

УДК 517.538

М. С. Султанахмедов

Рекуррентные формулы для полиномов Чебышева, ортонормированных на равномерных сетках

Рассмотрены рекуррентные соотношения для классических полиномов Чебышева $\{\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)\}_{n=0}^{N-1}$, образующих конечную ортонормированную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ с весом $\mu_N^{\alpha,\beta}(x) = c \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$, где $c = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}$, $\alpha, \beta > -1$. Особое внимание уделено наиболее употребительным случаям: $\alpha = \beta$; $\alpha = \beta = 0$; $\alpha = \beta = \pm 1/2$ и некоторым другим. При доказательстве рекуррентных формул существенно используются хорошо известные свойства рассматриваемых полиномов Чебышева, такие как свойство ортогональности, разностные свойства и связь с обобщенной гипергеометрической функцией.

Библиография: 7 названий.

We consider recurrence relations for the classical Chebyshev polynomials $\{\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)\}_{n=0}^{N-1}$, forming a finite orthonormal system on a uniform grid $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ with weight $\mu_N^{\alpha,\beta}(x) = c \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$, where $c = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}$, $\alpha, \beta > -1$. Special attention is paid to the most commonly used cases: $\alpha = \beta$; $\alpha = \beta = 0$; $\alpha = \beta = \pm 1/2$ and several others. In the proof of recurrence formulas we substantially use the well-known properties of the considered Chebyshev polynomials such as the orthogonality property, difference properties and the connection with the generalized hypergeometric function.

Bibliography: 7 items.

Ключевые слова: полиномы Чебышева; рекуррентные формулы; полиномы, ортогональные на сетках; равномерная сетка; аппроксимация функций.

Keywords: Chebychev polynomials; recurrence formulas; polynomials orthogonal on grids; uniform grid; function approximation.

Введение

Классические полиномы Чебышева, ортогональные на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, впервые были введены и исследованы в работах П.Л. Чебышева [1–3] в связи с задачей обработки наблюдений методом наименьших квадратов. Теория этих полиномов получила дальнейшее развитие в работах многочисленных авторов и нашла важные приложения в таких областях как вычислительная математика, квантовая механика, теория представлений групп, математическая биология и многих других (см. [4–7] и цитированную там литературу).

В последнее время полиномы Чебышева дискретной переменной часто применяются в таких задачах как обработка и сжатие временных рядов. При этом важное значение имеют устойчивые методы вычисления значений полиномов Чебышева как в узлах равномерной сетки, на которой они образуют ортогональную систему, так и в заданной точке числовой оси. Одним из эффективных инструментов решения этой задачи являются рекуррентные соотношения, которым они удовлетворяют. Однако мы не можем указать ни одного литературного источника, в котором бы в удобном для применения виде были представлены разнообразные рекуррентные формулы для этих полиномов. В настоящей статье предпринята попытка устраниТЬ этот пробел и представить более или менее полный перечень рекуррентных формул для ортонормированных полиномов Чебышева $\{\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)\}_{n=0}^{N-1}$, образующих конечную ортонормированную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ с весом

$$\mu_N^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}. \quad (0.1)$$

Особое внимание уделено наиболее употребительным случаям: $\alpha = \beta$; $\alpha = \beta = 0$; $\alpha = \beta = \pm 1/2$ и некоторым другим.

1. Некоторые сведения о полиномах Чебышева, ортогональных на равномерных сетках

Следуя [5], через $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ обозначим полиномы Чебышева, определяемые равенством

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}}, \quad (1.1)$$

здесь $a^{[0]} = 1$, $a^{[n]} = a(a-1)\dots(a-n+1)$; $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$.

При $\alpha, \beta > -1$ полиномы $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$) образуют на Ω_N ортогональную систему с весом $\mu_N^{\alpha,\beta}(x)$, т.е.

$$\sum_{x=0}^{N-1} T_n^{\alpha,\beta}(x, N) T_m^{\alpha,\beta}(x, N) \mu_N^{\alpha,\beta}(x) = \delta_{n,m} h_{n,N}^{\alpha,\beta}, \quad 0 \leq n, m \leq N-1,$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера,

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (1.2)$$

причем при $n = 0$ в последнем выражении произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ необходимо заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$.

Известно (см. [5; § 3.4]), что полиномы Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$T_0^{\alpha,\beta}(x, N) = 1, \quad T_1^{\alpha,\beta}(x, N) = x(\alpha+\beta+2)/(N-1) - \beta - 1, \quad (1.3)$$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, N) = (\kappa_n^{\alpha,\beta}x - \sigma_n^{\alpha,\beta})T_{n-1}^{\alpha,\beta}(x, N) - \nu_n^{\alpha,\beta}T_{n-2}^{\alpha,\beta}(x, N), \quad (n \geq 2), \quad (1.4)$$

где

$$\kappa_n^{\alpha,\beta} = \frac{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)}{n(n + \alpha + \beta)(N - n)}, \quad (1.5)$$

$$\sigma_n^{\alpha,\beta} = \kappa_n^{\alpha,\beta} \left(\frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2N)}{4(2n + \alpha + \beta - 2)(2n + \alpha + \beta)} + \frac{\alpha - \beta + 2N - 2}{4} \right), \quad (1.6)$$

$$\nu_n^{\alpha,\beta} = \frac{(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)(N + n + \alpha + \beta - 1)}{n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)(N - n)}. \quad (1.7)$$

2. Ортонормированные полиномы $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$

Для всех $0 \leq n \leq N - 1$ положим

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x, N) = [h_{n,N}^{\alpha,\beta}]^{-1/2} T_n^{\alpha,\beta}(x, N). \quad (2.1)$$

Очевидно, что полиномы $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N - 1$) образуют ортонормированную с весом (0.1) систему на Ω_N :

$$\sum_{x=0}^{N-1} \tau_n^{\alpha,\beta}(x, N) \tau_m^{\alpha,\beta}(x, N) \mu_N^{\alpha,\beta}(x) = \delta_{n,m}. \quad (2.2)$$

Из (1.3) и (2.1) находим первые два ортонормированных полинома:

$$\tau_0^{\alpha,\beta}(x, N) = 2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}} \left[\frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} = [2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha + 1, \beta + 1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_1^{\alpha,\beta}(x, N) &= \left[\frac{(\alpha + \beta + 2)(N - 1)}{2^{\alpha+\beta+1}(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 4)}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\beta + 2)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x}{N - 1} - \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta + 2} \right] \\ &= \left[2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha + 2, \beta + 2) \frac{N + \alpha + \beta + 1}{(N - 1)(\alpha + \beta + 2)} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{x}{N - 1} - \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta + 2} \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера. Если же $n \geq 2$, то из (1.2), (1.4) и (2.1) имеем:

$$\begin{aligned} &[h_{n,N}^{\alpha,\beta}]^{\frac{1}{2}} \tau_n^{\alpha,\beta}(x, N) = \\ &(\kappa_n^{\alpha,\beta} x - \sigma_n^{\alpha,\beta}) [h_{n-1,N}^{\alpha,\beta}]^{\frac{1}{2}} \tau_{n-1}^{\alpha,\beta}(x, N) - \nu_n^{\alpha,\beta} [h_{n-2,N}^{\alpha,\beta}]^{\frac{1}{2}} \tau_{n-2}^{\alpha,\beta}(x, N), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N) = \\ &\left(\left[\frac{h_{n-1,N}^{\alpha,\beta}}{h_{n,N}^{\alpha,\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \kappa_n^{\alpha,\beta} x - \left[\frac{h_{n-1,N}^{\alpha,\beta}}{h_{n,N}^{\alpha,\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \sigma_n^{\alpha,\beta} \right) \tau_{n-1}^{\alpha,\beta}(x, N) - \left[\frac{h_{n-2,N}^{\alpha,\beta}}{h_{n,N}^{\alpha,\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \nu_n^{\alpha,\beta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пусть сначала $\alpha + \beta \neq -1$, тогда из (1.2) имеем

$$\frac{h_{n-1,N}^{\alpha,\beta}}{h_{n,N}^{\alpha,\beta}} = \frac{N - n}{N + n + \alpha + \beta} \frac{n(n + \alpha + \beta)}{(n + \alpha)(n + \beta)} \frac{2n + \alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta - 1},$$

$$\frac{h_{n-2,N}^{\alpha,\beta}}{h_{n,N}^{\alpha,\beta}} = \frac{N-n}{N+n+\alpha+\beta} \frac{N-n+1}{N+n+\alpha+\beta-1} \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta)}{(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \cdot \\ \frac{n(n+\alpha+\beta-1)}{(n+\beta)(n+\beta-1)} \frac{2n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta-3}.$$

Используя теперь (1.5)–(1.7), мы можем переписать выражение (2.5) в следующем виде:

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N) = (\hat{\kappa}_n^{\alpha,\beta} x - \hat{\sigma}_n^{\alpha,\beta}) \tau_{n-1}^{\alpha,\beta}(x, N) - \hat{\nu}_n^{\alpha,\beta} \tau_{n-2}^{\alpha,\beta}(x, N), \quad (2.6)$$

где

$$\hat{\kappa}_n^{\alpha,\beta} = (2n+\alpha+\beta) \left[\frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta+1)}{n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)(N+n+\alpha+\beta)(N-n)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.7)$$

$$\hat{\sigma}_n^{\alpha,\beta} = \frac{\hat{\kappa}_n^{\alpha,\beta}}{4} \left(\frac{(\beta^2 - \alpha^2)(2N+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} + 2(N-1) + \alpha - \beta \right), \quad (2.8)$$

$$\hat{\nu}_n^{\alpha,\beta} = \frac{2n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta-2} \left[\frac{N+n+\alpha+\beta-1}{N+n+\alpha+\beta} \frac{N-n+1}{N-n} \frac{n-1}{n} \frac{n+\alpha-1}{n+\alpha} \right. \\ \left. \frac{n+\beta-1}{n+\beta} \frac{n+\alpha+\beta-1}{n+\alpha+\beta} \frac{2n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta-3} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

Если же $\alpha + \beta = -1$, то равенства (2.6) – (2.9) имеют место при $n \geq 3$. Для $n = 2$ формула (2.6) также имеет место, причем выражения для коэффициентов (2.7) – (2.8) остаются прежними. Что касается равенства (2.9), то вместо него при $\alpha + \beta = -1$ должно быть

$$\hat{\nu}_2^{\alpha,\beta} = 3\sqrt{2} \left[\frac{N}{N+1} \frac{N-1}{N-2} \frac{\alpha+1}{\alpha+2} \frac{\beta+1}{\beta+2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

и вообще, рекуррентные формулы в этом случае принимают следующий, более компактный, вид, который мы рассмотрим в следующем параграфе.

3. Рекуррентные соотношения в некоторых частных случаях

Рассмотрим теперь вид рекуррентных соотношений для полиномов $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ в некоторых важных частных случаях, встречающихся в практических задачах.

1. Случай $\alpha + \beta = -1$. Нулевой полином:

$$\tau_0^{\alpha,\beta}(x, N) = \left[\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1) \right]^{-1/2} = \frac{1}{[\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Первый полином принимает вид:

$$\tau_1^{\alpha,\beta}(x, N) = \left[\frac{2(N-1)}{N\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x}{N-1} + \alpha \right].$$

В связи с особенностью, возникающей в ходе преобразования выражения (2.5) при $n = 2$ (из-за наличия в нем отношения $[h_{0,N}^{\alpha,\beta}/h_{2,N}^{\alpha,\beta}]^{1/2}$), этот случай необходимо рассмотреть отдельно. Чтобы найти второй полином, рассмотрим рекуррентную формулу (1.4) для $n = 2$:

$$T_2^{\alpha,\beta}(x, N) = \left(\frac{3(x - \alpha - 1)}{N - 2} - \alpha - 2 \right) T_1^{\alpha,\beta}(x, N) - \frac{3(\alpha + 1)(\beta + 1)N}{2(N - 2)} T_0^{\alpha,\beta}(x, N),$$

что, с учетом (1.3), дает нам

$$T_2^{\alpha,\beta}(x, N) = \left(\frac{x}{N - 1} + \alpha \right) \left(\frac{3(x + \beta)}{N - 2} + \beta - 1 \right) - \frac{3(\alpha + 1)(\beta + 1)N}{2(N - 2)}.$$

Из (2.1) имеем

$$\tau_2^{\alpha,\beta}(x, N) = \left[\frac{(N + 1)^{[2]}}{(N - 1)^{[2]}} \frac{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(\beta + 3)}{8} \right]^{-\frac{1}{2}} T_2^{\alpha,\beta}(x, N),$$

откуда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \tau_2^{\alpha,\beta}(x, N) = & \\ & \left[\frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(\beta + 3)} \frac{(N - 1)^{[2]}}{(N + 1)^{[2]}} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ 2 \left(\frac{x}{N - 1} + \alpha \right) \left(\frac{3(x + \beta)}{N - 2} + \beta - 1 \right) - \right. \\ & \left. - 3(\alpha + 1)(\beta + 1) \frac{N}{N - 2} \right\}. \end{aligned}$$

И, наконец, для полиномов старших степеней ($n \geq 3$) имеет место формула

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N) = (\hat{\kappa}_n^{\alpha,\beta} x - \hat{\sigma}_n^{\alpha,\beta}) \tau_{n-1}^{\alpha,\beta}(x, N) - \hat{\nu}_n^{\alpha,\beta} \tau_{n-2}^{\alpha,\beta}(x, N), \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_n^{\alpha,\beta} &= \frac{2(2n - 1)}{\sqrt{(n + \alpha)(n + \beta)}} \left[(N + n - 1)(N - n) \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \hat{\sigma}_n^{\alpha,\beta} &= \frac{\hat{\kappa}_n^{\alpha,\beta}}{4} \left(\frac{(2\alpha + 1)(2N - 1)}{(2n - 1)(2n - 3)} + 2(N + \alpha) - 1 \right), \\ \hat{\nu}_n^{\alpha,\beta} &= \frac{2n - 1}{2n - 3} \left[\frac{N + n - 2}{N + n - 1} \frac{N - n + 1}{N - n} \frac{n + \alpha - 1}{n + \alpha} \frac{n + \beta - 1}{n + \beta} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для нахождения $\tau_2^{\alpha,\beta}(x, N)$ можно воспользоваться также модифицированной рекуррентной формулой (3.1), в которой изменено второе слагаемое в правой части следующим образом:

$$\tau_2^{\alpha,\beta}(x, N) = (\hat{\kappa}_2^{\alpha,\beta} x - \hat{\sigma}_2^{\alpha,\beta}) \tau_1^{\alpha,\beta}(x, N) - \sqrt{2} \hat{\nu}_2^{\alpha,\beta} \tau_0^{\alpha,\beta}(x, N).$$

2. Случай $\alpha = \beta$ (дискретный аналог *ультрасферических* полиномов). Для краткости введем обозначение $\tau_n^\alpha(x, N) = \tau_n^{\alpha,\alpha}(x, N)$, тогда

$$\tau_0^\alpha(x, N) = \left[\frac{\Gamma(\alpha + \frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha + 1)\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}\tau_1^\alpha(x, N) &= \left[\frac{2(N-1)}{\sqrt{\pi}(N+2\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{5}{2})}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2x}{N-1} - 1 \right]; \\ \tau_n^\alpha(x, N) &= \kappa_n^\alpha(2x-N+1)\tau_{n-1}^\alpha(x, N) - \nu_n^\alpha\tau_{n-2}^\alpha(x, N), \\ \kappa_n^\alpha &= \left[\frac{4(n+\alpha)^2 - 1}{n(n+2\alpha)(N+n+2\alpha)(N-n)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \nu_n^\alpha &= \left[\frac{N+n+2\alpha-1}{N+n+2\alpha} \frac{N-n+1}{N-n} \frac{n-1}{n} \frac{n+2\alpha-1}{n+2\alpha} \frac{2n+2\alpha+1}{2n+2\alpha-3} \right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Мы не останавливаемся здесь на особенном случае, когда $\alpha = \beta = -1/2$, т.к. он будет рассмотрен ниже отдельно.

3. Случай «зеркальных» значений параметров $\beta = -\alpha$ ($-1 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned}\tau_0^{\alpha, -\alpha}(x, N) &= \left[\frac{\sin \pi \alpha}{2\pi \alpha} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \tau_1^{\alpha, -\alpha}(x, N) &= \left[\frac{3 \sin \pi \alpha}{2\pi \alpha(1-\alpha^2)} \frac{N-1}{N+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2x}{N-1} + \alpha - 1 \right]; \\ \tau_n^{\alpha, -\alpha}(x, N) &= \kappa_n^{\alpha, -\alpha}(2x-N+1-\alpha)\tau_{n-1}^{\alpha, -\alpha}(x, N) - \nu_n^{\alpha, -\alpha}\tau_{n-2}^{\alpha, -\alpha}(x, N),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\kappa_n^{\alpha, -\alpha} &= \left[\frac{4n^2 - 1}{(n^2 - \alpha^2)(N^2 - n^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \nu_n^{\alpha, -\alpha} &= \left[\frac{N^2 - (n-1)^2}{N^2 - n^2} \frac{(n-1)^2 - \alpha^2}{n^2 - \alpha^2} \frac{2n+1}{2n-3} \right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

4. Случай, когда один из параметров α или β обращается в ноль:

$$\begin{aligned}\tau_0^{\alpha, 0}(x, N) &= \left[\frac{\alpha+1}{2^{\alpha+1}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_1^{\alpha, 0}(x, N) = \left[\frac{(\alpha+3)(N-1)}{2^{\alpha+1}(N+\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\alpha+2}{N-1} x - 1 \right], \\ \tau_n^{\alpha, 0}(x, N) &= (\kappa_n^{\alpha, 0}x - \sigma_n^{\alpha, 0})\tau_{n-1}^{\alpha, 0}(x, N) - \nu_n^{\alpha, 0}\tau_{n-2}^{\alpha, 0}(x, N),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\kappa_n^{\alpha, 0} &= \frac{2n+\alpha}{n(n+\alpha)} \left[\frac{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha+1)}{(N+n+\alpha)(N-n)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_n^{\alpha, 0} &= \frac{\kappa_n^{\alpha, 0}}{4} \left(2(N-1) + \alpha - \frac{\alpha^2(2N+\alpha)}{(2n+\alpha-2)(2n+\alpha)} \right), \\ \nu_n^{\alpha, 0} &= \frac{2n+\alpha}{2n+\alpha-2} \frac{n-1}{n} \frac{n+\alpha-1}{n+\alpha} \left[\frac{N+n+\alpha-1}{N+n+\alpha} \frac{N-n+1}{N-n} \frac{2n+\alpha+1}{2n+\alpha-3} \right]^{\frac{1}{2}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_0^{0, \beta}(x, N) &= \left[\frac{\beta+1}{2^{\beta+1}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_1^{0, \beta}(x, N) = \left[\frac{(\beta+3)(N-1)}{2^{\beta+1}(N+\beta+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\beta+2}{N-1} x - \beta - 1 \right], \\ \tau_n^{0, \beta}(x, N) &= \frac{2n+\beta}{n(n+\beta)} \left[(\hat{\kappa}_n^{0, \beta}x - \hat{\sigma}_n^{0, \beta})\tau_{n-1}^{0, \beta}(x, N) - \hat{\nu}_n^{0, \beta}\tau_{n-2}^{0, \beta}(x, N) \right],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_n^{0,\beta} &= \left[\frac{(2n + \beta - 1)(2n + \beta + 1)}{(N + n + \beta)(N - n)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \hat{\sigma}_n^{0,\beta} &= \frac{\hat{\kappa}_n^{0,\beta}}{4} \left(2(N - 1) - \beta + \frac{\beta^2(2N + \beta)}{(2n + \beta - 2)(2n + \beta)} \right), \\ \hat{\nu}_n^{0,\beta} &= \frac{(n - 1)(n + \beta - 1)}{2n + \beta - 2} \left[\frac{N + n + \beta - 1}{N + n + \beta} \frac{N - n + 1}{N - n} \frac{2n + \beta + 1}{2n + \beta - 3} \right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Далее рассмотрим конкретные значения параметров α и β , часто использующиеся на практике.

5. Случай $\alpha = \beta = 0$ (*дискретный аналог полиномов Лежандра*):

$$\tau_0^0(x, N) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tau_1^0(x, N) = \left[\frac{3}{2(N^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}} [2x - N + 1],$$

$$\tau_n^0(x, N) = \kappa_n^0 (2x - N + 1) \tau_{n-1}^0(x, N) - \nu_n^0 \tau_{n-2}^0(x, N),$$

где коэффициенты:

$$\kappa_n^0 = \frac{1}{n} \left[\frac{4n^2 - 1}{N^2 - n^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \nu_n^0 = \frac{n - 1}{n} \left[\frac{(2n + 1)(N^2 - (n - 1)^2)}{(2n - 3)(N^2 - n^2)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

6. Случай $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ (*дискретные полиномы Чебышева первого рода*):

$$\tau_0^{-\frac{1}{2}}(x, N) = \pi^{-1/2}, \quad \tau_1^{-\frac{1}{2}}(x, N) = [(\pi/2) N (N - 1)]^{-1/2} [2x - N + 1],$$

т.к. в этом случае $\alpha + \beta = -1$, отдельно выписываем еще и второй полином:

$$\tau_2^{-\frac{1}{2}}(x, N) = \left[\frac{2}{\pi} \frac{(N - 1)^{[2]}}{(N + 1)^{[2]}} \right]^{1/2} \left\{ 2 \left(\frac{2x}{N - 1} - 1 \right) \left(\frac{2x - 1}{N - 2} - 1 \right) - \frac{N}{N - 2} \right\}.$$

Для полиномов старших степеней ($n \geq 3$) имеет место соотношение:

$$\tau_n^{-\frac{1}{2}}(x, N) = \kappa_n^{-\frac{1}{2}} (2x - N + 1) \tau_{n-1}^{-\frac{1}{2}}(x, N) - \nu_n^{-\frac{1}{2}} \tau_{n-2}^{-\frac{1}{2}}(x, N), \quad (3.2)$$

где

$$\kappa_n^{-\frac{1}{2}} = 2 [(N + n - 1)(N - n)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu_n^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{N + n - 2}{N + n - 1} \frac{N - n + 1}{N - n} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как было отмечено выше, для нахождения $\tau_2^{-\frac{1}{2}}(x, N)$ можно модифицировать рекуррентную формулу (3.2) следующим образом:

$$\tau_2^{-\frac{1}{2}}(x, N) = \kappa_2^{-\frac{1}{2}} (2x - N + 1) \tau_1^{-\frac{1}{2}}(x, N) - \sqrt{2} \nu_2^{-\frac{1}{2}} \tau_0^{-\frac{1}{2}}(x, N).$$

7. Случай $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (*дискретные полиномы Чебышева второго рода*):

$$\tau_0^{\frac{1}{2}}(x, N) = \sqrt{2/\pi}, \quad \tau_1^{\frac{1}{2}}(x, N) = 2 [(\pi/2) (N - 1) (N + 2)]^{-1/2} [2x - N + 1];$$

$$\tau_n^{\frac{1}{2}}(x, N) = \kappa_n^{\frac{1}{2}} \left[2(2x - N + 1)\tau_{n-1}^{\frac{1}{2}}(x, N) - \nu_n^{\frac{1}{2}} \tau_{n-2}^{\frac{1}{2}}(x, N) \right], \text{ где}$$

$$\kappa_n^{\frac{1}{2}} = [(N - n)(N + n + 1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu_n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(N + n)(N - n + 1)}.$$

8. Случай «симметричных» значений параметров $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ (*так называемые «получебышевские» полиномы*). Полиномы наименьших степеней в этом случае выражаются следующим образом:

$$\tau_0^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, N) = \pi^{-1/2}, \quad \tau_1^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, N) = [\pi(N^2 - 1)]^{-1/2} [4x - 3N + 3],$$

$$\tau_0^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x, N) = \pi^{-1/2}, \quad \tau_1^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x, N) = [\pi(N^2 - 1)]^{-1/2} [4x - N + 1],$$

а рекуррентные соотношения принимают вид:

$$\tau_n^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, N) = \tilde{\kappa}_n(4x - 2N + 3)\tau_{n-1}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, N) - \tilde{\nu}_n \tau_{n-2}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, N),$$

$$\tau_n^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x, N) = \tilde{\kappa}_n(4x - 2N + 1)\tau_{n-1}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x, N) - \tilde{\nu}_n \tau_{n-2}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x, N),$$

где

$$\tilde{\kappa}_n = [N^2 - n^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\nu}_n = \left[\frac{N^2 - (n-1)^2}{N^2 - n^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Список литературы

- [1] Чебышев П.Л. О непрерывных дробях (1855) // Полное собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд. АН СССР. 1947. С. 103–126.
- [2] Чебышев П.Л. Об одном новом ряде // Полное собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд. АН СССР. 1947. С. 236–238.
- [3] Чебышев П.Л. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859) // Полное собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд. АН СССР. 1947. С. 314–334.
- [4] Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной и представления трехмерной группы вращений // Функция, анализ и его прил. 1985. Том 19, вып. 3. С. 22–35.
- [5] Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала: ДГПУ. 1997. 252 с.
- [6] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала: Дагестан. науч. центр РАН. 2004. 276 с.
- [7] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам // Дагестанские Электронные Математические Известия. 2015. Вып. 3 (Специальный выпуск). С. 1–254.

М. С. Султанахмедов (M. S. Sultanakhmedov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: sultanakhmedov@gmail.com

Поступила в редакцию
23.01.2017