УДК 517.946

М. М. Сиражудинов

Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами

В работе, при помощи асимптотических методов, получены операторные оценки усреднения задачи Римана–Гильберта для обобщенного уравнения Бельтрами с быстро колеблющимися ε -периодическими коэффициентами.

Библиография: 10 названий.

Operator estimates for homogenization of the Riemann-Hilbert problem for the generalized Beltrami equation with rapidly oscillating ε -periodic coefficients are considered. Asymptotic methods of homogenization are used.

Bibliography: 10 items.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, усреднение, асимптотические методы

Keywords: Beltrami equation, homogenization, method of asymptotic expansions

1. Обозначения

$\mathbb{R}^2$ — плоскость, $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с кусочно гладкой границей, $\bar{Q}$ — замыкание области Q .

$$\partial_{\bar{z}} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2), \quad \partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2), \quad \mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2.$$

i — мнимая единица.

$L_2(Q; \mathbb{C})$ — пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций. Символ $\mathbb{C}$ (здесь и далее) в обозначении пространства означает также, что это пространство есть линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Скалярное произведение в $L_2(Q; \mathbb{C})$ дается равенством:

$$(u, v)_{L_2(Q; \mathbb{C})} = \operatorname{Re} \int_Q u \bar{v} dx, \quad u, v \in L_2(Q; \mathbb{C}),$$

где $\bar{v}$ — комплексно сопряженная v функция.

Соответствие $L_2(Q; \mathbb{C}) \ni u = u_1 + iu_2 \mapsto (u_1, u_2) = U \in (L_2(Q))^2$ есть изоморфизм, причем $(U, V)_{(L_2(Q))^2} = (u, v)_{L_2(Q; \mathbb{C})}$.

$W_p^k(Q; \mathbb{C})$ — пространство Соболева комплекснозначных функций.

$\square, \square_T$ — квадрат со стороной (длины T), параллельной оси координат (ячейка периодов). $|\square| = T^2$ — площадь квадрата $\square$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-01-00508-а)

Периодической будем называть функцию периода T по каждой переменной. $\langle u \rangle$ — среднее значение периодической функции u , т.е.

$$\langle u \rangle = |\square|^{-1} \int_{\square} u(x) dx.$$

$L_p(\square; \mathbb{C})$, $W_p^1(\square; \mathbb{C})$, $p \geq 1$, — пространства Лебега и Соболева периодических функций. Скалярное произведение в $L_2(\square; \mathbb{C})$ задает равенство $(u, v)_{L_2(\square; \mathbb{C})} = \operatorname{Re} \langle u \bar{v} \rangle$, $u, v \in L_2(\square; \mathbb{C})$.

$W_2^{-1}(\square; \mathbb{C})$ — пространство, сопряженное $W_2^1(\square; \mathbb{C})$. Пространство, сопряженное $L_2(\square; \mathbb{C})$, отождествляем с $L_2(\square; \mathbb{C})$, что возможно, в силу теоремы Рисса.

$\rightharpoonup$ — знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

Как известно (см. [1; гл. 1]), если $g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$) — периодическая функция, $g \in L_p(\square; \mathbb{C})$, $p \geq 1$, то тогда $g(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle g \rangle$ в $L_{p \text{ loc}}(Q; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где Q — произвольная ограниченная область плоскости.

$W_0(Q)$ — подпространство $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют соотношениям:

$$\operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \quad \int_Q \operatorname{Im} u dx = 0.$$

В случае, когда это не вызывает недоразумений, как уравнение, так и оператор соответствующей краевой задачи обозначаем одним и тем же символом.

$y_j = \varepsilon^{-1}x_j$, $j = 1; 2$, — «быстрые» переменные.

Теория усреднения бурно развивается с середины второй половины прошлого века. Этот раздел дифференциальных уравнений имеет многочисленные приложения в различных разделах физики и механики сплошных сред.

Операторные оценки усреднения дивергентных эллиптических операторов получены в [2]. Собственно термин «операторные оценки усреднения» ввел в обиход В. В. Жиков [3]. Изложение различных аспектов операторных оценок усреднения для дивергентных операторов можно найти в обзорной работе [4].

Наша работа посвящена операторным оценкам усреднения для обобщенных уравнений Бельтрами. Эти уравнения являются недивергентными, поэтому полученные операторные оценки усреднения (см. ниже п. 2.6) отличаются от оценок для дивергентных операторов.

2. Формулировка результатов

В пунктах 2.1 – 2.5 собраны известные результаты, которые нам понадобятся в дальнейшем.

2.1. Задача Римана – Гильберта. Рассмотрим следующую задачу Римана – Гильберта:

$$\begin{cases} Au \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u + \nu \partial_{\bar{z}} \bar{u} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u \in W_0(Q), \end{cases} \quad (2.1)$$

где коэффициенты $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ — измеримые ограниченные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{vraisup}_{x \in Q} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1, \quad (2.2)$$

$k_0 > 0$ — постоянная (*константа эллиптичности*); Q — ограниченная односвязная область плоскости с кусочно-гладкой границей.

Заметим, что любую равномерно эллиптическую систему двух уравнений первого порядка с действительными непрерывными в $\bar{Q}$ коэффициентами можно представить в виде (2.1), (2.2) (см. [5; § 7, гл. 2 и § 17, гл. 3]).

Как известно (см. [6, 7, 8, 9]), *задача Римана–Гильберта (2.1) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(Q; \mathbb{C})$, причем имеют место априорные оценки:*

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q Au \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx, \quad (2.3)$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \|Au\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}. \quad (2.4)$$

Оценки (2.3), (2.4) справедливы для любого элемента $u \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0$, условие на мнимую часть не требуется. Более того они верны и для многосвязных областей.

Выражение

$$\|u\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad u \in W_0(Q)$$

задает в подпространстве $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ (см. [6]), поэтому имеют место оценки:

$$c_1 \|u\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq \|Au\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c_2 \|u\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad (2.5)$$

где $c_1, c_2 > 0$ — положительные постоянные, зависящие только от постоянной эллиптичности k_0 .

2.2. G -сходимость. Обозначим через $\mathcal{A}(k_0; Q)$ — множество обобщенных операторов Бельтрами (2.1), $\mathcal{A}_0(k_0; Q)$ — подмножество $\mathcal{A}(k_0; Q)$ операторов Бельтрами (2.1) с $\nu = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$ G -сходится в области Q к оператору $A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ (и будем писать $A_k \xrightarrow{G} A$), если для любого $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$ последовательность u_k решений задачи Р–Г: $A_k u_k = f$, $u_k \in W_0(Q)$, сходится в $L_2(Q; \mathbb{C})$ к решению задачи Р–Г: $Au = f$, $u \in W_0(Q)$.

G -предел определен единственным образом. Как известно (см. [6, 7]) *классы $\mathcal{A}(k_0; Q)$ и $\mathcal{A}_0(k_0; Q)$ являются G -компактными.*

2.3. Усреднение. Рассмотрим задачу Римана – Гильберта:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon + \nu^\varepsilon \partial_{\bar{z}} \bar{u}_\varepsilon = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q), \end{cases} \quad (2.6)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$; $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$, $\nu(x) = \nu(x_1, x_2)$ — измеримые ограниченные комплекснозначные периодические (периода T по каждой переменной) функции, удовлетворяющие условию эллиптичности (2.2) на всей плоскости

$$\operatorname{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}^2} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1.$$

Очевидно, что оператор A_ε принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0; Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что семейство $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В вопросах усреднения важную роль играет ядро оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного оператора периодической задачи:

$$\mathcal{A}u \equiv \partial_{\bar{z}}u + \mu(x)\partial_zu + \nu(x)\partial_{\bar{z}}\bar{u} = f \in L_2(\square; \mathbb{C}), \quad u \in W_2^1(\square; \mathbb{C}). \quad (2.7)$$

Сформулируем результаты по периодической задаче, необходимые в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [6]). *Справедливы следующие утверждения:*

- Периодическая задача (2.7) фредгольмова.
- Ядро $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ сопряженного оператора $\mathcal{A}^* : L_2(\square; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^{-1}(\square; \mathbb{C})$ — двумерное подпространство $L_2(\square; \mathbb{C})$ (напомним, что наши пространства — пространства над полем $\mathbb{R}$), причем один из базисов $\{p_1, p_2\}$ ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ обладает свойствами

$$\langle p_1 \rangle = 1, \quad \langle p_2 \rangle = i.$$

- В случае оператора Бельтрами ($\nu = 0$) имеем: $p_2 = ip_1$.

Сформулируем теорему об усреднении из работы [10].

ТЕОРЕМА 2.2 (ОБ УСРЕДНЕНИИ). *Для семейства операторов (2.6):*

$$A_\varepsilon = \partial_{\bar{z}} + \mu^\varepsilon \partial_z + \nu^\varepsilon \bar{\partial}_z,$$

где $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, имеет место усреднение, причем коэффициенты усредненного оператора

$$A_0 = \partial_{\bar{z}} + \mu^0 \partial_z + \nu^0 \bar{\partial}_z$$

постоянные, определяемые равенствами

$$\mu^0 = \langle \mu \mathcal{Q} + \bar{\nu} \mathcal{P} \rangle, \quad \nu^0 = \langle \bar{\mu} \mathcal{P} + \nu \mathcal{Q} \rangle, \quad (2.8)$$

где

$$\mathcal{P} = 2^{-1}(p_1 + ip_2), \quad \mathcal{Q} = 2^{-1}(\bar{p}_1 + i\bar{p}_2),$$

(p_1, p_2 — базисные векторы ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ из теоремы 2.1, $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ — комплексно сопряженные p_1, p_2 функции); $\bar{\partial}_z$ — дифференциальный оператор, определенный равенством $\bar{\partial}_zu = \partial_z\bar{u}$.

В случае уравнения Бельтрами имеем: $\mu^0 = \langle \mu \bar{p}_1 \rangle$, $\nu^0 = 0$.

2.4. Задача на ячейке. Рассмотрим следующую периодическую задачу

$$\begin{cases} \mathcal{A}N_j \equiv \partial_{\bar{z}}N_j + \mu\partial_zN_j + \nu\partial_{\bar{z}}\bar{N}_j = \chi_j, \\ N_j \in W_2^1(\square; \mathbb{C}), \quad j = 1; 2, \end{cases} \quad (2.9)$$

где

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(\mu^0 + \nu^0 - \mu(x) - \nu(x)), \quad \chi_2 = \frac{i}{2}(\mu^0 - \nu^0 - \mu(x) + \nu(x)). \quad (2.10)$$

Здесь μ^0, ν^0 — коэффициенты (2.8) усредненного уравнения. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.3 (см. [10]). *Периодическая задача (2.9) разрешима и решения представляются в виде*

$$N_j + c_j, \quad j = 1; 2,$$

где $c_j \in \mathbb{C}$ — произвольная постоянная, $N_j \in W_2^1(\square; \mathbb{C})$ — решение (2.9) со средним равным нулю $\langle N_j \rangle = 0$.

В случае уравнения Бельтрами ($\nu = 0$), имеем $N_2 = iN_1$.

2.5. Первое приближение к решению задачи (2.6). Пусть правая часть задачи (2.6) f принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ и пусть u_ε — решение задачи Римана–Гильберта (2.6). Первым приближением к решению u_ε задачи (2.6) является функция

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon \left((N_1(y) - iN_2(y)) \partial_z u^0(x) + (N_1(y) + iN_2(y)) \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)} \right), \quad (2.11)$$

где N_1 и N_2 — периодические решения задачи на ячейке (см. теорему 2.3), $y = \varepsilon^{-1}x$; u^0 — решение усредненной задачи: $A_0 u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q; \mathbb{C})$. Оператор A_0 — эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, поэтому u^0 принадлежит $W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, ввиду свойств регулярности решений эллиптических уравнений. При этом справедливо соотношение

$$A_\varepsilon u_1^\varepsilon = f + \varepsilon r_\varepsilon, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} r_\varepsilon = & (N_1(y) - iN_2(y)) \left(\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x) + \mu(y) \partial_{zz}^2 u^0(x) + \nu(y) \partial_{\bar{z}z}^2 \overline{u^0(x)} \right) + \\ & + (N_1(y) + iN_2(y)) \left(\partial_{\bar{z}z}^2 \overline{u^0(x)} + \mu(y) \partial_{z\bar{z}}^2 \overline{u^0(x)} + \nu(y) \partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x) \right), \quad y = \varepsilon^{-1}x, \end{aligned}$$

причем невязка r_ε принадлежит пространству $L_2(Q; \mathbb{C})$.

Отметим, что первое приближение u_1^ε принадлежит $W_2^1(Q; \mathbb{C})$.

Главным результатом работы [10] является следующая

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть правая часть f задачи Римана – Гильберта (2.6) принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, Q — односвязная область с гладкой (класса C^2) границей, тогда имеют место оценки*

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad (2.13)$$

где $c > 0$ — постоянная, независящая от ε и f .

Первая из оценок (2.13) — оценка разности точного решения задачи (2.6) и первого приближения, а вторая есть оценка скорости сходимости точного решения к решению усредненной задачи.

2.6. Операторные оценки усреднения. Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 2.5. *Справедливы следующие операторные оценки усреднения задачи Римана–Гильберта (2.6)*

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) \partial_{\bar{z}}^{-1}\|_{L_2(Q; \mathbb{C}) \rightarrow L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.14)$$

$$\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{W_0(Q) \rightarrow L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \left\| (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) \partial_{\bar{z}}^{-1} - \varepsilon \left(N \partial_z A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + M \partial_{\bar{z}} A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1} \right) \right\|_{L_2(Q; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - \varepsilon (N \partial_z A_0^{-1} + M \partial_{\bar{z}} A_0^{-1})\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.17)$$

где $c > 0$ — постоянная; $\partial_{\bar{z}}^{-1}$ — оператор обратный к оператору краевой задачи (2.6) для уравнения Коши – Римана; $\overline{A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1}}$ — оператор, определенный равенством $\overline{A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1}} v = A_0^{-1} \partial_{\bar{z}}^{-1} \bar{v}$, аналогичный смысл имеет и оператор A_0^{-1} . Здесь $N = N_1(y) - iN_2(y)$, $M = N_1(y) + iN_2(y)$, $y = \varepsilon^{-1}x$, где $N_1(y)$, $N_2(y)$ — решения задачи на ячейке (см. теорему 2.3); A_ε^{-1} , A_0^{-1} — обратные операторы к операторам соответствующих задач Римана–Гильберта.

В случае оператора Бельтрами ($\nu = 0$), ввиду теоремы 2.3, имеем $N = 2N_1$, $M = 0$. Следовательно, корректоры в (2.16), (2.17) упрощаются и мы имеем для оператора Бельтрами оценки

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - \varepsilon N \partial_z A_0^{-1}) \partial_{\bar{z}}^{-1}\|_{L_2(Q; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon},$$

$$\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - \varepsilon N \partial_z A_0^{-1}\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в операторных оценках (2.14), (2.16) (как это следует из доказательства теоремы 2.5 в § 2), оператор $\partial_{\bar{z}}^{-1}$ можно заменить на любой обратимый оператор B действующий из $L_2(Q; \mathbb{C})$ на $W_0(Q)$. При этом постоянная c будет зависеть от B .

3. Доказательство теоремы 2.5

Пусть правая часть уравнения (2.6) f принадлежит пространству $W_0(Q) \subset W_2^1(Q; \mathbb{C})$, тогда, ввиду того, что $\|u\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}$ задает в $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, из оценок (2.13) получим

$$\|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|\partial_{\bar{z}} f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.1)$$

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|\partial_{\bar{z}} f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \quad (3.2)$$

(Здесь и ниже $c > 0$ постоянная, независимая от ε и f .)

Так как u_ε , u^0 — решения краевых задач Римана–Гильберта, имеем $u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}f$, $u^0 = A_0^{-1}f$. Следовательно, ввиду (3.1), получим

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|\partial_{\bar{z}}f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad f \in W_0(Q).$$

Отсюда, так как отображение $\partial_{\bar{z}} : W_0(Q) \rightarrow L_2(Q; \mathbb{C})$ есть изоморфизм, имеем

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\bar{z}}^{-1}g\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|g\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad g \in L_2(Q; \mathbb{C}). \quad (3.3)$$

Следовательно,

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\bar{z}}^{-1}\|_{L_2(Q; \mathbb{C}) \rightarrow L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}.$$

Значит, оценка (2.14) доказана.

Ввиду того, что имеет место вложение $W_0(Q) \subset L_2(Q; \mathbb{C})$, операторы A_ε^{-1} , A_0^{-1} можно рассматривать как операторы, действующие из $W_0(Q)$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, тогда из оценки (3.1) получим (2.15).

Аналогично (3.3) из (3.3) и (2.11) имеем

$$\begin{aligned} \|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\bar{z}}^{-1}g - \varepsilon(N\partial_z A_0^{-1}\partial_{\bar{z}}^{-1}g + \\ + M\partial_{\bar{z}}^{-1}A_0^{-1}\partial_{\bar{z}}^{-1}g)\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq \sqrt{\varepsilon}\|g\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad g \in L_2(Q; \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (2.16).

Для завершения доказательства теоремы 2.5 осталось заметить, что (2.17) получается аналогично (2.15), используя оценку (3.2).

Список литературы

- [1] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука. 1993.
- [2] Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. 2003. Том 15, вып. 5. С. 1–108.
- [3] Жиков В.В. Об операторных оценках в теории усреднения // Доклады РАН. 2005. Том 403, вып. 3. С. 305–308.
- [4] Жиков В.В., Пастухова В.В. Об операторных оценках в теории усреднения // Успехи матем. наук. 2016. Том 71, вып. 3. С. 64–73.
- [5] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. 1988.
- [6] Сиражудинов М.М. О G-сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сб. 2008. Том 199, вып. 5. С. 124–155.
- [7] Сиражудинов М.М., Сиражудинов Р.М. О G-сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами // Труды МИАН. 2008. Вып. 121. С. 268–276.
- [8] Сиражудинов М.М. О G-компактности одного класса эллиптических систем первого порядка // Дифф. уравн. 1990. Том 26, вып. 2. С. 298–305.
- [9] Сиражудинов М.М. О краевой задаче Римана–Гильберта // Дифф. уравн. 1989. Том 25, вып. 8. С. 1400–1406.
- [10] Сиражудинов М.М. Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сб. 2017. Том 208, вып. 4. С. 111–128.

М. М. Сиражудинов (М. М. Sirazhudinov)

ДНЦ РАН, ДГУ, ДГУНХ

E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Поступила в редакцию

17.02.2017