

УДК 517.521.2

Г. Г. Акниев

Приближение кусочно-линейных функций дискретными суммами Фурье

Пусть $N \geq 1$ — некоторое натуральное число. Выберем N равномерно расположенных точек $t_k = 2\pi k/N$ ($0 \leq k \leq N-1$) на $[0, 2\pi]$. Обозначим через $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$ ($1 \leq n \leq N/2$) тригонометрический полином порядка n , обладающий наименьшим квадратическим отклонением от f относительно системы $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. В данной статье рассмотрена проблема приближения функций полиномами $L_{n,N}(f, x)$. Особое внимание удалено приближению 2π -периодических функций f_1 и f_2 , где $f_1(x) = |x|$ и $f_2(x) = \operatorname{sign} x$ для $x \in [-\pi, \pi]$. Для функции f_1 вместо оценки $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c \ln n/n$, которая следует из известного неравенства Лебега для полиномов $L_{n,N}(f, x)$, найдена точная по порядку оценка $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c/n$ ($x \in \mathbb{R}$) равномерная относительно $1 \leq n \leq N/2$. Также была найдена локальная оценка $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c(\varepsilon)/n^2$ ($|x - \pi k| \geq \varepsilon$), которая также равномерна относительно $1 \leq n \leq N/2$. Для второй функции f_2 найдена только локальная оценка $|f_2(x) - L_{n,N}(f_2, x)| \leq c(\varepsilon)/n$ ($|x - \pi k| \geq \varepsilon$), равномерная относительно $1 \leq n \leq N/2$. Доказательства этих оценок основаны на сравнении аппроксимативных свойств дискретных и непрерывных сумм Фурье.

Библиография: 14 названий.

Let N be a natural number greater than 1. We select N uniformly distributed points $t_k = 2\pi k/N$ ($0 \leq k \leq N-1$) on $[0, 2\pi]$. Denote by $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$ ($1 \leq n \leq N/2$) the trigonometric polynomial of order n possessing the least quadratic deviation from f with respect to the system $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. In the present article the problem of function approximation by the polynomials $L_{n,N}(f, x)$ is considered. Special attention is paid to approximation of 2π -periodic functions f_1 and f_2 by the polynomials $L_{n,N}(f, x)$, where $f_1(x) = |x|$ and $f_2(x) = \operatorname{sign} x$ for $x \in [-\pi, \pi]$. For the first function f_1 we show that instead of the estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c \ln n/n$ which follows from well-known Lebesgue inequality for the polynomials $L_{n,N}(f, x)$ we found an exact order estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c/n$ ($x \in \mathbb{R}$) which is uniform with respect to $1 \leq n \leq N/2$. Moreover, we found a local estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c(\varepsilon)/n^2$ ($|x - \pi k| \geq \varepsilon$) which is also uniform with respect to $1 \leq n \leq N/2$. For the second function f_2 we found only a local estimate $|f_2(x) - L_{n,N}(f_2, x)| \leq c(\varepsilon)/n$ ($|x - \pi k| \geq \varepsilon$) which is uniform with respect to $1 \leq n \leq N/2$. The proofs of these estimations based on comparing of approximating properties of discrete and continuous finite Fourier series.

Bibliography: 14 items.

Ключевые слова: приближение функций, тригонометрические полиномы, ряды Фурье.

Keywords: function approximation, trigonometric polynomials, Fourier series.

1. Результаты

Пусть $N \geq 1$ — некоторое натуральное число. Выберем точки $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$ на $[0, 2\pi]$, где $t_k = 2\pi k/N$, и обозначим через $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$ ($1 \leq n \leq \lfloor N/2 \rfloor$) тригонометрический полином порядка n обладающий наименьшим квадратическим отклонением от f относительно системы $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Другими словами, минимум суммы $\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$ на множестве всех тригонометрических полиномов T_n порядка n достигается, когда $T_n = L_{n,N}(f)$. В частности, $L_{\lfloor N/2 \rfloor, N}(f, t_k) = f(t_k)$. Легко показать (смотри [12]), что для $n < N/2$ полином $L_{n,N}(f, x)$ может быть представлен в следующем виде:

$$L_{n,N}(f, x) = \sum_{\nu=-n}^n c_\nu^{(N)}(f) e^{i\nu x}, \quad c_\nu^{(N)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\nu t_k},$$

а для $n = N/2$ (когда N — четное)

$$L_{N/2, N}(f, x) = L_{N/2-1, N}(f, x) + a_{N/2}^{(N)}(f) \cos N/2(x - u), \quad (1)$$

где

$$a_n^{(2n)}(f) = a_{N/2}^{(N)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cos N/2(t_k - u). \quad (2)$$

Прочитать подробнее про приближение функций тригонометрическими полиномами можно в работах [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14]. В данной работе были получены оценки для $|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)|$ и $|L_{n,N}(f_2, x) - f_2(x)|$ для $n, N \rightarrow \infty$, где $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \text{sign } x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $f_1(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ и $n \leq \lfloor N/2 \rfloor$. Справедливы следующие оценки:

$$|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)| \leq c/n, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)| \leq c(\varepsilon)/n^2, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $f_2(x) = \text{sign } x$, $x \in [-\pi, \pi]$ и $n \leq \lfloor N/2 \rfloor$. Справедлива следующая оценка:

$$|L_{n,N}(f_2, x) - f_2(x)| \leq c(\varepsilon)/n, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Начнем с некоторых обозначений. Обозначим через

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

коэффициенты Фурье для функции f , и обозначим через

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}, \quad S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$$

ряд Фурье функции f и его частичную сумму порядка n соответственно. Через $\Delta^I(\varepsilon)$ обозначим множество $[-\pi + \varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < \pi/2$. Также через $c(\varepsilon)$ будем обозначать некоторые константы, зависящие только от указанных параметров и, вообще говоря, разные в разных местах.

Лемма 1.1 [12]. Если ряд Фурье функции f сходится в точках $t_k = u + 2k\pi/N$, тогда имеет место представление

$$L_{n,N}(f, x) = S_n(f, x) + R_{n,N}(f, x),$$

где

$$R_{n,N}(f, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cos \mu N(u-t) f(t) dt, \quad (3)$$

когда $2n < N$.

Из этой леммы можно получить следующую оценку:

$$|L_{n,N}(f, x) - f(x)| \leq |S_n(f, x) - f(x)| + |R_{n,N}(f, x)|, \quad n < N/2. \quad (4)$$

Для случая $2n = N$ из (1) и (4) имеем

$$\begin{aligned} |L_{n,2n}(f, x) - f(x)| &\leq \\ &|S_{n-1}(f, x) - f(x)| + |R_{n-1,2n}(f, x)| + |a_n^{(2n)}(f)|, \quad n = N/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) видно, что оценив $|S_n(f_1, x) - f_1(x)|$, $|S_n(f_2, x) - f_2(x)|$, $|R_{n,N}(f_1, x)|$, $|R_{n,N}(f_2, x)|$, $|a_n^{(2n)}(f_1)|$, и $|a_n^{(2n)}(f_2)|$ мы получим оценку $|L_{n,N}(f, x) - f(x)|$ для функций f_1 и f_2 .

2. Численные эксперименты

Нами были проведены численные эксперименты, которые подтвердили полученные в статье теоретические результаты. Ниже приведены графики, полученные для функций $f_1(x) = |x|$ и $f_2(x) = \text{sign } x$ (черный график — исходная функция, красный график — это суммы $L_{n,N}(f, x)$):

Рис. 1. $L_{n,N}(f_1, x)$, $N = 8$, $n = 4$

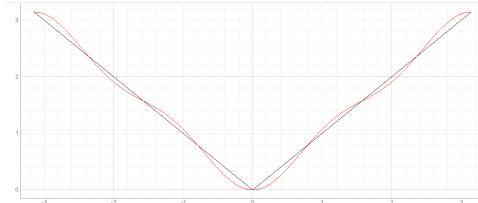


Рис. 2. $L_{n,N}(f_1, x)$, $N = 32$, $n = 16$

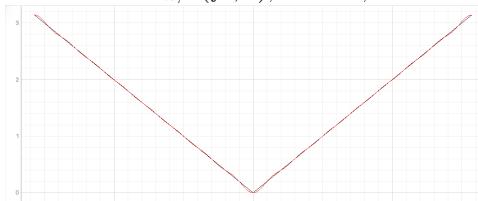


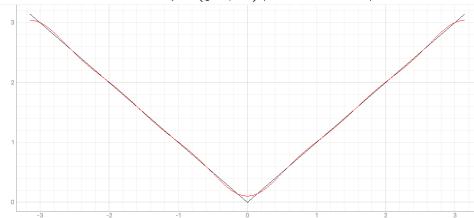
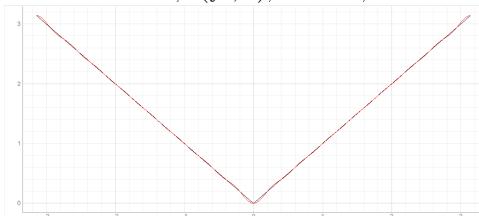
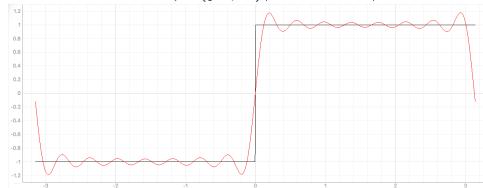
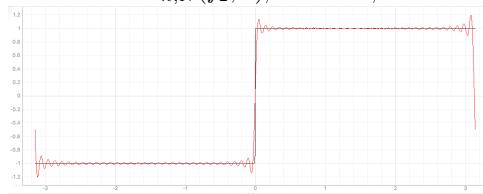
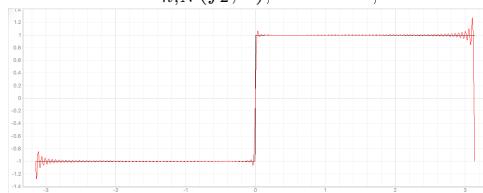
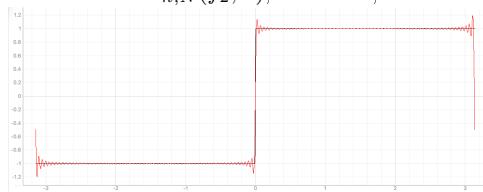
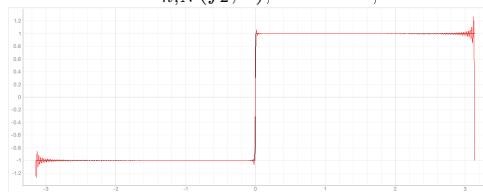
Рис. 3. $L_{n,N}(f_1, x)$, $N = 128$, $n = 6$ Рис. 4. $L_{n,N}(f_1, x)$, $N = 32$, $n = 16$ Рис. 5. $L_{n,N}(f_2, x)$, $N = 8$, $n = 4$ Рис. 6. $L_{n,N}(f_2, x)$, $N = 32$, $n = 16$ Рис. 7. $L_{n,N}(f_2, x)$, $N = 32$, $n = 8$ 

Рис. 8. $L_{n,N}(f_2, x)$, $N = 256$, $n = 16$ Рис. 9. $L_{n,N}(f_2, x)$, $N = 256$, $n = 64$ Рис. 10. $L_{n,N}(f_2, x)$, $N = 256$, $n = 128$ Рис. 11. $L_{n,N}(f_2, x)$, $N = 512$, $n = 128$ Рис. 12. $L_{n,N}(f_2, x)$, $N = 512$, $n = 256$ 

Список литературы

- [1] Бернштейн С.Н. О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов // Докл. АН СССР. 1934. Т. 4. С. 1–5.
- [2] Courant R. Differential and Integral Calculus. New Jersey: Wiley-Interscience. 1988. Т. 1. 704 с.
- [3] Erdős P. Some theorems and remarks on interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) 1950. Т. 12. Рр. 11–17.
- [4] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ФИЗМАТЛИТ. 1969. Т. 3. 656 с.
- [5] Калашников М.Д. О полиномах наилучшего (квадратического) приближения в заданной системе точек // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. С. 634–636.
- [6] Крылов В.И. Сходимость алгебраического интерполирования по корням многочлена Чебышева для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. С. 362–365.
- [7] Магомед-Касумов М.Г. Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Мат. заметки. Т. 100, вып. 2, 2016. С. 229–244. DOI:10.1134/S000143461607018X
- [8] Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) 1936. Vol. 8. Pp. 127–130. (in French)
- [9] Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynômes d'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged) 1936. Vol. 8. Pp. 131–135. (in French)
- [10] Natanson I.P. On the Convergence of Trigonometrical Interpolation at Equi-Distant Knots. // Annals of Mathematics, Second Series. Vol. 45. N 3. Pp. 457–471. DOI:10.2307/1969188.
- [11] Никольский С.М. О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. С. 509–520.
- [12] Sharapudinov I.I. On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Anal. Math. V. 9. Issue 3. Pp. 223–234.
- [13] Тураецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. Минск: Вышэйшая школа. 1968. 320 с.
- [14] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир. 1965. Т. 1. 616 с.

Г. Г. Акниев (G. G. Akniyev)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: hasan.akniyev@gmail.com

Поступила в редакцию
19.10.2017