leq 1 - \delta_2/2$; б) $1 - \delta_2/2 < x < 1$. Если $0 \leq x \leq 1 - \delta_2/2$, то из (13) и (54) имеем

$$\sigma_{21}(f, x) \leq c(\alpha, \beta, p) \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} \frac{\varphi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right| = c(\alpha, \beta, p) |H^{-1/2, 1-\delta_2} g(x)|, \quad (55)$$

где $g(y) = \varphi_n(y)f(y)$. Обратимся к оценке (14), которая с учетом (53) дает

$$\begin{aligned} \|H^{-\frac{1}{2}, 1-\delta_2} g\|_{p(\cdot)}(\mathbb{R}) &\leq c(\alpha, \beta, p) \|g\|_{p(\cdot)}([-1/2, 1 - \delta_2]) \\ &\leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot)}([-1/2, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1/2, 1 - \delta_2]) \\ &\leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \end{aligned} \quad (56)$$

Из (55) и (56) имеем

$$\|\sigma_{21}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1 - \delta_2/2]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (57)$$

Если же $1 - \delta_2/2 < x < 1$, то

$$\sigma_{21}(f, x) = c(\alpha, \beta, p)(1-x)^{u(1)} \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} |\varphi_n(y)f(y)| dy. \quad (58)$$

С другой стороны, из (5) и (53) имеем

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} |g(y)| dy \leq c(p) \|g\|_{p(\cdot)}([-1/2, 1 - \delta_2]) \leq$$

$$c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1/2, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (59)$$

Из (58) и (59) находим (см. (50))

$$\begin{aligned} \int_{1-\delta_2/2}^1 (\sigma_{21}(f, x))^{p(x)} dx &= \int_{1-\delta_2/2}^1 (\sigma_{21}(f, x))^{p(1)} dx \leq \\ c(\alpha, \beta, p) \int_{1-\delta_2/2}^1 (1-x)^{p(1)u(1)} dx &\leq c(\alpha, \beta, p). \end{aligned} \quad (60)$$

Соединяя оценки (57) и (60), мы можем записать

$$\|\sigma_{21}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (61)$$

Перейдем к оценке нормы функции $\sigma_{22}(f)$. Рассмотрим два случая: 1) $0 \leq x \leq 1 - \delta_2$; 2) $1 - \delta_2 < x < 1$. Если $0 \leq x \leq 1 - \delta_2$, то из (52) имеем

$$\sigma_{22}(f, x) \leq c(\alpha, \beta, p) \left| \int_{1-\delta_2}^1 \frac{A_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} f(y) dy}{x-y} \right| \leq \sigma_{221}(f, x) + \sigma_{222}(f, x), \quad (62)$$

где $\sigma_{221}(f, x) = c(\alpha, \beta, p) \left| \int_{1-\delta_2}^{1-\delta_2/2} \mathcal{F} \right|$, $\sigma_{222}(f, x) = c(\alpha, \beta, p) \left| \int_{1-\delta_2/2}^1 \mathcal{F} \right|$. Положим $g(y) = \varphi_n(y)f(y)$ и воспользуемся обозначением (13), тогда из (62) имеем $\sigma_{221}(f, x) = c(\alpha, \beta, p) |H^{1-\delta_2, 1-\delta_2/2} g(x)|$, поэтому в силу (14) и (53)

$$\begin{aligned} \|\sigma_{221}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1 - \delta_2/2]) &\leq c(\alpha, \beta, p) \|g\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1 - \delta_2/2]) \leq \\ c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([1 - \delta_2, 1 - \delta_2/2]) &\leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \end{aligned} \quad (63)$$

Далее, из (21) и (51) следует, что

$$|A_n(y)| \leq c(\alpha, \beta) \quad (-1/2 \leq y < 1), \quad (64)$$

поэтому из (62) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{222}(f, x) &\leq c(\alpha, \beta, p) \int_{1-\delta_2/2}^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}-\alpha/p(1)} (1-y^2)^{\alpha/p(1)} |f(y)| dy \leq \\ c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([1 - \delta_2/2, 1]) &\left(\int_{1-\delta_2/2}^1 (1-y)^{(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{p(1)})q(1)} dy \right)^{\frac{1}{q(1)}}, \end{aligned} \quad (65)$$

где $q(1) = p(1)/(p(1) - 1)$. Последний интеграл конечен, так как в силу (38) $(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{p(1)})q(1) > -1$. В самом деле, это неравенство эквивалентно неравенству $4(\alpha + 1)/(2\alpha + 5) < p(1)$, которое, очевидно, вытекает из (38). Таким образом, из (65) выводим $\sigma_{222}(f, x) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([1 - \delta_2/2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p)$, $(0 \leq x \leq 1 - \delta_2)$, откуда, в свою очередь, находим

$$\|\sigma_{222}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (66)$$

Оценки (62), (63) и (66), взятые вместе дают

$$\|\sigma_{22}(f)|_{p(\cdot)}([0, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (67)$$

Рассмотрим случай $1 - \delta_2 \leq x < 1$ и заметим, что в этом случае $p(x) = p(1)$, $u(x) = u(1)$, поэтому мы можем представить $\sigma_{22}(f, x)$ в следующем виде (см. (52))

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(f, x) &= c(\alpha, \beta) \left| \int_{1-\delta_2}^1 \frac{A_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}} f(y)}{x-y} \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{p(1)}} dy \right| \\ &\leq U(f, x) + V(f, x), \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$U(f, x) = c(\alpha, \beta) \left| \int_{1-\delta_2}^1 \frac{A_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}} f(y)}{x-y} dy \right|, \quad (69)$$

$$V(f, x) = c(\alpha, \beta) \int_{1-\delta_2}^1 \frac{|A_n(y)|(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}} |f(y)|}{|x-y|} \left| \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{p(1)}} - 1 \right| dy. \quad (70)$$

Рассмотрим сначала $U(f, x)$. Положим $\psi(y) = A_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}} f(y)$ и воспользуемся определением (13), тогда из (69) имеем $U(f, x) = c(\alpha, \beta) |H^{1-\delta_2, 1} \psi(x)|$, поэтому из оценок (14) и (64) находим

$$\begin{aligned} \|U(f)\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) &\leq c(\alpha, \beta, p) \|\psi\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \leq \\ &c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([1 - \delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \end{aligned} \quad (71)$$

Чтобы оценить $\|V(f)\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1])$ обратимся к соотношениям (3), (4) и (70), из которых, полагая $\gamma = \alpha/2 + 1/4 - 1/p(1)$,

$$K_\gamma(x, y) = \frac{1}{|x-y|} \left| \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^\gamma - 1 \right|, \quad (72)$$

находим

$$\|V(f)\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta) \sup_g \int_{1-\delta_2}^1 \int_{1-\delta_2}^1 |g(x)\psi(y)| K_\gamma(x, y) dx dy, \quad (73)$$

где верхняя грань берется по всем $g \in L^{q(1)}([1 - \delta_2, 1])$, для которых $\|g\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \leq 1$. Оценим двойной интеграл I из (73). Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{1-\delta_2}^1 \int_{1-\delta_2}^1 |\psi(y)| K_\gamma^{\frac{1}{p(1)}}(x, y) \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^{\frac{1}{p(1)q(1)}} \times \\ &\quad |g(x)| K_\gamma^{\frac{1}{q(1)}}(x, y) \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^{-\frac{1}{p(1)q(1)}} dx dy \leq \\ &\quad \left(\int_{1-\delta_2}^1 |g(x)|^{q(1)} F_1(x) dx \right)^{\frac{1}{q(1)}} \left(\int_{1-\delta_2}^1 |\psi(y)|^{p(1)} F_2(y) dy \right)^{\frac{1}{p(1)}}, \end{aligned} \quad (74)$$

где

$$F_1(x) = \int_{1-\delta_2}^1 K_\gamma(x, y) \left(\frac{1-x}{1-y} \right)^{\frac{1}{p(1)}} dy, \quad F_2(y) = \int_{1-\delta_2}^1 K_\gamma(x, y) \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^{\frac{1}{q(1)}} dx. \quad (75)$$

Покажем, что функции F_1 и F_2 ограничены на $[1-\delta_2, 1]$. С этой целью заметим, что из (38) при $\alpha > -1/2$ для $\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{p(1)}$ вытекают неравенства $0 < \gamma < \frac{1}{p(1)}$, поэтому мы можем воспользоваться леммой 5.3 (неравенство (41)), из которой и из (75) имеем

$$\begin{aligned} F_1(x) &\leq 2 \int_{1-\delta_2}^1 \frac{(1-x)^{\frac{1}{p(1)}-\gamma} dy}{(1-y)^{\frac{1}{p(1)}}((1-y)^{1-\gamma} + (1-x)^{1-\gamma})} \leq \\ &2 \int_{1-\delta_2}^x \frac{(1-x)^{\frac{1}{p(1)}-\gamma} dy}{(1-y)^{\frac{1}{p(1)}+1-\gamma}} + 2 \int_x^1 \frac{(1-x)^{\frac{1}{p(1)}-\gamma} dy}{(1-y)^{\frac{1}{p(1)}}(1-x)^{1-\gamma}} \leq \\ &2(1-x)^{\frac{1}{p(1)}-\gamma} \frac{(1-x)^{\gamma-\frac{1}{p(1)}}}{\frac{1}{p(1)}-\gamma} + 2(1-x)^{\frac{1}{p(1)}-1} \frac{(1-x)^{1-\frac{1}{p(1)}}}{1-\frac{1}{p(1)}} \leq c(\alpha, p), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &\leq 2 \int_{1-\delta_2}^1 \frac{(1-y)^{\frac{1}{q(1)}} dx}{(1-x)^{\gamma+\frac{1}{q(1)}}((1-y)^{1-\gamma} + (1-x)^{1-\gamma})} \leq \\ &2 \int_{1-\delta_2}^y \frac{(1-y)^{\frac{1}{q(1)}} dx}{(1-x)^{\frac{1}{q(1)}+1}} + 2 \int_y^1 \frac{(1-y)^{\frac{1}{q(1)}-1+\gamma} dx}{(1-x)^{\frac{1}{q(1)}+\gamma}} \leq \\ &2(1-y)^{\frac{1}{q(1)}} \frac{(1-y)^{-\frac{1}{q(1)}}}{1/q(1)} + 2(1-y)^{\frac{1}{q(1)}-1+\gamma} \frac{(1-y)^{1-\frac{1}{q(1)}-\gamma}}{1-\frac{1}{q(1)}-\gamma} \leq c(\alpha, p). \end{aligned} \quad (77)$$

Из (64), (74), (76) и (77) следует, что

$$\begin{aligned} I &\leq c(\alpha, p) \|g\|_{q(1)}([1-\delta_2, 1]) \|\psi\|_{p(1)}([1-\delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|A_n \mu^{\frac{1}{p(1)}} f\|_{p(1)}([1-\delta_2, 1]) \\ &\leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([1-\delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]), \end{aligned} \quad (78)$$

Оценки (73) и (78), взятые вместе дают

$$\|V(f)\|_{p(\cdot)}([1-\delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (79)$$

Из (71) и (79) и неравенства (68) выводим

$$\|\sigma_{22}(f)\|_{p(\cdot)}([1-\delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (80)$$

а из (67) и (80) получаем

$$\|\sigma_{22}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (81)$$

Сопоставляя (61) и (81) с (52), убеждаемся в справедливости утверждения леммы 5.2 при $i = 2$. Перейдем к доказательству утверждения леммы 5.2 для $i = 4$. Положим

$$B_n(y) = \sqrt{n+1} (1+y)^\beta (1-y)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} P_n^{\alpha, \beta}(y), \quad (82)$$

$$\Phi_n(y) = B_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \quad (83)$$

и заметим, что в силу (21)

$$|B_n(y)| \leq c(\alpha, \beta) \quad (-1/2 \leq y < 1), \quad (84)$$

$$|\Phi_n(y)| \leq c(\alpha, \beta, p) \quad (-1/2 \leq y < 1 - \delta_2/2). \quad (85)$$

Из (37) и (82) имеем

$$\sigma_4(f, x) = c(\alpha, \beta)(1-x)^{v(x)} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{\Phi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right| \leq \sigma_{41}(f, x) + \sigma_{42}(f, x), \quad (86)$$

где $v(x) = \frac{\alpha}{p(x)} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$,

$$\sigma_{41}(f, x) = c(\alpha, \beta)(1-x)^{v(x)} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} \frac{\Phi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right|, \quad (87)$$

$$\sigma_{42}(f, x) = c(\alpha, \beta)(1-x)^{v(x)} \left| \int_{1-\delta_2}^1 \frac{\Phi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right|. \quad (88)$$

Оценим $|\sigma_{41}(f, x)|$. С этой целью рассмотрим два случая: 1) $0 \leq x \leq 1 - \delta_2/2$; 2) $1 - \delta_2/2 \leq x < 1$. Если $0 \leq x \leq 1 - \delta_2/2$, то из (87) и (13) следует, что

$$\sigma_{41}(f, x) \leq c(\alpha, \beta, p) \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} \frac{\Phi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right| = c(\alpha, \beta, p) \left| H^{-\frac{1}{2}, 1-\delta_2} g(x) \right|, \quad (89)$$

где $g(y) = \Phi_n(y)f(y)$, если же $1 - \delta_2/2 \leq x < 1$, то

$$\sigma_{41}(f, x) \leq c(\alpha, \beta, p)(1-x)^{v(1)} \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} |\Phi_n(y)f(y)| dy. \quad (90)$$

Обратимся к оценке (14), тогда, полагая $g(y) = \Phi_n(y)f(y)$ и учитывая (82) – (85), мы можем записать

$$\begin{aligned} \|H^{-\frac{1}{2}, 1-\delta_2} g\|_{p(\cdot)}(\mathbb{R}) &\leq c(\alpha, \beta, p) \|g\|_{p(\cdot)}([-1/2, 1 - \delta_2]) \leq \\ &c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot)}([-1/2, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1/2, 1 - \delta_2]). \end{aligned} \quad (91)$$

Из (89) и (91) выводим

$$\|\sigma_{41}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (92)$$

С другой стороны, в силу (5) и (85)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\delta_2} |g(y)| dy &\leq c(p) \|g\|_{p(\cdot)}([-1/2, 1 - \delta_2]) \\ &\leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1/2, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p), \end{aligned}$$

поэтому из (90) для $p \in \mathcal{P}(-1, 1)$ имеем

$$\int_{1-\delta_2}^1 (\sigma_{41}(f, x))^{p(x)} dx \leq c(\alpha, \beta, p) \int_{1-\delta_2}^1 (1-x)^{v(1)p(1)} dx =$$

$$\frac{c(\alpha, \beta, p)\delta_2^{v(1)p(1)+1}}{v(1)p(1)+1} \leq c(\alpha, \beta, p), \quad (93)$$

так как из (38) вытекает, что $v(1) > 0$. Чтобы убедиться в этом заметим, что из условия (38) имеем $4(\alpha+1)/(2\alpha+1) > p(1)$. С другой стороны, если $\alpha > 1/2$, то $4\alpha/(2\alpha-1) > 4(\alpha+1)/(2\alpha+1)$ и, стало быть, $4\alpha/(2\alpha-1) > p(1)$ или, что то же, $1/p(1) > (2\alpha-1)/4\alpha$ и отсюда $\alpha/p(1) > \alpha/2 - 1/4$, а это означает, что $v(1) = v_\alpha(1) = -\alpha/2 + 1/4 + \alpha/p(1) > 0$. Если же $-1/2 < \alpha \leq 1/2$, то $v_\alpha(1) > 0$ каково бы ни было $p(1) > 0$. В самом деле, прямая $l(\alpha) = v_\alpha(1)$ в точках $\alpha = -1/2$ и $\alpha = 0$ принимает значения $l(-1/2) = 1/2 - 1/(2p(1)) > 0$ и $l(0) = 1/4$, соответственно, поэтому для любого $\alpha > -1/2$ имеем $v_\alpha(1) > 0$.

Из (92) и (93) находим

$$\|\sigma_{41}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (94)$$

Оценим $|\sigma_{42}(f, x)|$, для чего рассмотрим два случая: 1) $0 \leq x \leq 1 - \delta_2$; 2) $1 - \delta_2 \leq x < 1$. Если $0 \leq x \leq 1 - \delta_2$, то согласно (88)

$$\sigma_{42}(f, x) = c(\alpha)(1-x)^{v(x)} \left| \int_{1-\delta_2}^1 \frac{\Phi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right| \leq \sigma_{421}(f, x) + \sigma_{422}(f, x), \quad (95)$$

где

$$\sigma_{421}(f, x) = c(\alpha, \beta, p) \left| \int_{1-\delta_2}^{1-\delta_2/2} \frac{\Phi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right|, \quad (96)$$

$$\sigma_{422}(f, x) = c(\alpha, \beta, p) \left| \int_{1-\delta_2/2}^1 \frac{\Phi_n(y)f(y)dy}{x-y} \right|. \quad (97)$$

Положим $r_n = r_n(y) = \Phi_n(y)f(y)$ и воспользуемся определением (13), тогда можем переписать (96) так $\sigma_{421}(f, x) = c(\alpha, \beta, p) |H^{1-\delta_2, 1-\delta_2/2} r_n(x)|$, поэтому в силу (14) и (85)

$$\|\sigma_{421}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1-\delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|r_n\|_{p(\cdot)}([1-\delta_2, 1-\delta_2/2]) \leq$$

$$c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot)}([1-\delta_2, 1-\delta_2/2]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (98)$$

Далее, в силу (84), (97) и с учетом того, что $\|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq 1$, а из левого из неравенств (38) вытекает $(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{p(1)})q(1) + 1 > 0$, мы можем записать

$$\sigma_{422}(f, x) \leq c(\alpha, \beta, p) \int_{1-\delta_2/2}^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{p(1)}} (1-y^2)^{\frac{\alpha}{p(1)}} |f(y)| dy \leq$$

$$c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \left(\int_{1-\delta_2/2}^1 (1-y)^{(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{p(1)})q(1)} \right)^{\frac{1}{q(1)}} \leq c(\alpha, \beta, p),$$

поэтому

$$\|\sigma_{421}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (99)$$

Оценки (95), (97) и (99), взятые вместе, дают

$$\|\sigma_{42}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1 - \delta_2]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (100)$$

Рассмотрим случай $1 - \delta_2 \leq x < 1$. Поскольку в этом случае $p(x) = p(1)$ и, следовательно, $v(x) = v(1)$, то мы можем записать

$$\sigma_{42}(f, x) = c(\alpha) \left| \int_{1-\delta_2}^1 \frac{B_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}} f(y) dy}{x-y} \left(\frac{1-x}{1-y} \right)^{v(1)} \right| \leq G(f, x) + Q(f, x), \quad (101)$$

где

$$G(f, x) = c(\alpha) \left| \int_{1-\delta_2}^1 \frac{B_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}} f(y) dy}{x-y} \right|, \quad (102)$$

$$Q(f, x) = c(\alpha) \left| \int_{1-\delta_2}^1 \frac{B_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}} f(y) dy}{x-y} \left[\left(\frac{1-x}{1-y} \right)^{v(1)} - 1 \right] \right|. \quad (103)$$

Рассмотрим $G(f, x)$. С этой целью положим $F(y) = B_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}} f(y)$ и обратимся к определению (13), тогда из (102) имеем $G(f, x) = c(\alpha) |H^{1-\delta_2, 1} F|$, поэтому из оценки (14) с учетом (84) находим

$$\begin{aligned} \|G(f)\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) &\leq c(\alpha, \beta, p) \|F\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \\ &\leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot)}([-1, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \end{aligned} \quad (104)$$

Далее нам понадобятся следующие неравенства: 1) $0 < v(1)$; 2) $v(1) < 1/q(1)$. Первое из них мы уже проверяли выше, поэтому остается убедиться в справедливости второго. Для этого заметим, что в силу первого из неравенств (38) имеем $4(\alpha + 1)/(2\alpha + 3) < p(1)$, отсюда $(2\alpha + 3)/4 > (\alpha + 1)/p(1)$, т.е. $-\alpha/2 - 3/4 < -\alpha/p(1) - 1/p(1)$ или, что то же $v_\alpha(1) < 1 - 1/p(1) = 1/q(1)$, что и требовалось доказать. Итак, мы проверили справедливость неравенств

$$0 < v(1) = v_\alpha(1) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{p(1)} < \frac{1}{q(1)} \quad (\alpha > -1/2). \quad (105)$$

Оценим норму $\|Q(f)\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1])$. Положим $\gamma = v_\alpha(1)$,

$$K_\gamma(x, y) = \frac{1}{|x-y|} \left| \left(\frac{1-x}{1-y} \right)^\gamma - 1 \right|. \quad (106)$$

Тогда с учетом (103) мы можем записать

$$\|Q(f)\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \leq c(\alpha) \sup_g \int_{1-\delta_2}^1 \int_{1-\delta_2}^1 |g(x)Z(y)| K_\gamma(x, y) dx dy, \quad (107)$$

где $Z(y) = B_n(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{p(1)}}$, а верхняя грань берется по всем $g \in L^{q(1)}([1 - \delta_2, 1])$, для которых $\|g\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \leq 1$. Оценим двойной интеграл J из (107). Имеем

$$J = \int_{1-\delta_2}^1 \int_{1-\delta_2}^1 |F(y)| K_{\gamma}^{\frac{1}{p(1)}}(x, y) \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^{\frac{1}{p(1)q(1)}} \times$$

$$|g(x)|K_{\gamma}^{\frac{1}{q(1)}}(x, y) \left(\frac{1-x}{1-y} \right)^{\frac{1}{p(1)q(1)}} dx dy \leq$$

$$\left(\int_{1-\delta_2}^1 |g(x)|^{q(1)} F_3(x) dx \right)^{\frac{1}{q(1)}} \left(\int_{1-\delta_2}^1 |Z(y)|^{p(1)} F_4(y) dy \right)^{\frac{1}{p(1)}}, \quad (108)$$

где

$$F_3(x) = \int_{1-\delta_2}^1 K_{\gamma}(x, y) \left(\frac{1-x}{1-y} \right)^{\frac{1}{p(1)}} dy, \quad (109)$$

$$F_4(y) = \int_{1-\delta_2}^1 K_{\gamma}(x, y) \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^{\frac{1}{q(1)}} dx. \quad (110)$$

Покажем, что функции F_3 и F_4 ограничены на $(1-\delta_2, 1)$. Поскольку для $\gamma = v_{\alpha}(1)$ справедливы неравенства (105), то мы можем обратиться к лемме 5.4. Тогда из (106), (109), (110) и (41) имеем

$$F_3(x) \leq \int_{1-\delta_2}^1 \left(\frac{1-x}{1-y} \right)^{\frac{1}{p(1)}} \frac{2dy}{(1-y)^{\gamma}((1-y)^{1-\gamma} + (1-x)^{1-\gamma})} <$$

$$2(1-x)^{\frac{1}{p(1)}} \int_{1-\delta_2}^1 \frac{(1-y)^{-\frac{1}{p(1)}-\gamma} dy}{(1-y)^{1-\gamma} + (1-x)^{1-\gamma}} \leq$$

$$2(1-x)^{\frac{1}{p(1)}} \int_{1-\delta_2}^x (1-y)^{-\frac{1}{p(1)}-1} dy + 2(1-x)^{\frac{1}{p(1)}-1+\gamma} \int_x^1 (1-y)^{-\frac{1}{p(1)}-\gamma} dy <$$

$$2p(1)(1-x)^{\frac{1}{p(1)}} (1-x)^{-\frac{1}{p(1)}} + 2(1-x)^{\frac{1}{p(1)}-1+\gamma} \frac{(1-x)^{-\frac{1}{p(1)}-\gamma+1}}{-\frac{1}{p(1)}-\gamma+1} =$$

$$2p(1) + \frac{2}{\frac{1}{q(1)}-\gamma} \leq c(\alpha, \beta, p), \quad (111)$$

$$F_4(y) \leq \int_{1-\delta_2}^1 \left(\frac{1-y}{1-x} \right)^{\frac{1}{q(1)}} \frac{2dx}{(1-y)^{\gamma}((1-y)^{1-\gamma} + (1-x)^{1-\gamma})} <$$

$$2(1-y)^{-\frac{1}{q(1)}} \int_{1-\delta_2}^y (1-x)^{-\frac{1}{p(1)}-1+\gamma} dx + 2(1-y)^{\frac{1}{q(1)}-1} \int_y^1 (1-x)^{-\frac{1}{q(1)}} dx <$$

$$\frac{2(1-y)^{\frac{1}{q(1)}-\gamma}}{\frac{1}{q(1)}-\gamma} \left[(1-y)^{-\frac{1}{q(1)}+\gamma} - \delta_2^{-\frac{1}{q(1)}+\gamma} \right] + 2(1-y)^{\frac{1}{q(1)}-1} \frac{(1-y)^{\frac{1}{p(1)}}}{1/p(1)} \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (112)$$

Из (84), (108), (111), (112) имеем

$$J \leq c(\alpha, \beta, p) \|g\|_{q(1)}([1-\delta_2, 1]) \|Z\|_{p(1)}([1-\delta_2, 1]) \leq$$

$$c(\alpha, \beta, p) \|B_n \mu^{\frac{1}{p(1)}} f\|_{p(1)}([1-\delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p) \|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p).$$

Сопоставляя эту оценку с (107), выводим

$$\|Q(f)\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (113)$$

Оценки (104) и (113) и неравенство (101) дают

$$\|\sigma_{42}(f)\|_{p(\cdot)}([1 - \delta_2, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (114)$$

а из (100) и (114) получаем

$$\|\sigma_{42}(f)\|_{p(\cdot)}([0, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (115)$$

Сопоставляя (94) и (115) с (86), убеждаемся в справедливости утверждения леммы 5.2 при $i = 4$. Итак, лемма 5.2 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\alpha, \beta > -1/2$, $\mu = \mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $p \in \mathcal{P}(-1, 1)$, $4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$, $4\frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1}$. Тогда суммы Фурье-Якоби $S_n^{\alpha, \beta}(f)$ ($n = 0, 1, \dots$) равномерно ограничены в весовом пространстве Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ с переменным показателем p . Другими словами, найдется такое положительное число $c(\alpha, \beta, p)$, зависящее только от указанных параметров α, β и p , что для произвольной функции $f \in L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$ имеет место оценка

$$\|S_n^{\alpha, \beta}(f)\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p)\|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]). \quad (116)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку сумма Фурье-Якоби $S_n^{\alpha, \beta}(f)$ представляет собой линейный оператор в пространстве $L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$, то, очевидно, достаточно проверить справедливость оценки (116) для таких функций $f \in L_\mu^{p(x)}([-1, 1])$, для которых $\|f\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 1]) \leq 1$. Но в этом случае мы можем воспользоваться неравенством (33) и леммой 5.2. Это дает

$$\|S_n^{\alpha, \beta}(f)\|_{p(\cdot), \mu}([0, 1]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (117)$$

С другой стороны, если мы определим функцию g равенством $g(x) = f(-x)$, то с помощью равенства (23) нетрудно проверить, что

$$S_n^{\alpha, \beta}(f, -x) = S_n^{\beta, \alpha}(g, x). \quad (118)$$

Введем новый переменный показатель $s = s(x) = p(-x)$, тогда в силу (118)

$$\int_{-1}^0 |S_n^{\alpha, \beta}(f, x)|^{p(x)} \mu(x) dx = \int_0^1 |S_n^{\beta, \alpha}(g, x)|^{s(x)} \mu(x) dx. \quad (119)$$

Поскольку переменный показатель s вместе с p удовлетворяет всем условиям леммы 5.2, то имеет место оценка

$$\int_0^1 |S_n^{\beta, \alpha}(g, x)|^{s(x)} \mu(x) dx \leq c(\beta, \alpha, s). \quad (120)$$

Из (119) и (120) находим $\int_{-1}^0 |S_n^{\alpha, \beta}(f, x)|^{p(x)} \mu(x) dx \leq c(\alpha, \beta, p)$, а это неравенство эквивалентно неравенству

$$\|S_n^{\alpha, \beta}(f)\|_{p(\cdot), \mu}([-1, 0]) \leq c(\alpha, \beta, p). \quad (121)$$

Сопоставляя (121) с (117), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнены условия теоремы 2.1, то система ортонормированных полиномов Якоби $\{p_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ с $\alpha, \beta > -1/2$ является базисом пространства $L_{\mu}^{p(x)}([-1, 1])$, где $\mu = \mu(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, и, как следствие, $\|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{p(\cdot),\mu}([-1, 1]) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для произвольной функции $f \in L_{\mu}^{p(x)}([-1, 1])$.

Список литературы

- [1] Шарапудинов И.И. О базисности ультрасферических полиномов Якоби в весовом пространстве Лебега с переменным показателем // Математические заметки (Статья представлена в журнал)
- [2] Шарапудинов И.И. О топологии пространства $L^{p(x)}([0, 1])$ // Математические заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632.
- [3] Pollard H. The mean convergence of orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 62. Issue 2. Pp. 387–403.
- [4] Pollard H. The mean convergence of orthogonal series. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 63. Issue 2. Pp. 355–367.
- [5] Pollard H. The mean convergence of orthogonal series. III // Duke Math. J. 1949. Vol. 16. Issue 1. Pp. 189–191.
- [6] Newman J., Rudin W. Mean convergence of orthogonal series // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 3. Issue 2. Pp. 219–222.
- [7] Muckenhoupt B. Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 23. Issue 2. Pp. 306–310.
- [8] Шарапудинов И.И. О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве Лебега $L^{p(x)}(-1, 1)$ с переменным показателем $p(x)$ // Математический сборник. 2009. Т. 200, вып. 1. С. 137–160.
- [9] Шарапудинов И.И. О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем // Математический сборник. 1986. Т. 130(172), вып. 2(6), С. 275–283.
- [10] Шарапудинов И.И. О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки // Математические заметки. 1996. Т. 59, вып. 2. С. 291–302.
- [11] Шарапудинов И.И. Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}$ // Analysis Mathematica. 2007. Т. 33, вып. 2. С. 135–153.
- [12] Шарапудинов И.И. Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Итоги науки. Юг России. Серия: Математическая монография. Владикавказский научный центр РАН и правительства Северной Осетии-Алании. Владикавказ. 2012. Т. 5.
- [13] Шарапудинов И.И. Приближение функций в $L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами // Известия РАН: Серия математическая. 2013. Т. 77, вып. 2. С. 197–224.
- [14] Lars Diening, Petteri Harjulehto, Peter Hästö, Michael Růžička Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 2017.
- [15] David V. Cruz-Uribe, Alberto Fiorenza Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis // Applied and Numerical Harmonic Analysis. Springer Basel. 2013. Vol. 4968.
- [16] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Москва. Мир. 1965.
- [17] Г. Сеге Ортогональные многочлены. Физматгиз. Москва. 1962.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)

Дагестанский научный центр РАН,
Дагестанский государственный педагогический
университет

E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию

1.11.2017

Т. Н. Шах-Эмиров (T. N. Shakh-Emirov)

Дагестанский научный центр РАН

E-mail: tadgius@gmail.com