УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

О приближении решения задачи Коши для нелинейных систем ОДУ посредством рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву

Рассмотрены системы функций $\varphi_{r,n}(x)$ ($r = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots$), ортонормированные по Соболеву относительно скалярного произведения вида $\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx$, порожденные заданной ортонормированной системой функций $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$). Показано, что ряды и суммы Фурье по системе $\varphi_{r,n}(x)$ ($r = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots$) являются удобным и весьма эффективным инструментом приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Библиография: 25 названий

Consider the systems of functions $\varphi_{r,n}(x)$ ($r = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots$) orthonormal with respect to a Sobolev-type inner product of the form $\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx$ generated by a given orthonormal system of functions $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$). It is shown that the Fourier series in the system $\varphi_{r,n}(x)$ ($r = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots$) and their partial sums are a convenient and very effective tool for the approximate solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations (ODEs).

Bibliography: 25 items

Ключевые слова: задача Коши, ряды Фурье; функции, ортогональным по Соболеву

Keywords: the Cauchy problem, Fourier series, Sobolev orthogonal functions

Введение

В настоящей работе мы продолжаем рассмотрение систем функций, $\{\varphi_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, состоящих из функций $\varphi_{r,n}(x)$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx, \quad (0.1)$$

начатое в [1]. Интерес к таким системам в последнее время интенсивно растет (см. [2] – [11] и цитированную там литературу). Это новое направление принято обозначать словами: «Функции, ортогональные по Соболеву». Возросшее

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00486а)

внимание специалистов к этому направлению теории ортогональных систем можно объяснить в том числе и тем обстоятельством, что ряды Фурье по полиномам (и функциям), ортогональным по Соболеву, оказались естественным и весьма удобным инструментом для представления решений дифференциальных (разностных) уравнений. Это можно показать, в частности, на примере задачи Коши для дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', \dots, y^{(r)}) = 0 \quad (0.2)$$

с начальными условиями $y^{(k)}(a) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$. Наряду с различными сеточными и аппроксимационно-аналитическими методами, для решения этой задачи часто применяют так называемые спектральные методы [13] – [20], суть которых заключается в том, что на первом этапе искомое решение $y(x)$ задачи Коши для уравнения (0.2) представляется в виде ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}_k \psi_k(x) \quad (0.3)$$

по подходящей ортонормированной системе $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. На втором этапе осуществляется подстановка вместо $y(x)$ ряда (0.3) в уравнение (0.2). Это приводит к системе уравнений (вообще говоря, бесконечной) относительно неизвестных коэффициентов $\hat{y}_k$ ($k = 0, 1, \dots$). На третьем этапе требуется решить эту систему с учетом начальных условий $y^{(k)}(a) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$ исходной задачи Коши. Одна из основных трудностей, которая возникает на этом этапе, состоит в том, чтобы выбрать такой ортонормированный базис $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, для которого искомое решение $y(x)$ уравнения (0.1), представленное в виде ряда (0.3), удовлетворяло бы начальным условиям $y^{(k)}(a) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$. Более того, поскольку в результате решения системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\hat{y}_k$ будет найдено только конечное их число с $k = 0, 1, \dots, n$, то весьма важно, чтобы частичная сумма ряда (0.3) вида $y_n(x) = \sum_{k=0}^n \hat{y}_k \psi_k(x)$, будучи приближенным решением рассматриваемой задачи Коши, также удовлетворяла начальным условиям $y_n^{(k)}(a) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$. Одна из основных задач настоящей работы заключается в том, чтобы показать, что системы функций $\{\varphi_{r,n}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортогональных относительно скалярного произведения (0.1) и определяемых посредством равенств

$$\varphi_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (0.4)$$

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (0.5)$$

где система $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована на (a, b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad (0.6)$$

где δ_{kl} – символ Кронекера, является удобным и эффективным инструментом численно-аналитического (спектрального) метода решения задачи Коши для

систем дифференциальных уравнений. Нам понадобятся некоторые факты, установленные в [1]. Через $L^p_\rho(a, b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a, b) , для которых

$$\int_a^b |f(x)|^p \rho(x) dx < \infty.$$

Если $\rho(x) \equiv 1$, то будем писать $L^p_\rho(a, b) = L^p(a, b)$ и $L(a, b) = L^1(a, b)$. Из (0.6) следует, что $\varphi_k(x) \in L^2_\rho(a, b)$ ($k = 0, 1, \dots$). Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a, b)$ ($k = 0, 1, \dots$). Тогда, следуя [1], мы можем определить порожденные системой $\{\varphi_k(x)\}$ функции $\varphi_{r,k}(x)$, определенные равенствами (0.4) и (0.5), для которых при п.в. $x \in (a, b)$ справедливы равенства

$$(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \leq \nu \leq r-1, r \leq k, \\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \leq k, \\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \leq k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leq r-1. \end{cases} \quad (0.7)$$

Через $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho(a, b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства (0.1). Тогда, пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (0.4) и (0.5)) и равенством (0.7), нетрудно увидеть (см. [1]), что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. Следуя [1], мы будем называть систему $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ *ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (0.3) и *порожденной* ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$. В [1] показано, что ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ имеет смешанный характер, а именно:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty \hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x), \quad (0.8)$$

где

$$\hat{f}_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t) \varphi_{r,k}^{(r)}(t) \rho(t) dt = \int_a^b f^{(r)}(t) \varphi_{k-r}(t) \rho(t) dt, \quad (0.9)$$

поэтому ряд вида (0.8) будем называть *смешанным рядом* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, считая это название условным и сокращенным обозначением полного названия: «ряд Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, ортонормированной по Соболеву, порожденной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ ».

1. Некоторые результаты общего характера

Отметим некоторые важные свойства смешанного ряда (0.8), непосредственно вытекающие из (0.7):

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^\infty (\hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x))' = \sum_{k=1}^\infty f'_{r-1,k-1} \varphi_{r-1,k-1}(x). \quad (1.1)$$

$$\int_a^x f'(t)dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1} \int_a^x \varphi_{r-1,k-1}(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x). \quad (1.2)$$

Важное значение имеет свойство смешанного ряда (0.8), которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$Y_{r,N}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^N \hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x) \quad (1.3)$$

при $r \leq N$ совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = a$ r -кратно, т.е.

$$(Y_{r,N}(f, x))_{x=a}^{(\nu)} = f^{(\nu)}(a) \quad (0 \leq \nu \leq r-1). \quad (1.4)$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства системы $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (0.5) и (0.6), установленные в работе [1].

ТЕОРЕМА А. *Предположим, что функции $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют полную в $L_{\rho}^2(a, b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на (a, b) . Тогда система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств (0.5) и (0.6), полна в $W_{L_{\rho}^2(a,b)}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (0.3).*

ТЕОРЕМА В. *Предположим, что $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a, b)$, а функции $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют полную в $L_{\rho}^2(a, b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на (a, b) , $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система, ортонормированная в $W_{L_{\rho}^2(a,b)}^r$ относительно скалярного произведения (0.8), порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств (0.5) и (0.6). Тогда если $f(x) \in W_{L_{\rho}^2(a,b)}^r$, то ряд Фурье (смешанный ряд) (0.8) сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [a, b]$.*

2. О представлении решения задачи Коши для систем ОДУ рядом Фурье по функциям $\varphi_{r,n}(x)$

В настоящем разделе мы рассмотрим задачу о приближении решения задачи Коши для систем ОДУ суммами Фурье по системе $\{\varphi_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональной по Соболеву и порожденной ортонормированной системой функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ посредством равенств (0.5) и (0.6) с $a = 0$, $b = 1$. Мы будем рассматривать задачу Коши для систем ОДУ вида

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = y^0, \quad (2.1)$$

где $y(0) = y^0$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$. Вектор-функцию $f(x, y)$ будем считать непрерывной в некоторой замкнутой области $\bar{G}$ переменных (x, y) , содержащей точку $(0, y_0)$. Кроме того, мы будем считать, что $[0, 1] \times \mathbb{R}^m \subset \bar{G}$. Это требование не сужает дальнейшие рассмотрения, так как, не ограничивая в общности, мы можем, в случае необходимости, продолжить функцию $f(x, y)$ по переменной y на всё $\mathbb{R}^m$, сохраняя свойство ее подчиненности нижеследующему условию Липшица (2.3). Например, если область $\bar{G}$ такова, что прямая

в $\mathbb{R}^{m+1}$ вида $(x, ty_1, \dots, ty_m)$ ($t \in \mathbb{R}$) для каждого $x \in [0, 1]$ и $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ пересекается с границей области $\bar{G}$ не более, чем в двух (граничных для $\bar{G}$) точках (x, y') и (x, y'') , то $f(x, y)$ можно непрерывно продолжить на $[0, 1] \times \mathbb{R}^m$, считая ее постоянной на лучах, выходящих из точек (x, y') и (x, y'') в противоположные направления вдоль прямой $(x, ty_1, \dots, ty_m)$ ($t \in \mathbb{R}$).

Требуется аппроксимировать с заданной точностью вектор-функцию $y = y(x)$, определенную на $[0, 1]$, которая является решением задачи Коши (2.1). Будем считать, что весовая функция $\rho(x)$ интегрируема на $(0, 1)$, а система $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы В, а порожденная система $\{\varphi_{1,n}(x)\}_{n=0}^\infty$ – условиям $(0 \leq x \leq 1)$

$$\delta_\varphi(x) = \sum_{k=1}^\infty (\varphi_{1,k}(x))^2 < \infty, \quad \kappa_\varphi = \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty (\varphi_{1,k}(t))^2 \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (2.2)$$

Кроме того, мы предположим, что по переменной y функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x, a) - f(x, b)\| \leq \lambda \|a - b\|, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.3)$$

где $\|(a_1, \dots, a_m)\| = \sqrt{\sum_{l=1}^m a_l^2}$. Через s обозначим наименьшее натуральное число, для которого $h\lambda\kappa_\varphi < 1$, где $h = 1/s$. Если, в частности, $\lambda\kappa_\varphi < 1$, то $s = 1$. Полагая $x = t/s$, отображим линейно отрезок $[0, s]$ на $[0, 1]$. Относительно новой переменной $t \in [0, s]$ уравнение (2.1) принимает следующий вид

$$\eta'(t) = hf(ht, \eta(t)), \quad \eta(0) = y_0, \quad 0 \leq t \leq s, \quad (2.4)$$

где $h = 1/s$, $\eta(t) = y(ht)$. Мы можем представить отрезок $[0, s]$ в виде объединения отрезков $[l, l+1]$ ($l = 0, 1, \dots, s-1$) и решать поставленную задачу Коши для уравнения (2.4) сначала на $[0, 1]$, а затем, используя найденное начальное значение $\eta(1)$, решать её на $[1, 2]$ и так далее. Мы ограничимся рассмотрением этой задачи для отрезка $[0, 1]$. Поскольку, по предположению, вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\bar{G}$, то из (2.4) следует, что вектор-функция $\eta'(t) = (\eta'_1(t), \dots, \eta'_l(t), \dots, \eta'_m(t))$ непрерывна на $[0, 1]$ и, следовательно, $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_l(t), \dots, \eta_m(t))$, где $\eta_l \in W_{L^2_\rho(0,1)}^1$ при всех $l = 1, \dots, m$, поэтому в силу теоремы В мы можем представить функцию $\eta(t)$ в виде равномерно сходящегося на $[0, 1]$ ряда Фурье по порожденной системе $\{\varphi_{1,n}(t)\}_{n=0}^\infty$:

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{k=1}^\infty \hat{\eta}_{1,k} \varphi_{1,k}(t), \quad (2.5)$$

где

$$\hat{\eta}_{1,k} = (\hat{\eta}_{1,1,k}, \dots, \hat{\eta}_{1,l,k}, \dots, \hat{\eta}_{1,m,k}) = \int_0^1 \eta'(t) \varphi_{k-1}(t) \rho(t) dt \quad (k \geq 1). \quad (2.6)$$

Наша цель состоит в том, чтобы сконструировать итерационный процесс для нахождения приближенных значений коэффициентов $c_k = s\hat{\eta}_{1,k+1}$ ($k = 0, 1, \dots$), где $c_k = (c_k^1, \dots, c_k^m)$. Для этого обратимся к соотношениям (0.7) и (1.1), которые вместе с (2.5) дают

$$\eta'(t) = \sum_{k=0}^\infty \hat{\eta}_{1,k+1} \varphi_k(t), \quad (2.7)$$

где равенство понимается в том смысле, что ряд в правой части равенства (2.7) сходится к η'_l в метрике пространства $L^2_\rho(0, 1)$ для всех $l = 1, \dots, m$. Положим $q(t) = f(ht, \eta(t)) = s\eta'(t)$ и заметим, что в силу (2.6) (см. также (2.7)) коэффициенты Фурье вектор-функции $q = q(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^\infty$ имеют вид

$$c_k(q) = \int_0^1 q(t)\varphi_k(t)\rho(t)dt = s\hat{\eta}_{1,k+1} \quad (k \geq 0). \quad (2.8)$$

С учетом этих равенств мы можем переписать (2.5) в следующем виде

$$\eta(t) = \eta(0) + h \sum_{k=0}^\infty c_k(q)\varphi_{1,k+1}(t). \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9), в свою очередь, выводим следующие соотношения

$$c_k(q) = \int_0^1 f \left[ht, \eta(0) + h \sum_{j=0}^\infty c_j(q)\varphi_{1,j+1}(t) \right] \varphi_k(t)\rho(t)dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство l_2^m , состоящее из вектор-последовательностей $C = (c_0, c_1, \dots)$, для которых определена норма

$$\|C\| = \left(\sum_{j=0}^\infty \sum_{l=1}^m (c_j^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В пространстве l_2^m рассмотрим оператор A , сопоставляющий точке $C \in l_2^m$ точку $C' \in l_2^m$ по правилу

$$c'_k = \int_0^1 f \left[ht, \eta(0) + h \sum_{j=0}^\infty c_j\varphi_{1,j+1}(t) \right] \varphi_k(t)\rho(t)dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

Из (2.10) следует, что точка $C(q) = (c_0(q), c_1(q), \dots)$ является неподвижной точкой оператора $A : l_2^m \rightarrow l_2^m$. Для того чтобы найти точку $C(q)$ методом простых итераций, достаточно показать, что оператор $A : l_2^m \rightarrow l_2^m$ является сжимающим в метрике пространства l_2^m . С этой целью рассмотрим две точки $P, Q \in l_2^m$, где $P = (p_0, \dots)$, $Q = (q_0, \dots)$, и положим $P' = A(P)$, $Q' = A(Q)$. Имеем

$$p'_k - q'_k = \int_0^1 F_{P,Q}(t)\varphi_k(t)\rho(t)dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

где

$$F_{P,Q}(t) = f \left[ht, \eta(0) + h \sum_{j=0}^\infty p_j\varphi_{1,j+1}(t) \right] - f \left[ht, \eta(0) + h \sum_{j=0}^\infty q_j\varphi_{1,j+1}(t) \right]. \quad (2.13)$$

Из (2.12), пользуясь неравенством Бесселя, находим

$$\sum_{k=0}^\infty \sum_{l=1}^m ((p_k^l)' - (q_k^l)')^2 \leq \int_0^1 F_{P,Q}(t)(F_{P,Q}(t))^*\rho(t)dt, \quad (2.14)$$

где $(a_1, \dots, a_m)^*$ – вектор-столбец, полученный в результате транспонирования строки $(a_1, \dots, a_m)$. Из (2.13) и (2.3) имеем

$$F_{P,Q}(t)(F_{P,Q}(t))^*\rho(t) \leq (h\lambda)^2 \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=0}^\infty (p_j^l - q_j^l)\varphi_{1,j+1}(t) \right)^2, \quad (2.15)$$

откуда, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, выводим

$$F_{P,Q}(t)(F_{P,Q}(t))^* \rho(t) \leq (h\lambda)^2 \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_{1,j+1}(t))^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m (p_j^l - q_j^l)^2.$$

Сопоставляя (2.15) с (2.14), находим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m ((p_j^l)' - (q_j^l)')^2 \leq \\ & (h\lambda)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m (p_j^l - q_j^l)^2 \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_{1,j+1}(t))^2 \rho(t) dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из (2.16) и (2.2) имеем

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m ((p_j^l)' - (q_j^l)')^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq h\kappa_{\varphi} \lambda \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m (p_j^l - q_j^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

Неравенство (2.17) показывает, что если $h\kappa_{\varphi} \lambda < 1$, то оператор $A : l_2^m \rightarrow l_2^m$ является сжимающим и, как следствие, итерационный процесс $C^{\nu+1} = A(C^{\nu})$ сходится к точке $C(q)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Однако с точки зрения приложений важно рассмотреть конечномерный аналог оператора A . Обозначим через $\mathbb{R}_m^N$ пространство матриц C размерности $m \times N$, в котором определена норма

$$\|C\|_N^m = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=1}^m (c_j^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы рассмотрим оператор $A_N : \mathbb{R}_m^N \rightarrow \mathbb{R}_m^N$, сопоставляющий точке $C_N = (c_0, \dots, c_{N-1}) \in \mathbb{R}_m^N$ точку $C'_N = (c'_0, \dots, c'_{N-1}) \in \mathbb{R}_m^N$ по правилу

$$c'_k = \int_0^1 f \left[ht, \eta(0) + h \sum_{j=0}^{N-1} c_j \varphi_{1,j+1}(t) \right] \varphi_k(t) \rho(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.18)$$

Рассмотрим две точки $P_N, Q_N \in \mathbb{R}_m^N$, где $P_N = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1})$, $Q_N = (q_0, q_1, \dots, q_{N-1})$ и положим $P'_N = A_N(P_N)$, $Q'_N = A_N(Q_N)$. Дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к неравенству (2.17), мы получим

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=1}^m ((p_j^l)' - (q_j^l)')^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq h\kappa_{\varphi} \lambda \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=1}^m (p_j^l - q_j^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$

Неравенство (2.19) показывает, что если $h\kappa_{\varphi} \lambda < 1$, то оператор $A_N : \mathbb{R}_m^N \rightarrow \mathbb{R}_m^N$ является сжимающим и, как следствие, итерационный процесс $C_N^{\nu+1} = A_N(C_N^{\nu})$ при $\nu \rightarrow \infty$ сходится к его неподвижной точке, которую мы обозначим через $\bar{C}_N(q) = (\bar{c}_0(q), \dots, \bar{c}_{N-1}(q))$. С другой стороны, рассмотрим точку $C_N(q) = (c_0(q), \dots, c_{N-1}(q))$, составленную из искомым коэффициентов Фурье вектор-функции q по системе φ . Нам остается оценить погрешность, проистекающую в результате замены точки $C'_N(q)$ точкой $\bar{C}_N(q)$. Другими словами, требуется оценить величину $\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=1}^m (c_j^l(q) - \bar{c}_j^l(q))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

С этой целью рассмотрим точку $C'_N(q) = A_N(C_N(q)) = (c'_0(q), \dots, c'_{N-1}(q))$ и запишем

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m \leq \|C_N(q) - C'_N(q)\|_N^m + \|C'_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m. \quad (2.20)$$

Далее, пользуясь неравенством (2.19), имеем

$$\begin{aligned} \|C'_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m &= \|A_N(C_N(q)) - A_N(\bar{C}_N(q))\|_N^m \leq \\ &h\kappa_\varphi\lambda\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из (2.20) и (2.21) выводим

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m \leq \frac{1}{1 - h\kappa_\varphi\lambda} \|C_N(q) - C'_N(q)\|_N^m. \quad (2.22)$$

Чтобы оценить норму в правой части неравенства (2.22), заметим, что в силу неравенства Бесселя

$$(\|C_N(q) - C'_N(q)\|_N^m)^2 \leq \int_0^1 F_{C(q), C_N(q)}(t) (F_{C(q), C_N(q)}(t))^* \rho(t) dt, \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} F_{C(q), C_N(q)}(t) &= f \left[ht, \eta(0) + h \sum_{j=0}^{\infty} c_j(q) \varphi_{1,j+1}(t) \right] \\ &\quad - f \left[ht, \eta(0) + h \sum_{j=0}^{N-1} c_j(q) \varphi_{1,j+1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.24) и (2.3) следует, что

$$F_{C(q), C_N(q)}(t) (F_{C(q), C_N(q)}(t))^* \leq \lambda^2 \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=N}^{\infty} hc_j^l(q) \varphi_{1,j+1}(t) \right)^2,$$

отсюда с учетом того, что $hc_k = \hat{\eta}_{1,k+1}$ ($k = 0, 1, \dots$), имеем

$$F_{C(q), C_N(q)}(t) (F_{C(q), C_N(q)}(t))^* \leq \lambda^2 \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=N}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j+1} \varphi_{1,j+1}(t) \right)^2. \quad (2.25)$$

Сопоставляя (2.25) с (2.23), получаем

$$(\|C_N(q) - C'_N(q)\|_N^m)^2 \leq \lambda^2 \sum_{l=1}^m \int_0^1 \left(\sum_{j=N}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j+1} \varphi_{1,j+1}(t) \right)^2 \rho(t) dt, \quad (2.26)$$

где согласно (2.6)

$$\hat{\eta}_{1,j+1} = \int_0^1 \eta'(t) \varphi_j(t) \rho(t) dt \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (2.27)$$

– коэффициенты Фурье вектор-функции $\eta'(t) = hf(ht, \eta(t))$.

Подводя итоги, из (2.22) и (2.26) мы можем сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть область $\bar{G}$ такова, что $[0, 1] \times \mathbb{R}^m \subset \bar{G}$, вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\bar{G}$ и удовлетворяет условию Липшица (2.3), а h и λ удовлетворяют неравенству $h\lambda\kappa_\varphi < 1$, где величина κ_φ определена равенством (2.2). Далее, пусть l_2^m гильбертово пространство, состоящее из вектор-последовательностей $C = (c_0, \dots)$, для которых введена норма $\|C\| = \left(\sum_{j=0}^\infty \sum_{l=1}^m (c_j^l)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, оператор $A : l_2^m \rightarrow l_2^m$ сопоставляет точке $C \in l_2^m$ точку $C' \in l_2^m$ по правилу (2.10). Кроме того, пусть $A_N : \mathbb{R}_m^N \rightarrow \mathbb{R}_m^N$ – конечномерный аналог оператора A , сопоставляющий точке $C_N = (c_0, \dots, c_N) \in \mathbb{R}_m^N$ точку $C'_N = (c'_0, \dots, c'_N) \in \mathbb{R}_m^N$ по правилу (2.18). Тогда операторы $A : l_2^m \rightarrow l_2^m$ и $A_N : \mathbb{R}_m^N \rightarrow \mathbb{R}_m^N$ являются сжимающими и, следовательно, существуют их неподвижные точки $C(q) = (c_0(q), c_1(q), \dots) = A(C(q)) \in l_2^m$ и $\bar{C}_N(q) = (\bar{c}_0(q), \bar{c}_1(q), \dots, \bar{c}_N(q)) = A_N(\bar{C}_N(q)) \in \mathbb{R}_m^N$, для которых имеет место неравенство

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N^m \leq \frac{\lambda\sigma_N^\varphi(\eta)}{1 - h\kappa_\varphi\lambda}, \quad (2.28)$$

где

$$\sigma_N^\varphi(\eta) = \left(\sum_{l=1}^m \int_0^1 \left(\sum_{j=N+1}^\infty \hat{\eta}_{1,j} \varphi_{1,j}(t)\right)^2 \rho(t) dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.29)$$

а $C_N(q) = (c_0(q), \dots, c_{N-1}(q))$ – конечная последовательность, составленная из первых N компонент точки $C(q)$, при этом в силу (2.7) справедливо также равенство $hC_N(q) = (\hat{\eta}_{1,1}, \hat{\eta}_{1,2}, \dots, \hat{\eta}_{1,N})$.

Заметим, что величина

$$V_N(\eta, t) = V_N^\varphi(\eta, t) = \eta(x) - Y_{1,N}(\eta, x) = \sum_{j=N+1}^\infty \hat{\eta}_{1,j} \varphi_{1,j}(t), \quad (2.30)$$

фигурирующая в правой части неравенства (2.28), представляет собой остаточный член ряда Фурье функции η по функциям $\varphi_{1,k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$), образующим ортонормированную систему по Соболеву относительно скалярного произведения (0.3), порожденным функциями φ_k посредством равенств (0.5) и (0.6) с $r = 1$, $a = 0$, $b = 1$. Неравенство (2.28) непосредственно приводит к задаче об исследовании поведения величины $\sigma_N^\varphi(\eta) = \left(\int_0^1 (\eta(x) - Y_{1,N}(\eta, x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Другими словами, требуется исследовать задачу об оценке приближения функции η в метрике пространства $L_\rho^2(0, 1)$ частичными суммами ряда Фурье (2.5) вида $Y_{1,N}(\eta, x) = \eta(0) + \sum_{k=1}^N \hat{\eta}_{1,k} \varphi_{1,k}(t)$.

Список литературы

- [1] Шарапудинов И.И. Ортогональные по Соболеву системы, порожденные ортогональными функциями // Изв. РАН. Сер. Математическая. 2018(принята к печати) Т. 82.
- [2] Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». ООО «Издательство «Научная книга». Саратов. 2016. С. 329–332.

- [3] Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65. Pp. 151–175.
- [4] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. North-Holland. 1993. Vol. 48. Pp. 113–131.
- [5] Meijer H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.
- [6] Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Issue 2. Pp. 289–303.
- [7] Lopez G., Marcellan F., Vanassche W. Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11:1. Pp. 107–137.
- [8] Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. Pp. 547–594.
- [9] Marcellan F., Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015. Vol. 33. Issue 3. Pp. 308–352.
- [10] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Математический сборник. 2003. Т. 194, вып. 3. С. 115–148.
- [11] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: Издательство Дагестанского научного центра. 2004. С. 1–176.
- [12] Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. SIAM. Philadelphia. 2000.
- [13] Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University. 1996.
- [14] Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. Москва: Машиностроение. 1986.
- [15] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. Москва: Наука. 1983.
- [16] Арушанян О.Б., Волченкова Н.И., Залеткин С.Ф. Применение рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Вып. 11. С. 517–531.
- [17] Лукомский Д.С., Терехин П.А. Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». ООО «Издательство «Научная книга». Саратов. 2016. С. 171–173.
- [18] Магомед-Касумов М.Г. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». ООО «Издательство «Научная книга». Саратов. 2016. С. 176–178.
- [19] Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференциальные уравнения. 2017 (принята к печати).
- [20] Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Математические заметки. 2010. Т. 88, вып. 1, С. 116–147.
- [21] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва: АФЦ. 1999.

- [22] Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства g -кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.
- [23] Faber G. Ober die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1910. Vol. 19. Pp. 104–112.
- [24] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 1–24.
- [25] Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва: Физматгиз. 1962.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)

Дагестанский научный центр РАН

Владикавказский научный центр РАН

E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию

31.05.2017