

УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

Перекрывающие преобразования для приближения непрерывных функций посредством повторных средних Валле Пуссена

На основе тригонометрических сумм Фурье $S_n(f, x)$ и классических средних Валле Пуссена

$${}_1V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{l=m}^{m+n-1} S_l(f, x)$$

в настоящей статье вводятся повторные средние Валле Пуссена следующим образом

$${}_2V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_1V_{n,k}(f, x),$$

$${}_{l+1}V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_lV_{n,k}(f, x) \quad (l \geq 1).$$

На основе средних ${}_2V_{n,m}(f, x)$ и перекрывающих преобразований сконструированы операторы, осуществляющие приближения непрерывных (вообще говоря, непериодических) функций и исследованы их аппроксимативные свойства.

Библиография: 10 названий.

On the basis of trigonometric sums of Fourier $S_n(f, x)$ and classical means of Valle Poussin

$${}_1V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{l=m}^{m+n-1} S_l(f, x)$$

in this paper, repeated mean Valle Poussin is introduced as follows

$${}_2V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_1V_{n,k}(f, x),$$

$${}_{l+1}V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_lV_{n,k}(f, x) \quad (l \geq 1).$$

On the basis of the mean ${}_2V_{n,m}(f, x)$ and overlapping transforms, operators that approximate continuous (in general, nonperiodic) functions are constructed and their approximative properties are investigated.

Bibliography: 10 items.

Ключевые слова: повторные средние Валле Пуссена, перекрывающие преобразования, локальные аппроксимативные свойства.

Keywords: the repeated mean Valle Poussin, overlapping transforms, local approximative properties.

Введение

Пусть f – 2π -периодическая функция, интегрируемая на периоде,

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$

– коэффициенты Фурье,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1)$$

– ряд Фурье функции f . Далее, пусть $A_k(f) = A_k(f, x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$,

$$S_n(f) = S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k(f, x) \quad (2)$$

– сумма Фурье,

$${}_1 V_{n,m}(f) = {}_1 V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} [S_m(f, x) + \cdots + S_{m+n-1}(f, x)] \quad (3)$$

– средние Валле Пуссена. Повторные средние Валле Пуссена (средние Валле Пуссена второго порядка) определим с помощью равенства

$${}_2 V_{n,m}(f) = {}_2 V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} [{}_1 V_{n,m}(f, x) + \cdots + {}_1 V_{n,m+n-1}(f, x)]. \quad (4)$$

Непосредственно из равенств (3) и (4) следует, что если $T_m = T_m(x)$ – произвольный тригонометрический полином порядка m , то

$${}_1 V_{n,m}(T_m) = T_m, \quad {}_2 V_{n,m}(T_m) = T_m. \quad (5)$$

Другими словами, оператор ${}_2 V_{n,m} = {}_2 V_{n,m}(f)$ также, как и оператор ${}_1 V_{n,m} = {}_1 V_{n,m}(f)$, является проектором на пространство тригонометрических полиномов T_m порядка m . Отметим также, что в силу (2) – (4) ${}_2 V_{n,m}(f)$ допускает следующее представление

$$\begin{aligned} {}_2 V_{n,m}(f, x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m A_k(f, x) + \\ &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n^2 - k(k+1)}{2n^2} A_{m+k}(f, x) + \\ &\sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-j)(n-j-1)}{2n^2} A_{m+n+j}(f, x) \end{aligned}$$

или, что то же,

$${}_2 V_{n,m}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m A_k(f, x) +$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m+1}^{m+n-1} \frac{2n^2 - (k-m)(k-m+1)}{2n^2} A_k(f, x) + \\ & \sum_{k=m+n}^{m+2n-2} \frac{(m+2n-k)(m+2n-k-1)}{2n^2} A_k(f, x). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (3) и (4) вытекают следующие интегральные представления для операторов ${}_1V_{n,m}(f)$ и ${}_2V_{n,m}(f)$:

$${}_1V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) {}_1v_{n,m}(t) dt, \quad (7)$$

$${}_2V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) {}_2v_{n,m}(t) dt, \quad (8)$$

где

$${}_1v_{n,m}(u) = \frac{1}{n} [D_m(u) + \dots + D_{m+n-1}(u)], \quad (9)$$

$${}_2v_{n,m}(u) = \frac{1}{n} [{}_1v_{n,m}(u) + \dots + {}_1v_{n,m+n-1}(u)], \quad (10)$$

а

$$D_k(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \dots + \cos ku = \frac{\sin(k + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad (11)$$

– ядро Дирихле. Из (9) и (11) легко выводится следующие хорошо известные (см., например, [2]) равенства

$${}_1v_{n,m}(u) = \frac{\cos mu - \cos(m+n)u}{4n \sin^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin \frac{nu}{2} \sin(2m+n)\frac{u}{2}}{2n \sin^2 \frac{u}{2}}. \quad (12)$$

Из (10) и (12) имеем

$$\begin{aligned} {}_2v_{n,m}(u) &= \frac{1}{4n^2 \sin^2 \frac{u}{2}} \left(\sum_{k=m}^{m+n-1} \cos ku - \sum_{k=m}^{m+n-1} \cos(k+n)u \right) = \frac{1}{8n^2 \sin^3 \frac{u}{2}} \times \\ &\left(\sin(m+n - \frac{1}{2})u - \sin(m - \frac{1}{2})u - \sin(m+2n - \frac{1}{2})u + \sin(m+n - \frac{1}{2})u \right) = \\ &\frac{\sin \frac{nu}{2}}{4n \sin^3 \frac{u}{2}} \left(\cos(2m+n-1)\frac{u}{2} - \cos(2m+3n-1)\frac{u}{2} \right), \end{aligned}$$

поэтому

$${}_2v_{n,m}(u) = \frac{\sin^2 \frac{nu}{2} \sin(m+n - \frac{1}{2})u}{2n^2 \sin^3 \frac{u}{2}}. \quad (13)$$

Интегральные представления (7) и (8) с учётом (12) и (13) принимают следующий вид

$${}_1V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin \frac{nt}{2} \sin(2m+n)\frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt, \quad (14)$$

$${}_2V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2} \sin(2m+2n-1)\frac{t}{2}}{\sin^3 \frac{t}{2}} dt. \quad (15)$$

Равенство (14) хорошо известно и широко использовалось в [2] при исследовании аппроксимативных свойств операторов ${}_1V_{n,m}(f)$ в различных функциональных пространствах. Что же касается представления (15), то оно, как и сами операторы ${}_2V_{n,m}(f)$, насколько известно автору, является новым.

Отметим, что повторные средние Валле Пуссена ${}_kV_{n,m}(f, x)$, введенные выше для $k = 2$, допускают дальнейшее обобщение на $k \geq 2$ методом индукции следующим образом

$${}_kV_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} [{}_{k-1}V_{n,m}(f, x) + \cdots + {}_{k-1}V_{n,m+n-1}(f, x)], \quad (16)$$

например, при $k = 3$ мы можем записать

$${}_3V_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} [{}_2V_{n,m}(f, x) + \cdots + {}_2V_{n,m+n-1}(f, x)]. \quad (17)$$

Нетрудно также получить для ${}_kV_{n,m}(f, x)$ интегральное представление, аналогичное (8) или (15). К примеру, для $k = 3$ из (15) и (17) имеем

$$\begin{aligned} {}_3V_{n,m}(f, x) &= \frac{1}{2\pi n^3} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2} \sum_{l=m}^{m+n-1} \sin(l+n-\frac{1}{2})t}{\sin^3 \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi n^3} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin^3 \frac{nt}{2} \sin(2m+3n-2)\frac{t}{2}}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt, \end{aligned} \quad (18)$$

и, вообще, если $k \geq 2$, то

$${}_kV_{n,m}(f, x) = \frac{1}{2\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin^k \frac{nt}{2} \sin(2m+k(n-1)+1)\frac{t}{2}}{\sin^{k+1} \frac{t}{2}} dt. \quad (19)$$

Обозначим через $C_{2\pi}$ пространство непрерывных 2π -периодических функций f с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)|$ и рассмотрим ${}_1V_{n,m} = {}_1V_{n,m}(f)$ и ${}_2V_{n,m} = {}_2V_{n,m}(f)$ как операторы, действующие в нормированном пространстве $C_{2\pi}$. Из интегральных представлений (14) и (15) непосредственно следует, что нормы этих операторов равны:

$$\|{}_1V_{n,m}\| = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin \frac{nt}{2} \sin(2m+n)\frac{t}{2}|}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt, \quad (20)$$

$$\|{}_2V_{n,m}\| = \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2} |\sin(m+n-\frac{1}{2})t|}{|\sin^3 \frac{t}{2}|} dt. \quad (21)$$

Из (5), (14) и (15) непосредственно вытекают следующие неравенства

$$\|f - {}_1V_{n,m}(f)\| \leq E_m(f)(1 + \|{}_1V_{n,m}\|), \quad (22)$$

$$\|f - {}_2V_{n,m}(f)\| \leq E_m(f)(1 + \|{}_2V_{n,m}\|), \quad (23)$$

где $E_m(f)$ – наилучшее приближение функции $f \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами T_m порядка m . Величина $\|{}_1V_{n,m}\|$ достаточно хорошо изучена в [2]–[3]. Например, в [2] установлена следующая оценка

$$\|{}_1V_{n,m}\| \leq \frac{4}{\pi^2} \ln \left(1 + \frac{m+n}{n} \right) + 1, 7. \quad (24)$$

С другой стороны, из (8) и (10) следует, что

$$\|{}_2V_{n,m}\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} \|{}_1V_{n,k}\|. \quad (25)$$

Из (24) и (25) выводим

$$\|{}_2V_{n,m}\| \leq \frac{4}{\pi^2} \ln \left(3 + \frac{m-1}{n} \right) + 1, 7. \quad (26)$$

Оценка (26), скорее всего, не является окончательной, но этот вопрос в настоящей статье рассматриваться не будет. Мы сосредоточим внимание на исследовании локальных аппроксимативных свойств повторных средних Валле Пуссена ${}_2V_{n,m}(f, x)$ для кусочно-гладких функций, которые, как показано в п.2 настоящей работы, существенно отличаются от соответствующих свойств сумм Фурье $S_k(f, x)$ и классических средних Валле Пуссена ${}_1V_{n,m}(f, x)$. Это свойство делает ${}_2V_{n,n}(f, x)$ весьма привлекательным инструментом решения важных прикладных задач таких, например, как конструирование цифровых фильтров, обработка и сжатие речи и т.д.

1. Некоторые вспомогательные результаты

Через $W_1^r(a, b)$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций f , $r - 1$ -раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}$ интегрируема на $[a, b]$. В дальнейшем нам понадобятся некоторые классы кусочно-гладких 2π -периодических функций, которых мы определим в настоящем разделе. Пусть $0 \leq r$ – целое, $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_s < x_{s+1} = \pi$, $f(x)$ – непрерывная 2π -периодическая функция такая, что $f \in W_1^{r+1}(x_j, x_{j+1})$ для каждого $j = 0, \dots, s$. Множество всех таких функций мы обозначим через \mathcal{I}_Ω^r , где $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_s, x_{s+1}\}$. Характерным элементом пространства \mathcal{I}_Ω^r с $\Omega = \{-\pi, 0, \pi\}$ является функция $f(x)$, равная $|x|$ при $|x| \leq 1$ и продолженная 2π -периодически. Нетрудно увидеть, что если $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$, то она абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, но при этом вполне может быть так, что для $x \in \Omega$ производная $f'(x)$ не существует. Если функция $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$, то будем называть её кусочно-гладкой (порядка $r + 1$). Исследование локальных аппроксимативных свойств повторных средних Валле Пуссена ${}_2V_{n,n}(f, x)$ для функций $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$ является основной задачей настоящей работы. Для этого нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Если $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и допускает представление

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (27)$$

Положим

$$R_m(f, x) = f(x) - S_m(f, x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (28)$$

и заметим, что для коэффициентов Фурье при $k > 0$ можно записать следующие равенства

$$a_k(f) = -\frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin kt = -\frac{1}{k} b_k(f'), \quad (29)$$

$$b_k(f) = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt = \frac{1}{k} a_k(f'), \quad (30)$$

Из (28) – (30) имеем

$$R_m(f, x) = f(x) - S_m(f, x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k(f') \sin kx - b_k(f') \cos kx). \quad (31)$$

Далее запишем

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin kt = \sum_{j=0}^s b_k^j(f'), \quad (32)$$

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt = \sum_{j=0}^s a_k^j(f'), \quad (33)$$

где

$$a_k^j(f') = \frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t) \cos kt, \quad (34)$$

$$b_k^j(f) = \frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t) \sin kt, \quad (35)$$

тогда из (31) – (35) имеем

$$R_m(f, x) = \sum_{j=0}^s \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k^j(f') \sin kx - b_k^j(f') \cos kx). \quad (36)$$

Если $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$, то, r -кратно применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$a_k^j(f') \sin kx - b_k^j(f') \cos kx = -\frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t) \sin k(t-x) dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t) \cos[k(t-x) + \frac{\pi}{2}] dt =$$

$$\frac{1}{\pi k} (f'(x_{j+1}-0) \sin[k(x-x_{j+1}) + \frac{\pi}{2}] - f'(x_j+0) \sin[k(x-x_j) + \frac{\pi}{2}])$$

$$-\frac{1}{\pi k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f''(t) \sin[k(t-x) + \frac{\pi}{2}] dt =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi k} \left(f'(x_j + 0) \cos[k(x - x_j) + \frac{2\pi}{2}] - f'(x_{j+1} - 0) \cos[k(x - x_{j+1}) + \frac{2\pi}{2}] \right) \\
& + \frac{1}{\pi k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f''(t) \cos[k(t - x) + \frac{2\pi}{2}] dt = \\
& \quad \dots \\
& = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{k^\nu} f^{(\nu)}(x_j + 0) \cos \left(k(x - x_j) + \frac{(\nu+1)\pi}{2} \right) \\
& - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{k^\nu} f^{(\nu)}(x_{j+1} - 0) \cos \left(k(x - x_{j+1}) + \frac{(\nu+1)\pi}{2} \right) \\
& + \frac{1}{\pi k^r} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f^{(r+1)}(t) \cos \left(k(t - x) + \frac{\pi(r+1)}{2} \right) dt. \tag{37}
\end{aligned}$$

Из (36) и (37) мы заключаем, что справедлива

ЛЕММА 1.1. *Если $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$, то имеет место равенство*

$$R_l(f, x) = \hat{R}_l(f, x) + \tilde{R}_l(f, x), \tag{38}$$

в котором

$$\begin{aligned}
\hat{R}_l(f, x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^s \sum_{\nu=1}^r f^{(\nu)}(x_j + 0) \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\cos \left(k(x - x_j) - \frac{(\nu+1)\pi}{2} \right)}{k^{\nu+1}} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^s \sum_{\nu=1}^r f^{(\nu)}(x_{j+1} - 0) \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\cos \left(k(x - x_{j+1}) - \frac{(\nu+1)\pi}{2} \right)}{k^{\nu+1}}, \tag{39}
\end{aligned}$$

$$\tilde{R}_l(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r+1)}(t) \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\cos \left(k(t - x) + \frac{\pi(r+1)}{2} \right)}{k^{r+1}} dt. \tag{40}$$

Положим

$${}_1 R_{n,m}(f, x) = f(x) - {}_1 V_{n,m}(f, x), \tag{41}$$

$${}_2 R_{n,m}(f, x) = f(x) - {}_2 V_{n,m}(f, x) \tag{42}$$

и заметим, что из (1) – (4) и (28), (13) и (42) вытекают следующие равенства

$${}_1 R_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} R_k(f, x),$$

$${}_2 R_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_1 R_{n,k}(f, x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=m}^{m+n-1} \sum_{l=k}^{k+n-1} R_l(f, x).$$

Если теперь обратимся к лемме 1.1, то эти равенства можно переписать так

$${}_1 R_{n,m}(f, x) = {}_1 \hat{R}_{n,m}(f, x) + {}_1 \tilde{R}_{n,m}(f, x), \tag{43}$$

$${}_2R_{n,m}(f, x) = {}_2\hat{R}_{n,m}(f, x) + {}_2\tilde{R}_{n,m}(f, x), \quad (44)$$

где

$${}_1\hat{R}_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{l=m}^{m+n-1} \hat{R}_l(f, x), \quad {}_1\tilde{R}_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{l=m}^{m+n-1} \tilde{R}_l(f, x), \quad (45)$$

$${}_2\hat{R}_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=m}^{m+n-1} \sum_{l=k}^{k+n-1} \hat{R}_l(f, x), \quad (46)$$

$${}_2\tilde{R}_{n,m}(f, x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=m}^{m+n-1} \sum_{l=k}^{k+n-1} \tilde{R}_l(f, x), \quad (47)$$

а величины $\hat{R}_l(f, x)$ и $\tilde{R}_l(f, x)$ определены равенствами (39) и (40). Займемся вопросом об оценках для этих двух величин, остановившись сначала на $\tilde{R}_l(f, x)$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$. Тогда имеет место оценка

$$|\tilde{R}_l(f, x)| \leq \frac{c(r)}{l^r} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r+1)}(t)| dt. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к равенству (47), из которого находим

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_l(f, x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r+1)}(t) \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\cos(k(t-x) + \frac{\pi(r+1)}{2})}{k^{r+1}} dt \right| \leq . \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r+1)}(t)| dt \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} \leq \frac{c(r)}{l^r} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r+1)}(t)| dt. \end{aligned}$$

Лемма 1.2 доказана.

ЛЕММА 1.3. Пусть $r \geq 3$, $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$. Тогда имеет место оценка

$$|{}_2\tilde{R}_l(f, x)| \leq \frac{c(r)I_r(f)}{(m+n)^2 m^{r-2}}, \quad |{}_1\tilde{R}_l(f, x)| \leq \frac{c(r)I_r(f)}{(m+n)m^{r-1}}$$

$$\text{здесь } I_r(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r+1)}(t)| dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к равенству (47). Тогда в силу леммы 1.2 имеем

$$\begin{aligned} |{}_2\tilde{R}_l(f, x)| &\leq |{}_2\hat{R}_l(f, x)| + |{}_2\tilde{R}_l(f, x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=m}^{m+n-1} \sum_{l=k}^{k+n-1} \frac{c(r)I_r(f)}{l^r} \leq \frac{c(r)I_r(f)}{(m+n)^2 m^{r-2}}. \end{aligned}$$

Аналогично, используя второе из равенств (45), выводим оценку для $|{}_1\tilde{R}_l(f, x)|$. Лемма 1.3 доказана.

Прежде, чем перейти к вопросу об оценках для величин $|\hat{R}_l(f, x)|$, $|_1\hat{R}_l(f, x)|$ и $|_2\hat{R}_l(f, x)|$, мы предварительно докажем некоторые вспомогательные утверждения. Положим

$$\mathcal{K}_l^\nu(u) = \sum_{z=l+1}^{\infty} \frac{\cos(zu + \frac{\nu\pi}{2})}{z^\nu}, \quad (49)$$

$${}_1\mathcal{K}_{n,m}^\nu(u) = \frac{1}{n} \sum_{l=m}^{m+n-1} \mathcal{K}_l^\nu(u), \quad (50)$$

$${}_2\mathcal{K}_{n,m}^\nu(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_1\mathcal{K}_{n,k}^\nu(u) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=m}^{m+n-1} \sum_{l=k}^{k+n-1} \mathcal{K}_l^\nu(u). \quad (51)$$

ЛЕММА 1.4. *Имеют место следующие равенства*

$$\begin{aligned} {}_1\mathcal{K}_{n,k}^{2\mu}(u) &= \\ \frac{(-1)^\mu}{n} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} &\frac{\sin \frac{\lambda}{2} u \sin \frac{\kappa}{2} u \cos(k + \frac{\kappa+\lambda}{2}) u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \Delta^2 g_\mu(k + \kappa + \lambda - 1) \\ + \frac{(-1)^{\mu-1}}{n} \sum_{\kappa=1}^{\infty} &\frac{\sin \frac{n}{2} u \sin \frac{\kappa}{2} u \cos(k + \frac{\kappa+n}{2}) u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \Delta g_\mu(k + n + \kappa - 1), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} {}_1\mathcal{K}_{n,k}^{2\mu-1}(u) &= \\ \frac{(-1)^\mu}{n} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} &\frac{\sin \frac{\lambda}{2} u \sin \frac{\kappa}{2} u \sin(k + \frac{\kappa+\lambda}{2}) u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \Delta^2 q_\mu(k + \kappa + \lambda - 1) \\ + \frac{(-1)^{\mu-1}}{n} \sum_{\kappa=1}^{\infty} &\frac{\sin \frac{n}{2} u \sin \frac{\kappa}{2} u \sin(k + \frac{\kappa+n}{2}) u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \Delta q_\mu(k + n + \kappa - 1), \end{aligned} \quad (53)$$

$\varepsilon de g_\mu(t) = t^{-2\mu}$, $q_\mu(t) = t^{-2\mu+1}$, $\Delta\varphi(t) = \varphi(t+1) - \varphi(t)$, $\Delta^2\varphi(t) = \varphi(t+2) - 2\varphi(t+1) + \varphi(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (49) и (50) имеем

$${}_1\mathcal{K}_{n,k}^\nu(u) = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\cos[(k + \kappa + \lambda + 1)u + \frac{\pi\nu}{2}]}{(k + \kappa + \lambda + 1)^\nu},$$

поэтому, с помощью преобразования Абеля мы можем записать

$${}_1\mathcal{K}_{n,k}^\nu(u) = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(k + \kappa + \lambda + 1)^\nu} - \frac{1}{(k + \kappa + \lambda + 2)^\nu} \right] v_{\kappa,\lambda}^k(u), \quad (54)$$

где

$$v_{\kappa,\lambda}^k(u) = \sum_{j=0}^{\kappa} \cos[(k + j + \lambda + 1)u + \frac{\pi\nu}{2}]. \quad (55)$$

Мы рассмотрим два случая, когда ν является четным или нечетным. Если $\nu = 2\mu$, то $\cos(pu + \frac{\pi\nu}{2}) = (-1)^\mu \cos pu$, следовательно, (55) принимает вид

$$\begin{aligned} v_{\kappa,\lambda}^k(u) &= (-1)^\mu \sum_{j=0}^{\kappa} \cos(k+1+\lambda+j)u = \\ &= (-1)^\mu \frac{\sin(2(k+1+\lambda+\kappa)+1)\frac{u}{2} - \sin(2(k+\lambda)+1)\frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} \end{aligned} \quad (56)$$

Из (54) и (56) имеем

$${}_1\mathcal{K}_{n,k}^{2\mu}(u) = \frac{(-1)^{\mu-1}}{n} \times$$

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \Delta g_\mu(k+1+\kappa+\lambda) \frac{\sin(2(k+1+\lambda+\kappa)+1)\frac{u}{2} - \sin(2(k+\lambda)+1)\frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}}. \quad (57)$$

Применяя к внутренней сумме из (57) преобразование Абеля, мы получим

$$\begin{aligned} {}_1\mathcal{K}_{n,k}^{2\mu}(u) &= \frac{(-1)^\mu}{n} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{n-2} \Delta^2 g_\mu(k+1+\kappa+\lambda) \frac{W_{\kappa,\lambda}^k(u) - W_{-1,\lambda}^k(u)}{2 \sin \frac{u}{2}} + \\ &+ \frac{(-1)^{\mu-1}}{n} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Delta g_\mu(n+k+\kappa) \frac{W_{\kappa,n-1}^k(u) - W_{-1,n-1}^k(u)}{2 \sin \frac{u}{2}}, \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} W_{\kappa,\lambda}^k(u) &= \sum_{\eta=0}^{\lambda} \sin(2(k+\kappa+1+\eta)+1)\frac{u}{2} = \\ &= \frac{\sin^2(k+\lambda+\kappa+2)\frac{u}{2} - \sin^2(k+\kappa+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} (\sin(k+\lambda+\kappa+2)\frac{u}{2} - \sin(k+\kappa+1)\frac{u}{2}) \times \\ &= (\sin(k+\lambda+\kappa+2)\frac{u}{2} + \sin(k+\kappa+1)\frac{u}{2}) = \\ &= \frac{4}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{\lambda+1}{4} u \cdot \cos(k+\kappa+1+\frac{\lambda+1}{2})\frac{u}{2} \times \\ &= \sin(k+\kappa+1+\frac{\lambda+1}{2})\frac{u}{2} \cos \frac{\lambda+1}{4} u \end{aligned}$$

и отсюда

$$\begin{aligned} W_{\kappa,\lambda}^k(u) - W_{-1,\lambda}^k(u) &= \frac{4}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{\lambda+1}{4} u \cos \frac{\lambda+1}{4} u \times \\ &\left(\sin(k+\kappa+1+\frac{\lambda+1}{2})\frac{u}{2} \cos(k+\kappa+1+\frac{\lambda+1}{2})\frac{u}{2} - \right. \\ &\left. - \sin(k+\frac{\lambda+1}{2})\frac{u}{2} \cos(k+\frac{\lambda+1}{2})\frac{u}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\lambda+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \left(\sin(2(k+\kappa+1)+\lambda+1)\frac{u}{2} - \sin(2k+\lambda+1)\frac{u}{2} \right) = \\ \frac{2}{\sin\frac{u}{2}} \sin(\lambda+1)\frac{u}{2} \sin(\kappa+1)\frac{u}{2} \cos(2k+\kappa+\lambda+2)\frac{u}{2}. \quad (59)$$

Равенство (52) вытекает из (58) и (59).

Докажем (53). Для этого заметим, что при $\nu = 2\mu - 1$ имеем $\cos(pu + \frac{(2\mu-1)}{2}) = (-1)^\mu \sin pu$, следовательно, (55) принимает вид

$$v_{\kappa,\lambda}^k(u) = (-1)^\mu \sum_{j=0}^{\kappa} \sin(k+1+\lambda+j)u = \\ (-1)^\mu \frac{\sin(k+1+\lambda+\kappa)\frac{u}{2} \sin(k+2+\lambda+\kappa)\frac{u}{2} - \sin(k+\lambda)\frac{u}{2} \sin(k+\lambda+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = \\ (-1)^\mu \frac{\cos(2k+2\lambda+1)\frac{u}{2} - \cos(2k+2\lambda+2\kappa+3)\frac{u}{2}}{2 \sin\frac{u}{2}}. \quad (60)$$

Из (54) и (60) имеем

$${}_1\mathcal{K}_{n,k}^{2\mu-1}(u) = \frac{(-1)^{\mu-1}}{n} \times \\ \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \Delta q_\mu(k+1+\lambda+\kappa) \frac{\cos(2k+2\lambda+1)\frac{u}{2} - \cos(2k+2\lambda+2\kappa+3)\frac{u}{2}}{2 \sin\frac{u}{2}}. \quad (61)$$

Применяя к внутренней сумме из (61) преобразование Абеля, мы получим

$${}_1\mathcal{K}_{n,k}^{2\mu-1}(u) = \frac{(-1)^\mu}{n} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{n-2} \Delta^2 q_\mu(k+1+\kappa+\lambda) \frac{Y_{-1,\lambda}^k(u) - Y_{\kappa,\lambda}^k(u)}{2 \sin\frac{u}{2}} + \\ + \frac{(-1)^{\mu-1}}{n} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Delta q_\mu(n+k+\kappa) \frac{Y_{-1,n-1}^k(u) - Y_{\kappa,n-1}^k(u)}{2 \sin\frac{u}{2}}, \quad (62)$$

где

$$Y_{\kappa,\lambda}^k(u) = \sum_{j=0}^{\lambda} \cos(2(k+1+j+\kappa)+1)\frac{u}{2} = \\ \frac{\sin(k+\kappa+\lambda+2)u - \sin(k+\kappa+1)u}{2 \sin\frac{u}{2}} = \\ \frac{\sin(l+1)\frac{u}{2} \cos(2n+2k+l+3)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}.$$

Отсюда имеем

$$Y_{-1,\lambda}^k(u) - Y_{\kappa,\lambda}^k(u) = \\ \frac{\sin(\lambda+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} (\cos(2k+\lambda+1)\frac{u}{2} - \cos(2k+2\kappa+\lambda+3)\frac{u}{2}) = \\ \frac{2}{\sin\frac{u}{2}} \sin(\lambda+1)\frac{u}{2} \sin(\kappa+1)\frac{u}{2} \sin(2k+\lambda+\kappa+2)\frac{u}{2}. \quad (63)$$

Равенство (53) вытекает из (62) и (63). Лемма 1.4 доказана.

Вернемся к равенству (51) и рассмотрим случай $\nu = 2\mu$ – четное. Тогда в силу леммы 1.4 мы можем записать

$$\begin{aligned} {}_2\mathcal{K}_{n,m}^{2\mu}(u) &= \\ \frac{(-1)^\mu}{n^2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda}{2} u \sin \frac{\kappa}{2} u}{\sin^2 \frac{u}{2}} &\sum_{k=m}^{m+n-1} \cos(k + \frac{\kappa + \lambda}{2}) u \Delta^2 g_\mu(k + \kappa + \lambda - 1) \\ + \frac{(-1)^{\mu-1}}{n^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{2} u \sin \frac{\kappa}{2} u}{\sin^2 \frac{u}{2}} &\sum_{k=m}^{m+n-1} \cos(k + \frac{\kappa + n}{2}) u \Delta g_\mu(k + n + \kappa - 1). \end{aligned} \quad (64)$$

К внутренним суммам вида $\sum_{k=m}^{m+n-1}$, фигурирующим в правой части равенства (64), применим преобразование Абеля, что дает

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m+n-1} \cos(k + \frac{\kappa + \lambda}{2}) u \Delta^2 g_\mu(k + \kappa + \lambda - 1) &= \\ - \sum_{k=m}^{m+n-2} \Delta^3 g_\mu(k + \kappa + \lambda - 1) X_k^{\lambda,\kappa} + \Delta^2 g_\mu(m + n + \kappa + \lambda - 2) X_{m+n-1}^{\lambda,\kappa}, & \quad (65) \\ \sum_{k=m}^{m+n-1} \cos(k + \frac{\kappa + n}{2}) u \Delta g_\mu(k + n + \kappa - 1) &= \\ - \sum_{k=m}^{m+n-2} \Delta^2 g_\mu(k + n + \kappa - 1) X_k^{n,\kappa} + \Delta g_\mu(m + 2n + \kappa - 2) X_{m+n-1}^{n,\kappa}, & \quad (66) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} X_k^{\lambda,\kappa} &= \sum_{j=m}^k \cos(ju + \frac{(\kappa + \lambda)u}{2}) = \\ \frac{\cos(k + \kappa + \lambda) \frac{u}{2} \sin(k+1) \frac{u}{2} - \cos(m + \kappa + \lambda - 1) \frac{u}{2} \sin \frac{mu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} &= \\ = \frac{\sin(2k + \kappa + \lambda + 1) \frac{u}{2} - \sin(2m + \kappa + \lambda - 1) \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} \\ = \frac{\sin(k - m + 1) \frac{u}{2} \cos(m + k + \kappa + \lambda) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}. & \quad (67) \end{aligned}$$

Из равенств (64) – (67) мы выводим следующий результат.

ЛЕММА 1.5. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} {}_2\mathcal{K}_{n,m}^{2\mu}(u) &= \frac{(-1)^{\mu-1}}{n^2 \sin^3 \frac{u}{2}} \left(\sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta^3 g_\mu(m + k + \kappa + \lambda - 2) \times \right. \\ &\left. \sin \frac{\lambda u}{2} \sin \frac{\kappa u}{2} \sin \frac{k u}{2} \cos(2m + k + \kappa + \lambda - 1) \frac{u}{2} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta^2 g_{\mu}(m+n+\kappa+\lambda-2) \times \\
& \sin \frac{\lambda u}{2} \sin \frac{\kappa u}{2} \sin \frac{n u}{2} \cos(2m+n+\kappa+\lambda-1) \frac{u}{2} \\
& - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta^2 g_{\mu}(m+n+k+\kappa-2) \times \\
& \sin \frac{n u}{2} \sin \frac{\kappa u}{2} \sin \frac{k u}{2} \cos(2m+n+k+\kappa-1) \frac{u}{2} \\
& + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta g_{\mu}(m+2n+\kappa-2) \sin^2 \frac{n u}{2} \sin \frac{\kappa u}{2} \cos(2m+2n+\kappa-1) \frac{u}{2} \Big).
\end{aligned}$$

Рассмотрим (46) в случае $\nu = 2\mu - 1$ – нечетно. Из леммы 1.4 (равенство (53)) имеем

$$\begin{aligned}
& {}_2\mathcal{K}_{n,m}^{2\mu-1}(u) = \\
& \frac{(-1)^{\mu}}{n^2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda}{2} u \sin \frac{\kappa}{2} u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \sum_{k=m}^{m+n-1} \Delta^2 g_{\mu}(k+\kappa+\lambda-1) \sin(ku+(\kappa+\lambda)\frac{u}{2}) \\
& - \frac{(-1)^{\mu}}{n^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{2} u \sin \frac{\kappa}{2} u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \sum_{k=m}^{m+n-1} \Delta g_{\mu}(k+n+\kappa-1) \sin(ku+(n+\kappa)\frac{u}{2}). \quad (68)
\end{aligned}$$

К внутренним суммам вида $\sum_{k=m}^{m+n-1}$, фигурирующим в правой части равенства (68), применим преобразование Абеля, что дает

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m}^{m+n-1} \Delta^2 g_{\mu}(k+\kappa+\lambda-1) \sin(ku+(\kappa+\lambda)\frac{u}{2}) = \\
& - \sum_{k=m}^{m+n-2} \Delta^3 q_{\mu}(k+\kappa+\lambda-1) Z_k^{\lambda,\kappa} + \Delta^2 q_{\mu}(m+n+\kappa+\lambda-2) Z_{m+n-1}^{\lambda,\kappa}, \quad (69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m}^{m+n-1} \sin(k + \frac{\kappa+n}{2}) u \Delta q_{\mu}(k+n+\kappa-1) = \\
& - \sum_{k=m}^{m+n-2} \Delta^2 q_{\mu}(k+n+\kappa-1) Z_k^{n,\kappa} + \Delta q_{\mu}(m+2n+\kappa-2) Z_{m+n-1}^{n,\kappa}, \quad (70)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_k^{\lambda,\kappa} &= \sum_{j=m}^k \sin(ju + \frac{(\kappa+\lambda)u}{2}) = \\
& \frac{\sin(k+\kappa+\lambda)\frac{u}{2} \sin(k+1)\frac{u}{2} - \sin(m+\kappa+\lambda-1)\frac{u}{2} \sin\frac{mu}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \\
& = \frac{\cos(2k+\kappa+\lambda+1)\frac{u}{2} - \cos(\kappa+\lambda-1)\frac{u}{2}}{2 \sin\frac{u}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(k-m+1)\frac{u}{2} \sin(m+k+\kappa+\lambda)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}. \quad (71)$$

Из равенств (68) – (71) мы выводим следующий результат.

ЛЕММА 1.6. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} 2\mathcal{K}_{n,m}^{2\mu-1}(u) &= \frac{(-1)^{\mu-1}}{n^2 \sin^3 \frac{u}{2}} \left(\sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta^3 q_{\mu}(m+k+\kappa+\lambda-2) \times \right. \\ &\quad \sin \frac{\lambda u}{2} \sin \frac{\kappa u}{2} \sin \frac{ku}{2} \sin(2m+k+\kappa+\lambda-1) \frac{u}{2} \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta^2 q_{\mu}(m+n+\kappa+\lambda-2) \times \\ &\quad \sin \frac{\lambda u}{2} \sin \frac{\kappa u}{2} \sin \frac{nu}{2} \sin(2m+n+\kappa+\lambda-1) \frac{u}{2} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta^2 q_{\mu}(m+n+k+\kappa-2) \times \\ &\quad \sin \frac{nu}{2} \sin \frac{\kappa u}{2} \sin \frac{ku}{2} \sin(2m+n+k+\kappa-1) \frac{u}{2} \\ &\quad \left. + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta q_{\mu}(m+2n+\kappa-2) \sin^2 \frac{nu}{2} \sin \frac{\kappa u}{2} \sin(2m+2n+\kappa-1) \frac{u}{2} \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.7. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{K}_l^{2\mu}(u) = (-1)^{\mu-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta g_{\mu}(\kappa+l) \frac{\sin \frac{\kappa u}{2} \cos(2l+\kappa+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}},$$

$$\mathcal{K}_l^{2\mu-1}(u) = (-1)^{\mu-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta q_{\mu}(\kappa+l) \frac{\sin \frac{\kappa u}{2} \sin(2l+\kappa+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}.$$

$$e \partial e g_{\mu}(t) = t^{-2\mu}, \quad q_{\mu}(t) = t^{-2\mu-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай четного $\nu = 2\mu$. Тогда в силу (49) имеем

$$\mathcal{K}_l^{2\mu}(u) = (-1)^{\mu} \sum_{z=l+1}^{\infty} \frac{\cos(zu)}{z^{\nu}} = (-1)^{\mu} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\cos((\kappa+l)u)}{(\kappa+l)^{\nu}}.$$

Отсюда, в результате преобразования Абеля, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_l^{2\mu}(u) &= (-1)^{\mu-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta g_{\mu}(\kappa+l) \frac{\sin(\kappa+l+\frac{1}{2})u - \sin(l+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \\ &= (-1)^{\mu-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta g_{\mu}(\kappa+l) \frac{\sin \frac{\kappa u}{2} \cos(2l+\kappa+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Перейдем к нечетному $\nu = 2\mu - 1$. Тогда в силу (46) имеем

$$\mathcal{K}_l^{2\mu-1}(u) = (-1)^\mu \sum_{z=l+1}^{\infty} \frac{\sin(zu)}{z^\nu} = (-1)^\mu \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sin((\kappa+l)u)}{(\kappa+l)^\nu}.$$

Отсюда, в результате преобразования Абеля, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_l^{2\mu-1}(u) &= \\ (-1)^{\mu-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta q_\mu(\kappa+l) &\frac{\sin(\kappa+l)\frac{u}{2} \sin(\kappa+l+1)\frac{u}{2} - \sin l\frac{u}{2} \sin(l+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \\ (-1)^{\mu-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta q_\mu(\kappa+l) &\frac{\cos(2l+1)\frac{u}{2} - \cos(2\kappa+2l+1)\frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} = \\ (-1)^{\mu-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta q_\mu(\kappa+l) &\frac{\sin \frac{\kappa u}{2} \sin(2l+\kappa+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}. \end{aligned} \quad (73)$$

Утверждение леммы 1.7 вытекает из (72) и (73).

2. Приближение кусочно-гладких функций

Рассмотрим задачу о приближении функций $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$ суммами Фурье $S_n(f, x)$, средними Валле Пуссена ${}_1V_{n,n}(f, x)$ и повторными средними Валле Пуссена ${}_2V_{n,n}(f, x)$. Для этого мы вернемся к вопросу об оценке величин $|R_n(f, x)|$, $|{}_1R_{n,m}(f, x)|$ и $|{}_2R_{n,m}(f, x)|$ (см. (28), (41), (42)). Поскольку для этих величин имеют место представления (38), (43) и (44), а величины $|\tilde{R}_n(f, x)|$, $|{}_1\tilde{R}_{n,m}(f, x)|$ и $|{}_2\tilde{R}_{n,m}(f, x)|$ уже оценены (см. леммы 1.2 и 1.3), то нам остаётся рассмотреть $|\hat{R}_n(f, x)|$, $|{}_1\hat{R}_{n,m}(f, x)|$ и $|{}_2\hat{R}_{n,m}(f, x)|$ (см. (39), (45), (46)). С этой целью введем следующие обозначения. Если $f \in \mathcal{I}_\Omega^r$, то положим

$$J_{\Omega,r}(f) = \max\{|f^{(\nu)}(x_j + 0)|, |f^{(\nu)}(x_{j+1} - 0)| : 0 \leq j \leq s, 1 \leq \nu \leq r\}, \quad (74)$$

$$Q_{\Omega,\varepsilon} = \bigcup_{j=0}^s [x_j + \varepsilon, x_{j+1} + \varepsilon], \quad (75)$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\{x_{j+1} - x_j : 0 \leq j \leq s\}$ и заметим, что в силу (36) и (46) мы можем записать

$$\begin{aligned} \hat{R}_l(f, x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^s \sum_{\nu=1}^r f^{(\nu)}(x_j + 0) \mathcal{K}_l^{\nu+1}(x - x_j) \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^s \sum_{\nu=1}^r f^{(\nu)}(x_{j+1} - 0) \mathcal{K}_l^{\nu+1}(x - x_{j+1}), \end{aligned} \quad (76)$$

поэтому из (42), (43), (47) и (48) находим

$${}_1\hat{R}_{n,m}(f, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^s \sum_{\nu=1}^r f^{(\nu)}(x_j + 0) {}_1\mathcal{K}_{n,m}^{\nu+1}(x - x_j)$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^s \sum_{\nu=1}^r f^{(\nu)}(x_{j+1}-0)_1 \mathcal{K}_{n,m}^{\nu+1}(x-x_{j+1}), \quad (77)$$

$$\begin{aligned} {}_2\hat{R}_{n,m}(f, x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^s \sum_{\nu=1}^r f^{(\nu)}(x_j+0)_2 \mathcal{K}_{n,m}^{\nu+1}(x-x_j) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^s \sum_{\nu=1}^r f^{(\nu)}(x_{j+1}-0)_2 \mathcal{K}_{n,m}^{\nu+1}(x-x_{j+1}). \end{aligned} \quad (78)$$

Чтобы оценить величины $|{}_2\mathcal{K}_{n,m}^{\nu+1}(x-x_j)|$ обратимся к леммам 1.5 и 1.6. Если $x \in Q_{\Omega,\varepsilon}$, то $|\sin(x-x_j)/2| > \sin(\varepsilon/2)$, поэтому в силу указанных лемм мы можем записать

$$\begin{aligned} |{}_2\mathcal{K}_{n,m}^{\nu+1}(x-x_j)| &\leq \frac{c(\nu, \varepsilon)}{n^2} \left(\sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\Delta^3 F(m+k+\kappa+\lambda-2)| + \right. \\ &\quad \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\Delta^2 F(m+n+\kappa+\lambda-2)| + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta^2 |F(m+n+k+\kappa-2)| \\ &\quad \left. + \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\Delta F(m+2n+\kappa-2)| \right), \end{aligned}$$

где $F(t) = t^{\nu+1}$, $\nu \geq 1$. Отсюда следует, что если $x \in Q_{\Omega,\varepsilon}$, то

$$|{}_2\mathcal{K}_{n,m}^{\nu+1}(x-x_j)| \leq \frac{c(\nu, \varepsilon)}{n^2(m+1)^2}. \quad (79)$$

Аналогично, из леммы 1.4 выводим следующую оценку

$$|{}_1\mathcal{K}_{n,m}^{\nu+1}(x-x_j)| \leq \frac{c(\nu, \varepsilon)}{n(m+1)^2}, \quad x \in Q_{\Omega,\varepsilon}, 0 \leq j \leq s+1, \quad (80)$$

а из леммы 1.7 вытекает оценка

$$|\mathcal{K}_m^{\nu+1}(x-x_j)| \leq \frac{c(\nu, \varepsilon)}{(m+1)^2}, \quad x \in Q_{\Omega,\varepsilon}, 0 \leq j \leq s+1. \quad (81)$$

Сопоставляя (79) – (81) с (76) – (78), мы можем сформулировать следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $r \geq 4$, $f \in \mathcal{I}_{\Omega}^r$. Тогда если $x \in Q_{\Omega,\varepsilon}$, то имеют место оценки*

$$|\hat{R}_m(f, x)| \leq \frac{c(r, \varepsilon) J_{\Omega,r}(f)}{(m+1)^2},$$

$$|{}_1\hat{R}_{n,m}(f, x)| \leq \frac{c(r, \varepsilon) J_{\Omega,r}(f)}{n(m+1)^2},$$

$$|{}_2\hat{R}_{n,m}(f, x)| \leq \frac{c(r, \varepsilon) J_{\Omega,r}(f)}{n^2(m+1)^2}.$$

Из лемм 1.2, 1.3, 2.1 и равенств (38), (43), (44) выводим следующий основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_s < x_{s+1} = \pi$, $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_s, x_{s+1}\}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\{x_{j+1} - x_j : 0 \leq j \leq s\}$, множество $Q_{\Omega, \varepsilon}$ определено равенством (75), $f \in \mathcal{I}_{\Omega}^r$. Тогда если $r \geq 3$, $x \in Q_{\Omega, \varepsilon}$, то имеют место оценки*

$$\begin{aligned}|R_m(f, x)| &\leq \frac{c(r, \varepsilon) J_{\Omega, r}(f)}{(m+1)^2} + \frac{c(r) I_r(f)}{(m+1)^r}, \\|{}_1 R_{n,m}(f, x)| &\leq \frac{c(r, \varepsilon) J_{\Omega, r}(f)}{n(m+1)^2} + \frac{c(r) I_r(f)}{(n+m)(m+1)^{r-1}}, \\|{}_2 R_{n,m}(f, x)| &\leq \frac{c(r, \varepsilon) J_{\Omega, r}(f)}{n^2(m+1)^2} + \frac{c(r) I_r(f)}{(n+m)^2(m+1)^{r-2}},\end{aligned}$$

где величина $J_{\Omega, r}(f)$ определена равенством (74), $I_r(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r+1)}(t)| dt$.

3. Приближение непериодических функций посредством перекрывающих преобразований

Пусть функция $f = f(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[0, d\pi]$, где $2 \leq d -$ натуральное число. Для каждого $0 \leq l \leq 2d - 2$ на $[0, \pi]$ определим функцию $f_l(x) = f(x + l\pi/2)$ ($x \in [0, \pi]$). Далее, определим операторы $LS_n(f)$, $L_1 V_n(f)$ и $L_2 V_n(f)$, полагая

$$LS_n(f)(x) = \begin{cases} S_n(f, x), & \text{при } 0 \leq x < \pi/4, \\ S_n(f_l, x - \frac{l\pi}{2}) (0 \leq l \leq 2d - 2), & \text{при } x \in [(l + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}, (l + \frac{3}{2})\frac{\pi}{2}), \\ S_n(f_{2d-2}, x - (d-1)\pi), & \text{при } d\pi - \pi/4 < x \leq d\pi, \end{cases} \quad (82)$$

$$L_1 V_n(f)(x) = \begin{cases} {}_1 V_{n,n}(f, x), & \text{при } 0 \leq x < \pi/4, \\ {}_1 V_{n,n}(f_l, x - \frac{l\pi}{2}) (0 \leq l \leq 2d - 2), & \text{при } x \in [(l + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}, (l + \frac{3}{2})\frac{\pi}{2}), \\ {}_1 V_{n,n}(f_{2d-2}, x - (d-1)\pi), & \text{при } d\pi - \pi/4 < x \leq d\pi, \end{cases} \quad (83)$$

$$L_2 V_n(f)(x) = \begin{cases} {}_2 V_{n,n}(f, x), & \text{при } 0 \leq x < \pi/4, \\ {}_2 V_{n,n}(f_l, x - \frac{l\pi}{2}) (0 \leq l \leq 2d - 2), & \text{при } x \in [(l + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}, (l + \frac{3}{2})\frac{\pi}{2}), \\ {}_2 V_{n,n}(f_{2d-2}, x - (d-1)\pi), & \text{при } d\pi - \pi/4 < x \leq d\pi, \end{cases} \quad (84)$$

и считая $LS_n(f)(x)$, $L_1 V_n(f)(x)$ и $L_2 V_n(f)(x)$ непрерывными слева в точке $x = d\pi - \pi/4$. Будем рассматривать операторы как аппарат приближения дифференцируемых (вообще говоря, непериодических) функций, заданных на $[0, d\pi]$. Из теоремы 2.1 непосредственно выводим

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $f \in W_1^4[0, d\pi]$, $\pi/4 \leq x \leq d\pi - \pi/4$. Тогда имеют место следующие оценки*

$$|f(x) - LS_n(f, x)| \leq \frac{c(f)}{n^2},$$

$$|f(x) - L_1 V_n(f, x)| \leq \frac{c(f)}{n^3},$$

$$|f(x) - L_2 V_n(f, x)| \leq \frac{c(f)}{n^4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, функция $f_l(x) = f(x + l\pi/2)$ с $0 \leq l \leq 2d - 2$ можно продолжить на отрезок $[-\pi, \pi]$ по четности, а затем на всю ось \mathbb{R} 2π -периодически. Тогда, поскольку $f \in W_1^4[0, d\pi]$, то $f_l \in \mathcal{I}_\Omega^3$ и, стало быть, мы попадаем в условия теоремы 2.1 с $r = 3$, откуда и вытекают утверждения следствия 1.

4. Численные эксперименты

В настоящем пункте мы продемонстрируем эффективность предлагаемого алгоритма приближения гладких периодических функций последствием повторных средних Валле Пуссена, путем сопоставления результатов численных экспериментов, проведенных нами одновременно для операторов $LS_{3n-2}(f)$ и $L_2 V_n(f)$. При этом отметим, что множество коэффициентов Фурье всех функций f_l , привлекаемых при конструировании оператора $LS_{3n-2}(f)$, совпадает с аналогичным множеством для оператора $L_2 V_n(f)$. Приведем ниже программу на языке Q-BASIC, которую мы разработали для численной реализации значений $LS_{3n-2}(f, x)$ и $L_2 V_n(f, x)$ на сетке $x_j = (2j+1)/(2M)$, $j = 0, \dots, M-1$. При этом отметим, что вместо функции $f(x) = \sqrt{x+1}$, взятой в программе для проведения численного эксперимента, может быть взята любая другая достаточно гладкая функция, заданная на отрезке $[0, d\pi]$, где $2 \leq d$ – произвольное натуральное число. Заметим также, что программу можно существенно улучшить путем применения алгоритма быстрого преобразования Фурье для вычисления коэффициентов Фурье функций $g_l(x) = g(x + l\pi/2)$ с $0 \leq l \leq 2d - 2$, играющих в программе роль функций $f_l(x) = f(x + l\pi/2)$.

```

REM Lapped transform
REM "Chislo tochek diskretizacii x_j=(2j+1)/(2M) na (0,pi); M"
REM "Chislo otrezkov [0,pi] v obl.opr.func. g; p1"
REM "n usrednenie, prichem 3n-2<=M"
M = 128
p1 = 2
n = 10
n1 = 3 * n - 2
M1 = p1 * M
p = 2 * p1 - 2

DEF fng (x) = (x + 1) ^ (1 / 2)
pi = ATN(1) * 4
DIM g(M1 - 1): REM Ishodnaya function
DIM gv(M1 - 1): REM Priblizjenie vtorymi srednimi V-sena (laped)
DIM gf(M1 - 1): REM Priblizjenie summami Fur'e (laped)
DIM A(n1, p): REM Fourier coofficients (matrica P X n1)
DIM V2(n1): REM mnozjitel Valley Pussena
DIM AV(n1, p): REM Fourier X mnojit Valley (matrica P X n1)

```

```

REM Mnozjately Valle Pussena
FOR j = 0 TO n
V2(j) = 1
NEXT j
FOR j = n + 1 TO 2 * n - 1
V2(j) = (2 * n ^ 2 - (j - n) * (j - n + 1)) / (2 * n ^ 2)
NEXT j
FOR j = 2 * n TO 3 * n - 2
V2(j) = (3 * n - j) * (3 * n - j - 1) / (2 * n ^ 2)
NEXT j

REM Znacheniya function g(x) na setke

FOR j = 0 TO M1 - 1
g(j) = fng((2 * j + 1) * pi / (2 * M))
NEXT j

REM Pryamoe preobrazovaniye Fourier
pm = M \ 2
FOR l = 0 TO p
FOR k = 0 TO n1
A(k, l) = 0
FOR j = 0 TO M - 1
A(k, l) = A(k, l) + COS(k * (2 * j + 1) * pi / (2 * M)) * g(l * pm + j)
NEXT j
A(k, l) = 2 * A(k, l) / M
NEXT k
NEXT l

REM Umnozjenie na mnozjiteli Valle Pussena
FOR l = 0 TO p
FOR k = 0 TO n1
AV(k, l) = V2(k) * A(k, l)
NEXT k
NEXT l

REM Obratnoe preobrazovanie Fourier (laped)
qm = M \ 4
FOR j = 0 TO 3 * qm
s = A(0, 0) / 2
FOR k = 1 TO n1
s = s + A(k, 0) * COS(k * (2 * j + 1) * pi / (2 * M))
NEXT k
gf(j) = s
NEXT j

FOR j = qm + 1 TO M - 1
s = A(0, p) / 2
FOR k = 1 TO n1
s = s + A(k, p) * COS(k * (2 * j + 1) * pi / (2 * M))
NEXT k
gf(j + p * pm) = s

```

```

NEXT j

FOR l = 1 TO p - 1
FOR j = qm + 1 TO qm + pm
s = A(0, 1) / 2
FOR k = 1 TO n1
s = s + A(k, 1) * COS(k * (2 * j + 1) * pi / (2 * M))
NEXT k
gf(j + 1 * pm) = s
NEXT j
NEXT l

REM Obratnoe preobrazovanie Valle Pussena (laped)

FOR j = 0 TO 3 * qm
s = AV(0, 0) / 2
FOR k = 1 TO n1
s = s + AV(k, 0) * COS(k * (2 * j + 1) * pi / (2 * M))
NEXT k
gv(j) = s
NEXT j

FOR j = qm + 1 TO M - 1
s = AV(0, p) / 2
FOR k = 1 TO n1
s = s + AV(k, p) * COS(k * (2 * j + 1) * pi / (2 * M))
NEXT k
gv(j + p * pm) = s
NEXT j

FOR l = 1 TO p - 1
FOR j = qm + 1 TO qm + pm
s = AV(0, 1) / 2
FOR k = 1 TO n1
s = s + AV(k, 1) * COS(k * (2 * j + 1) * pi / (2 * M))
NEXT k
gv(j + 1 * pm) = s
NEXT j
NEXT l

REM Vyvod rezul
OPEN "result.txt" FOR OUTPUT AS #1
M2 = (M1 - 1) \ 2
FOR j = qm TO M2
A=ABS(gv(j) - g(j))
B=ABS(gf(j) - g(j))
C=ABS(gv(j+M2-qm+1) - g(j+M2-qm+1))
D=ABS(gf(j+M2-qm+1) - g(j+M2-qm+1))
WRITE #1,A,B,C,D
NEXT j
CLOSE #1

```

Приведем таблицу отклонений $|f(x) - L_2V_n(f, x)|$ и $|f(x) - LS_{\{3n-2\}}(f, x)|$ на сетке $x_j = (2j+1)/(2M)$, когда $\pi/4 \leq x_j \leq d*M - M/4$:

$ f - L_2V_n(f) $	$ f - LS_{\{3n-2\}}(f) $	$ f - L_2V_n(f) $	$ f - LS_{\{3n-2\}}(f) $
1.621246E-05,"	",2.254248E-04,"	",1.430511E-06,"	",1.056194E-04
3.898144E-05,"	",4.53949E-04,"	",3.814697E-06,"	",1.962185E-04
5.877018E-05,"	",4.652739E-04,"	",6.67572E-06,"	",1.966953E-04
7.033348E-05,"	",2.657175E-04,"	",8.34465E-06,"	",1.080036E-04
7.18832E-05,"	",4.470348E-05,"	",7.629395E-06,"	",2.861023E-05
6.210804E-05,"	",3.20673E-04,"	",6.67572E-06,"	",1.530647E-04
4.518032E-05,"	",4.388094E-04,"	",4.768372E-06,"	",2.062321E-04
2.43187E-05,"	",3.532171E-04,"	",3.576279E-06,"	",1.652241E-04
4.768372E-06,"	",1.108646E-04,"	",7.152557E-07,"	",4.959106E-05
1.060963E-05,"	",1.726151E-04,"	",2.384186E-07,"	",8.940697E-05
1.966953E-05,"	",3.664494E-04,"	",9.536743E-07,"	",1.878738E-04
2.288818E-05,"	",3.871918E-04,"	",9.536743E-07,"	",2.012253E-04
2.253056E-05,"	",2.31266E-04,"	",1.907349E-06,"	",1.223087E-04
1.93119E-05,"	",2.396107E-05,"	",1.907349E-06,"	",1.239777E-05
1.597404E-05,"	",2.598763E-04,"	",2.384186E-06,"	",1.423359E-04
1.335144E-05,"	",3.701448E-04,"	",3.099442E-06,"	",2.090931E-04
1.132488E-05,"	",3.083944E-04,"	",4.291534E-06,"	",1.797676E-04
1.001358E-05,"	",1.083612E-04,"	",5.483627E-06,"	",6.842613E-05
9.179115E-06,"	",1.347065E-04,"	",6.914139E-06,"	",7.605553E-05
8.34465E-06,"	",3.105402E-04,"	",9.059906E-06,"	",1.871586E-04
7.152557E-06,"	",3.401041E-04,"	",1.096725E-05,"	",2.148151E-04
6.079674E-06,"	",2.146959E-04,"	",9.536743E-06,"	",1.451969E-04
4.649162E-06,"	",5.483627E-06,"	",6.914139E-06,"	",6.914139E-06
3.099442E-06,"	",2.18153E-04,"	",1.66893E-06,"	",1.370907E-04
0,"	",3.265142E-04,"	",6.914139E-06,"	",2.205372E-04
4.053116E-06,"	",2.837181E-04,"	",1.597404E-05,"	",2.052784E-04
8.702278E-06,"	",1.12772E-04,"	",2.360344E-05,"	",9.512901E-05
1.28746E-05,"	",1.063347E-04,"	",2.813339E-05,"	",6.246567E-05
1.645088E-05,"	",2.732277E-04,"	",2.908707E-05,"	",1.964569E-04
1.716614E-05,"	",3.123283E-04,"	",2.503395E-05,"	",2.439022E-04
1.573563E-05,"	",2.090931E-04,"	",1.716614E-05,"	",1.807213E-04
1.120567E-05,"	",1.215935E-05,"	",8.821487E-06,"	",3.147125E-05
4.649162E-06,"	",1.875162E-04,"	",1.192093E-06,"	",1.378059E-04
1.430511E-06,"	",2.987385E-04,"	",1.978874E-05,"	",2.205372E-04
6.437302E-06,"	",2.725124E-04,"	",2.932549E-05,"	",2.446175E-04
9.536743E-06,"	",1.223087E-04,"	",3.480911E-05,"	",1.571178E-04
1.049042E-05,"	",8.177757E-05,"	",3.457069E-05,"	",3.33786E-06
9.179115E-06,"	",2.471209E-04,"	",3.004074E-05,"	",1.444817E-04
7.271767E-06,"	",2.981424E-04,"	",2.193451E-05,"	",2.219677E-04
5.125999E-06,"	",2.129078E-04,"	",1.168251E-05,"	",1.957417E-04
3.576279E-06,"	",3.147125E-05,"	",9.536743E-07,"	",8.249283E-05
1.907349E-06,"	",1.635551E-04,"	",5.245209E-06,"	",6.556511E-05
1.072884E-06,"	",2.826452E-04,"	",1.049042E-05,"	",1.773834E-04
2.384186E-07,"	",2.733469E-04,"	",1.144409E-05,"	",2.064705E-04
3.576279E-07,"	",1.38998E-04,"	",1.0252E-05,"	",1.425743E-04
1.66893E-06,"	",5.853176E-05,"	",9.536743E-06,"	",1.430511E-05

1.788139E-06,"	",2.293587E-04,"	",7.629395E-06,"	",1.146793E-04
2.622604E-06,"	",2.95639E-04,"	",5.960464E-06,"	",1.895428E-04
3.814697E-06,"	",2.273321E-04,"	",4.291534E-06,"	",1.759529E-04
5.483627E-06,"	",5.531311E-05,"	",4.768372E-06,"	",8.392334E-05
7.987022E-06,"	",1.431704E-04,"	",3.814697E-06,"	",4.529953E-05
1.072884E-05,"	",2.775192E-04,"	",3.099442E-06,"	",1.50919E-04
1.323223E-05,"	",2.857447E-04,"	",2.861023E-06,"	",1.852512E-04
1.323223E-05,"	",1.64032E-04,"	",2.145767E-06,"	",1.36137E-04
1.060963E-05,"	",3.445148E-05,"	",9.536743E-07,"	",2.551079E-05
4.768372E-06,"	",2.189875E-04,"	",4.768372E-07,"	",9.393692E-05
4.410744E-06,"	",3.073215E-04,"	",9.536743E-07,"	",1.692772E-04
1.525879E-05,"	",2.559423E-04,"	",3.099442E-06,"	",1.659393E-04
2.515316E-05,"	",8.702278E-05,"	",5.245209E-06,"	",8.749962E-05
3.123283E-05,"	",1.250505E-04,"	",7.152557E-06,"	",2.980232E-05
3.290176E-05,"	",2.833605E-04,"	",8.583069E-06,"	",1.33276E-04
2.884865E-05,"	",3.166199E-04,"	",8.821487E-06,"	",1.740456E-04
2.074242E-05,"	",2.053976E-04,"	",6.67572E-06,"	",1.370907E-04
1.0252E-05,"	",3.695488E-06,"	",4.768372E-06,"	",3.838539E-05
4.768372E-07,"	",2.17557E-04,"	",9.536743E-07,"	",7.748604E-05
2.467632E-05,"	",2.801418E-04,"	",2.145767E-06,"	",1.571178E-04
3.623962E-05,"	",3.027916E-04,"	",4.529953E-06,"	",1.635551E-04
4.374981E-05,"	",1.87993E-04,"	",5.722046E-06,"	",9.608269E-05
4.36306E-05,"	",7.152557E-06,"	",6.437302E-06,"	",1.573563E-05
3.802776E-05,"	",1.900196E-04,"	",4.768372E-06,"	",1.20163E-04
2.682209E-05,"	",2.806187E-04,"	",3.33786E-06,"	",1.709461E-04
1.358986E-05,"	",2.406836E-04,"	",1.66893E-06,"	",1.43528E-04
1.549721E-06,"	",9.393692E-05,"	",4.768372E-07,"	",5.054474E-05
7.867813E-06,"	",8.97646E-05,"	",9.536743E-07,"	",6.508827E-05
1.335144E-05,"	",2.2614E-04,"	",9.536743E-07,"	",1.516342E-04
1.525879E-05,"	",2.548695E-04,"	",2.622604E-06,"	",1.690388E-04
1.442432E-05,"	",1.679659E-04,"	",2.384186E-06,"	",1.091957E-04
1.215935E-05,"	",7.629395E-06,"	",2.622604E-06,"	",1.66893E-06
1.060963E-05,"	",1.522303E-04,"	",2.622604E-06,"	",1.122952E-04
8.34465E-06,"	",2.38061E-04,"	",3.576279E-06,"	",1.733303E-04
7.033348E-06,"	",2.144575E-04,"	",4.291534E-06,"	",1.554489E-04
6.437302E-06,"	",9.417534E-05,"	",5.00679E-06,"	",6.723404E-05
5.602837E-06,"	",6.532669E-05,"	",7.390976E-06,"	",5.364418E-05
5.245209E-06,"	",1.914501E-04,"	",9.059906E-06,"	",1.528263E-04
4.410744E-06,"	",2.276897E-04,"	",1.001358E-05,"	",1.821518E-04
4.172325E-06,"	",1.59502E-04,"	",9.298325E-06,"	",1.289845E-04
2.861023E-06,"	",2.074242E-05,"	",6.67572E-06,"	",1.549721E-05
1.788139E-06,"	",1.255274E-04,"	",1.907349E-06,"	",1.091957E-04
4.768372E-07,"	",2.118349E-04,"	",6.198883E-06,"	",1.859665E-04
2.980232E-06,"	",2.006292E-04,"	",1.28746E-05,"	",1.80006E-04
5.960464E-06,"	",9.894371E-05,"	",2.002716E-05,"	",9.10759E-05
8.106232E-06,"	",4.577637E-05,"	",2.479553E-05,"	",4.267693E-05
1.001358E-05,"	",1.678467E-04,"	",2.479553E-05,"	",1.604557E-04
1.001358E-05,"	",2.119541E-04,"	",2.121925E-05,"	",2.07901E-04
8.821487E-06,"	",1.587868E-04,"	",1.478195E-05,"	",1.61171E-04
5.00679E-06,"	",3.361702E-05,"	",6.914139E-06,"	",3.647804E-05

Список литературы

- [1] Malvar H.S. Signal processing with lapped transform. Boston · London. Artech House. 1992.
- [2] Жук В.В. Аппроксимация периодических функций. Ленинград. 1982.
- [3] Никольский С.М. О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, вып. 6. С. 509–520.
- [4] Ефимов А.В. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23, вып. 5. С. 737–770.
- [5] Теляковский С.А. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24, вып. 2. С. 213–242.
- [6] Магомед-Касумов М.Г. Аппроксимативные свойства классических средних Валле-Пуссена для кусочно гладких функций // Вестник Дагестанского научного центра РАН. 2014. Т. 54. С. 5–12.
- [7] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена на классах типа Соболева с переменным показателем // Вестник Дагестанского научного центра РАН. 2012. Вып. 45. С. 5–13.
- [8] Шарапудинов И.И. Приближение гладких функций в $L_{2\pi}^{p(x)}$ средними Валле-Пуссена // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 13, вып. 1, часть 1. С. 45–49.
- [9] Шарапудинов И.И. Приближение функций в $L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами // Известия РАН: Серия математическая. 2013. Т. 27, вып. 2. С. 197–224.
- [10] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Москва: Мир. 1965. Т. 1.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН,
Владикавказский научный центр РАН
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию
4.12.2017