УДК 517.5

А.-Р.К. Рамазанов, В.Г. Магомедова

Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами

Для произвольных сеток узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) построены гладкие сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам, полюсы которых зависят от узлов и свободного параметра λ . Последовательности таких сплайнов и последовательности их производных первого и второго порядков в случае функций $f(x)$ соответственно из классов $C_{[a,b]}^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2$) при $\|\Delta\| \rightarrow 0$ (в зависимости от поведения параметра λ) равномерно на $[a, b]$ сходятся соответственно к $f^{(i)}(x)$ ($i = 0, 1, 2$). Получены оценки скорости сходимости относительно расстояний между узлами.

Библиография: 11 названий.

For arbitrary grids of nodes $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) smooth splines for three-point rational interpolants are constructed, the poles of interpolants depend on nodes and the free parameter λ . Sequences of such splines and their derivatives for all functions $f(x)$ respectively of the classes of $C_{[a,b]}^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2$) under the condition $\|\Delta\| \rightarrow 0$ uniformly in $[a, b]$ converge respectively to $f^{(i)}(x)$ ($i = 0, 1, 2$) (depending on the parameter λ). Bonds for the convergence rate are found in terms of the distance between the nodes.

Bibliography: 11 items.

Ключевые слова: сплайны, интерполяционные сплайны, рациональные сплайны.

Keywords: splines, interpolation splines, rational splines.

Введение

Полиномиальные сплайны, вопросы их сходимости и важные приложения глубоко исследованы (см., напр., [1]–[6] и цитированные в них источники).

По терминологии Ю. Н. Субботина ([7]), интерполяционные сплайны называются безусловно сходящимися к данной функции, если для любой последовательности сеток узлов с диаметром, стремящимся к нулю, соответствующая последовательность сплайнов равномерно сходится к этой функции.

Известно ([1]–[3]), что для производных $f^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2$) каждой функции из классов $C_{[a,b]}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) имеет место безусловная сходимость соответствующих производных интерполяционных кубических (гладких полиномиальных) сплайнов.

Известно также ([2, 3, 8, 9]), что сами кубические сплайны на всем классе $C_{[a,b]}$ этим свойством не обладают.

В [10] построены гладкие сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам, которые сами и их первые производные обладают свойством безусловной сходимости соответственно на классах $C_{[a,b]}$ и $C_{[a,b]}^{(1)}$, но не обладают этим свойством на всем классе $C_{[a,b]}^{(2)}$.

В [11] построены гладкие сплайны по четырехточечным рациональным интерполянтам, которые (аналогично кубическим сплайнам) сами не обладают свойством безусловной сходимости на всем классе $C_{[a,b]}$, а их производные первого и второго порядка обладают этим свойством на $C_{[a,b]}^{(1)}$ и $C_{[a,b]}^{(2)}$ соответственно.

В данной работе построены гладкие сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам, по-новому выбирая полюсы по сетке узлов и свободному параметру, которые сами и их производные первого и второго порядков обладают свойством безусловной сходимости на каждом из трех классов $C_{[a,b]}^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2$) в зависимости от значений параметра.

Для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) положим $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $\Delta_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}$ ($i = 2, 3, \dots, N-1$), $\Delta_1 = \max\{h_1, h_2\}$, $\Delta_N = \max\{h_{N-1}, h_N\}$, $\|\Delta\| = \max\{h_i | i = 1, 2, \dots, N\}$, $\rho_\Delta = \max\{h_i h_j^{-1} | |i - j| = 1, 1 \leq i, j \leq N\}$.

По произвольному $\lambda > 0$ образуем набор чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ таких, что при $i = 1, 2, \dots, N-1$ имеем

$$g_i = \begin{cases} x_{i+1} + \lambda h_{i+1} & \text{при } h_{i+1} \leq h_i, \\ x_{i-1} - \lambda h_i & \text{при } h_{i+1} > h_i. \end{cases} \quad (0.1)$$

Для функции $f \in C_{[a,b]}$ при $i = 1, 2, \dots, N-1$ рассмотрим рациональные функции вида

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i}, \quad (0.2)$$

коэффициенты которых $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ определяются условиями $R_i(x_j) = f(x_j)$ ($j = i-1, i, i+1$); при этом

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned}$$

Считаем также, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

Для данной сетки узлов Δ и набора полюсов $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ по соответствующим рациональным интерполянтам $R_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, N$) определим сплайн $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ ($k = 1, 2, \dots$), удовлетворяющий при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) равенству

$$R_{N,k}(x) = \frac{R_i(x)(x - x_{i-1})^k + R_{i-1}(x)(x_i - x)^k}{(x - x_{i-1})^k + (x_i - x)^k} \quad (0.3)$$

Тогда $R_{N,k}(x)$ представляет собой гладкий сплайн из класса $C_{[a,b]}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Можно показать, что если функция $f(x)$ выпукла или вогнута на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ при некотором $i = 1, 2, \dots, N-1$, то рациональный интерполант $R_i(x)$ также является соответственно выпуклой или вогнутой функцией на этом отрезке. Сплаины $R_{N,k}(x)$ ($k \geq 2$) сохраняют выпуклость (вогнутость) функции $f(x)$ в некоторых окрестностях узлов сетки Δ .

Ниже для функций $\varphi \in C_{[a,b]}$ используются также обозначения

$$\|\varphi\|_{[a,b]} = \max\{|\varphi(x)| : x \in [a, b]\},$$

$$\omega(\delta, \varphi) = \sup\{|\varphi(x+h) - \varphi(x)| : 0 \leq h \leq \delta; x, x+h \in [a, b]\}.$$

Основные результаты сформулируем в виде следующих двух утверждений.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть для произвольной сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) и произвольного $\lambda > 0$ выбраны числа $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ согласно (0.1).

Тогда для любой $f \in C_{[a,b]}$ и любой $f \in C_{[a,b]}^{(1)}$ и соответствующего рационального сплайна $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ при любом натуральном k и $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) выполняются соответственно неравенства

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leq (2 + \max\{1, \lambda\})\omega(\Delta_i, f), \quad (0.4)$$

$$|f'(x) - R'_{N,k}(x)| \leq \left(4 + \frac{2}{\lambda} + 8k\right)\omega(\Delta_i, f'). \quad (0.5)$$

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть для произвольной сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) и произвольного $\lambda \geq 1$ выбраны числа $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ согласно (0.1).

Тогда для любой функции $f \in C_{[a,b]}^{(2)}$ и соответствующего рационального сплайна $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ при $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f''(x) - R''_{N,2}(x)| \leq 26\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{49}{\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}. \quad (0.6)$$

При этом для всех $x \in [a, b]$ выполняется также неравенство

$$|f(x) - R_{N,2}(x)| \leq 2\|\Delta\|^2 \|f''\|_{[a,b]}. \quad (0.7)$$

1. Доказательство теоремы 0.1

Преобразуем функцию $R_i(x)$ из (0.2) к виду

$$R_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + A_i \frac{x - x_i}{x - g_i} \quad (1.1)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\gamma_i}{g_i - x_i} = -f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ a_i &= \alpha_i - A_i = f(x_i); \end{aligned} \quad (1.2)$$

для коэффициента b_i воспользуемся в зависимости от значения g_i двумя выражениями

$$b_i = f(x_{i-1}, x_i) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - g_i), \quad (1.3)$$

$$b_i = f(x_i, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i). \quad (1.4)$$

Для оценки $f(x) - R_i(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) рассмотрим сначала случай $h_{i+1} \leq h_i$, когда $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$. Из равенств (1.1)–(1.3) имеем

$$\begin{aligned} f(x) - R_i(x) &= f(x) - f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i)(x - x_i) - \\ &- f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \left[(x_{i+1} - g_i)(x - x_i) - (x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i) \frac{x - x_i}{x - g_i} \right]. \end{aligned}$$

Преобразуя разделенные разности, отсюда получим

$$\begin{aligned} f(x) - R_i(x) &= \\ &= [f(x) - f(x_i)] - [f(x_i) - f(x_{i-1})] \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} \left[1 - \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})}{(x - g_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \right] - \\ &- [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_i)(x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x - g_i)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} \right| &\leq 1, \quad 0 \leq 1 - \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})}{(x - g_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} = \\ &= 1 - \frac{g_i - x_{i+1}}{g_i - x} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \leq 1. \end{aligned}$$

Значения выражения

$$\varphi(x) = \left| \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_i)(x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x - g_i)} \right|$$

оценим двояко: при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ получим

$$\varphi(x) = \frac{g_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot \frac{x_i - x}{g_i - x} < \lambda,$$

а при $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ получим

$$\varphi(x) = \frac{g_i - x_{i+1}}{g_i - x} \cdot \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \leq 1.$$

Значит, в случае $h_{i+1} \leq h_i$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем

$$|f(x) - R_i(x)| \leq (2 + \max\{1, \lambda\})\omega(\delta_i, f), \quad (1.6)$$

где $\delta_i = \max\{h_i, h_{i+1}\}$.

В случае $h_i < h_{i+1}$ берем $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ и воспользуемся равенствами (1.1), (1.2) и (1.4). Тогда

$$f(x) - R_i(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= [f(x) - f(x_i)] - [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \left[1 - \frac{(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x - g_i)} \right] + \\
&\quad + [f(x_i) - f(x_{i-1})] \frac{(x_{i-1} - g_i)(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})(x - g_i)}. \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Поэтому вполне аналогично рассмотренному выше случаю при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ получим неравенство (1.6).

Чтобы получить требуемое неравенство (0.4) остается воспользоваться равенством (0.3) и применить (1.6).

Пусть теперь $f \in C_{[a,b]}^{(1)}$. Возьмем произвольную сетку узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) и число $\lambda > 0$.

Числа $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ выберем в соответствии с условием (0.1). Для интерполанта $R_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) возьмем его выражение из (0.2).

Чтобы оценить $f'(x) - R'_i(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, рассмотрим сначала случай $h_{i+1} \leq h_i$ и $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$.

Тогда

$$\begin{aligned}
f'(x) - R'_i(x) &= f'(x) - f(x_{i-1}, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i) + \\
&\quad + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i)(x - g_i)^{-2} = \\
&= [f'(x) - f(x_{i-1}, x_{i+1})] + [f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)] \frac{g_i - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \psi(x), \quad (1.8)
\end{aligned}$$

где $\psi(x) = 1 - (g_i - x_{i-1})(g_i - x_{i+1})(g_i - x)^{-2}$ и, очевидно, при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем

$$|\psi(x)| \leq \max\{|\psi(x_{i-1})|, |\psi(x_{i+1})|\}.$$

При этом

$$\begin{aligned}
\frac{g_i - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} |\psi(x_{i-1})| &= \frac{g_i - x_i}{g_i - x_{i-1}} < 1, \\
\frac{g_i - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} |\psi(x_{i+1})| &= \frac{g_i - x_i}{g_i - x_{i+1}} = 1 + \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Тогда из (1.8) при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) получим

$$\begin{aligned}
|f'(x) - R'_i(x)| &\leq \omega(x_{i+1} - x_{i-1}, f') + \omega(x_{i+1} - x_{i-1}, f') \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \leq \\
&\leq \left(4 + \frac{2}{\lambda} \right) \omega(\Delta_i, f'). \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Случай $h_i < h_{i+1}$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ рассматривается вполне аналогично, причем в этом случае также имеет место (1.9).

Для краткости при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) и $k = 1, 2, \dots$ обозначим $G_k(x) = (x - x_{i-1})^k + (x_i - x)^k$,

$$A_{i,k}(x) = \frac{(x - x_{i-1})^k}{G_k(x)}, \quad B_{i,k}(x) = \frac{(x_i - x)^k}{G_k(x)}.$$

Тогда из (0.3) получим

$$R_{N,k}(x) = R_i(x)A_{i,k}(x) + R_{i-1}(x)B_{i,k}(x).$$

Заметим, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) выполняется равенство

$$\begin{aligned} f'(x) - R'_{N,k}(x) &= [f'(x) - R'_i(x)]A_{i,k}(x) + \\ &+ [f'(x) - R'_{i-1}(x)]B_{i,k}(x) + [R_i(x) - R_{i-1}(x)]B'_{i,k}(x), \end{aligned} \quad (1.10)$$

причем при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$|B'_{i,k}(x)| \leq k(x_i - x_{i-1})^{-1}. \quad (1.11)$$

Остается оценить $R_i(x) - R_{i-1}(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$, для чего воспользуемся равенством (0.2).

Тогда получим

$$\begin{aligned} R_i(x) - R_{i-1}(x) &= [f(x_i) - f(x) + f(x_{i-1}, x_{i+1})(x - x_i)] + \\ &+ [f(x) - f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}, x_i)(x - x_{i-1})] - \\ &- f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \left[(x_i - g_i) - \frac{(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i)}{x - g_i} \right] (x - x_i) + \\ &+ f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) \left[(x_{i-1} - g_{i-1}) - \frac{(x_{i-1} - g_{i-1})(x_i - g_{i-1})}{x - g_{i-1}} \right] (x - x_{i-1}) = \\ &= [f(x_{i-1}, x_{i+1}) - f(x_i, x)](x - x_i) + [f(x_{i-1}, x) - f(x_{i-2}, x_i)](x - x_{i-1}) - \\ &- [f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)]\psi_i(x)(x - x_i) + \\ &+ [f(x_{i-1}, x_i) - f(x_{i-2}, x_{i-1})]\psi_{i-1}(x)(x - x_{i-1}), \end{aligned}$$

где

$$\psi_j(x) = \frac{x_j - g_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} - \frac{(x_{j-1} - g_j)(x_{j+1} - g_j)}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x - g_j)} \quad (j = i, i-1).$$

Для оценки $\psi_j(x)$ заметим, что

$$\begin{aligned} |\psi_i(x_{i-1})| &= \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} < 1, \\ |\psi_i(x_i)| &= \frac{|\lambda(x_i - x_{i-1}) - (\lambda + 1)(x_{i+1} - x_i)|}{(\lambda + 1)(x_{i+1} - x_{i-1})} < 1; \end{aligned}$$

значит, $|\psi_i(x)| < 1$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Аналогично показываем, что $|\psi_{i-1}(x)| < 1$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Используя эти неравенства, полученное выше равенство для $R_i(x) - R_{i-1}(x)$, (1.11) и (1.9), из равенства (1.10) при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) получим

$$\begin{aligned} |f'(x) - R'_{N,k}(x)| &\leq \left(4 + \frac{2}{\lambda}\right) \omega(\Delta_i, f') + \\ &+ 2\omega(x_{i+1} - x_{i-1}, f')|x - x_i| \cdot \frac{k}{x_i - x_{i-1}} + 2\omega(x_i - x_{i-2}, f')|x - x_{i-1}| \cdot \frac{k}{x_i - x_{i-1}} \leq \\ &\leq \left(4 + \frac{2}{\lambda} + 8k\right) \omega(\Delta_i, f'). \end{aligned}$$

Теорема 0.1 доказана.

2. Доказательство теоремы 0.2

ЛЕММА 2.1. Пусть для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) и числа $\lambda \geq 1$ выбраны точки $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ согласно (0.1).

Тогда для любой функции $f \in C_{[a,b]}^{(2)}$ и рациональной функции $R_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) из (0.2) при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ выполняется неравенство

$$|f''(x) - R_i''(x)| \leq 2\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{5}{\lambda} \rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) для краткости обозначим

$$\theta(x) = 1 - \frac{(g_i - x_{i-1})(g_i - x_i)(g_i - x_{i+1})}{(g_i - x)^3}.$$

Тогда

$$R_i''(x) = 2f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(1 - \theta(x))$$

и найдется точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, для которой

$$f''(x) - R_i''(x) = f''(x) - f''(\xi_i) + f''(\xi_i)\theta(x). \quad (2.2)$$

Здесь при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем

$$|\theta(x)| \leq \max\{|\theta(x_{i-1})|, |\theta(x_{i+1})|\}.$$

Ясно, что в случае $h_{i+1} \leq h_i$ с учетом $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ получим

$$\begin{aligned} |\theta(x_{i+1})| &= \frac{(g_i - x_{i-1})(g_i - x_i)}{(g_i - x_{i+1})^2} - 1 = \\ &= \frac{2x_{i+1} - x_{i-1} - x_i}{g_i - x_{i+1}} + \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}{(g_i - x_{i+1})^2} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} \leq \frac{5}{\lambda} \frac{h_i}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} |\theta(x_{i-1})| &= 1 - \frac{(g_i - x_i)(g_i - x_{i+1})}{(g_i - x_{i-1})^2} = \\ &= \frac{x_{i+1} + x_i - 2x_{i-1}}{g_i - x_{i-1}} - \frac{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}{(g_i - x_{i-1})^2} < \\ &< \frac{x_{i+1} - x_{i-1} + x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1} + \lambda(x_{i+1} - x_i)} \leq \frac{3(x_i - x_{i-1})}{(1 + \lambda)(x_{i+1} - x_i)} < \frac{5}{\lambda} \frac{h_i}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

Значит, при $h_{i+1} \leq h_i$ и $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ выполняется неравенство

$$|\theta(x)| \leq \frac{5}{\lambda} \frac{h_i}{h_{i+1}}.$$

Случай $h_{i+1} > h_i$ рассматривается вполне аналогично с учетом $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$.

В этом случае при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем

$$|\theta(x)| \leq \frac{5}{\lambda} \frac{h_{i+1}}{h_i}.$$

Учитывая эти оценки и равенство (2.2), при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ получим

$$\begin{aligned} |f''(x) - R'_i(x)| &\leq \omega(x_{i+1} - x_{i-1}, f'') + \\ &+ \frac{5}{\lambda} \max \left\{ \frac{h_i}{h_{i+1}}, \frac{h_{i+1}}{h_i} \right\} \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}, \end{aligned}$$

откуда легко следует требуемое неравенство (2.1).

Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. В условиях леммы 2.1 для любой функции $f \in C_{[a,b]}^{(2)}$ и рациональных функций $R_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) из (0.2) при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ выполняются неравенства

$$|R_{i-1}(x) - R_i(x)| \leq \frac{1}{4} h_i^2 \left(3\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{11}{2\lambda} \rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]} \right), \quad (2.3)$$

$$|R'_{i-1}(x) - R'_i(x)| \leq \frac{1}{2} h_i \left(3\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{11}{2\lambda} \rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]} \right). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем неравенство (2.4) для производных. Для этого возьмем следующие представления для рациональных интерполантов:

$$\begin{aligned} R_{i-1}(x) &= f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}, x_i)(x - x_{i-1}) + \\ &+ f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) \frac{(x_{i-2} - g_{i-1})(x_{i-1} - g_{i-1})(x_i - g_{i-1})}{x - g_{i-1}}, \\ R_i(x) &= f(x_i) + f(x_{i-1}, x_i)(x - x_i) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i)}{x - g_i}. \end{aligned}$$

Тогда при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ последовательно получим

$$\begin{aligned} R'_{i-1}(x) - R'_i(x) &= \\ &= f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) \frac{x_{i-2} - g_{i-1}}{x - g_{i-1}} \left[2x - x_{i-1} - x_i - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{x - g_{i-1}} \right] - \\ &- f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{x_{i+1} - g_i}{x - g_i} \left[2x - x_{i-1} - x_i - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{x - g_i} \right] = \\ &= [f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})](2x - x_{i-1} - x_i) + \\ &+ f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) \left[(2x - x_{i-1} - x_i) \left(\frac{x_{i-2} - g_{i-1}}{x - g_{i-1}} - 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x_{i-2} - g_{i-1})(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x - g_{i-1})^2} \right] - \end{aligned}$$

$$-f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \left[(2x - x_{i-1} - x_i) \left(\frac{x_{i+1} - g_i}{x - g_i} - 1 \right) - \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x - g_i)^2} \right];$$

значит, найдутся точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и $\eta_i \in [x_{i-2}, x_i]$ такие, что

$$\begin{aligned} R'_{i-1}(x) - R'_i(x) &= \frac{1}{2}[f''(\eta_i) - f''(\xi_i)](2x - x_{i-1} - x_i) + \\ &+ \frac{1}{2}f''(\eta_i) \left[(2x - x_{i-1} - x_i) \frac{x_{i-2} - x}{x - g_i} - \frac{(x_{i-2} - g_{i-1})(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x - g_{i-1})^2} \right] - \\ &- \frac{1}{2}f''(\xi_i) \left[(2x - x_{i-1} - x_i) \frac{x_{i+1} - x}{x - g_i} - \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x - g_i)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$\left| (2x - x_{i-1} - x_i) \frac{x_{i-2} - x}{x - g_{i-1}} \right| \leq (x_i - x_{i-1}) \max \left\{ \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{|x_{i-1} - g_{i-1}|}, \frac{x_i - x_{i-2}}{|x_i - g_{i-1}|} \right\}.$$

Для оценки правой части последнего неравенства рассмотрим два случая: $h_i \leq h_{i-1}$ и $h_i > h_{i-1}$. Учитывая значения g_{i-1} в этих случаях, для правой части при $h_i \leq h_{i-1}$ получим оценку $(x_i - x_{i-1}) \frac{2}{\lambda} \frac{h_{i-1}}{h_i}$, а при $h_i > h_{i-1}$ — оценку $(x_i - x_{i-1}) \frac{2}{\lambda} \frac{h_i}{h_{i-1}}$.

Значит, при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ получим

$$\left| (2x - x_{i-1} - x_i) \frac{x_{i-2} - x}{x - g_{i-1}} \right| \leq \frac{2}{\lambda} (x_i - x_{i-1}) \max \left\{ \frac{h_{i-1}}{h_i}, \frac{h_i}{h_{i-1}} \right\}. \quad (2.6)$$

Вполне аналогично при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$\left| (2x - x_{i-1} - x_i) \frac{x_{i+1} - x}{x - g_i} \right| \leq \frac{2}{\lambda} (x_i - x_{i-1}) \max \left\{ \frac{h_i}{h_{i+1}}, \frac{h_{i+1}}{h_i} \right\}. \quad (2.7)$$

Оценим теперь при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ два оставшихся в квадратных скобках из равенства (2.5) выражения. Имеем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x - g_i)^2} \right| &\leq \frac{1}{4} (x_i - x_{i-1})^2 \frac{|x_{i+1} - g_i|}{(x - g_i)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} h_i^2 \max \left\{ \frac{|x_{i+1} - g_i|}{(x_{i-1} - g_i)^2}, \frac{|x_{i+1} - g_i|}{(x_i - g_i)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь правая часть при $h_{i+1} \leq h_i$ равна

$$\frac{1}{4} h_i^2 \frac{g_i - x_{i+1}}{(g_i - x_i)^2} = \frac{1}{4} h_i^2 \frac{\lambda h_{i+1}}{(\lambda + 1)^2 h_{i+1}^2} < \frac{1}{4\lambda} h_i \frac{h_i}{h_{i+1}},$$

а при $h_{i+1} > h_i$ она равна

$$\frac{1}{4} h_i^2 \frac{x_{i+1} - g_i}{(x_{i-1} - g_i)^2} = \frac{1}{4} h_i^2 \frac{x_{i+1} - x_{i-1} + \lambda(x_i - x_{i-1})}{\lambda^2 (x_i - x_{i-1})^2} < \frac{3}{4\lambda} h_i \frac{h_{i+1}}{h_i}.$$

Значит, при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$\left| \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x - g_i)^2} \right| \leq \frac{3}{4\lambda}(x_i - x_{i-1}) \max \left\{ \frac{h_i}{h_{i+1}}, \frac{h_{i+1}}{h_i} \right\}. \quad (2.8)$$

Вполне аналогично при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ получим

$$\left| \frac{(x_{i-2} - g_{i-1})(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x - g_{i-1})^2} \right| \leq \frac{3}{4\lambda}(x_i - x_{i-1}) \max \left\{ \frac{h_{i-1}}{h_i}, \frac{h_i}{h_{i-1}} \right\}. \quad (2.9)$$

Используя оценки (2.6)–(2.9), из равенства (2.5) при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ получим неравенство

$$\begin{aligned} |R'_{i-1}(x) - R'_i(x)| &\leq \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) \left[\omega(x_{i+1} - x_{i-2}, f'') + \right. \\ &\left. + \frac{11}{4\lambda} \max \left\{ \frac{h_{i-1}}{h_i}, \frac{h_i}{h_{i-1}} \right\} \|f''\|_{[x_{i-2}, x_i]} + \frac{11}{4\lambda} \max \left\{ \frac{h_i}{h_{i+1}}, \frac{h_{i+1}}{h_i} \right\} \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда уже легко следует неравенство (2.4).

Оценим теперь $R_{i-1}(x) - R_i(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Пусть для определенности $x_i - x \leq x - x_{i-1}$. Тогда найдется точка $\xi \in (x, x_i)$ такая, что

$$\begin{aligned} |R_{i-1}(x) - R_i(x)| &= |R_{i-1}(x) - R_i(x) - [R_{i-1}(x_i) - R_i(x_i)]| = \\ &= |[R'_{i-1}(\xi) - R'_i(\xi)](x - x_i)| \leq |R'_{i-1}(\xi) - R'_i(\xi)| \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{2}. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться неравенством (2.4) для производных $R'_{i-1}(x) - R'_i(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда получим требуемое неравенство (2.3).

Лемма 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 0.2.

При $k = 2$ из (0.3), используя вышеприведенные обозначения, получим

$$R_{N,2}(x) = R_i(x)A_{i,2}(x) + R_{i-1}(x)B_{i,2}(x).$$

Отсюда и из тождества $A_{i,2}(x) + B_{i,2}(x) \equiv 1$ имеем

$$\begin{aligned} R''_{N,2}(x) &= R''_i(x)A_{i,2}(x) + R''_{i-1}(x)B_{i,2}(x) + \\ &+ 2B'_{i,2}(x)[R'_{i-1}(x) - R'_i(x)] + B''_{i,2}(x)[R_{i-1}(x) - R_i(x)], \end{aligned}$$

а значит, при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) получим

$$\begin{aligned} R''_{N,2}(x) - f''(x) &= [R''_i(x) - f''(x)]A_{i,2}(x) + [R''_{i-1}(x) - f''(x)]B_{i,2}(x) + \\ &+ 2B'_{i,2}(x)[R'_{i-1}(x) - R'_i(x)] + B''_{i,2}(x)[R_{i-1}(x) - R_i(x)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$|B'_{i,2}(x)| = 2(x_i - x_{i-1})(x - x_{i-1})(x_i - x) \frac{1}{G_2^2(x)} \leq \frac{2}{x_i - x_{i-1}};$$

$$|B''_{i,2}(x)| = 2(x_i - x_{i-1})|2x - x_{i-1} - x_i| \left(\frac{4(x - x_{i-1})(x_i - x)}{G_2^3(x)} + \frac{1}{G_2^2(x)} \right) \leq$$

$$\leq \frac{24}{(x_i - x_{i-1})^2}.$$

Эти неравенства и лемму 2.2 применим для оценки двух последних слагаемых правой части равенства (2.10), а два первых ее слагаемых оценим одновременно с использованием леммы 2.1. Тогда получим требуемое неравенство (0.6).

Докажем неравенство (0.7).

Пусть $f \in C^{(2)}[a, b]$, $x \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ и $x \neq x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$). Тогда в случае $h_{i+1} \leq h_i$ по (1.3) имеем

$$\begin{aligned} f(x) - R_i(x) &= f(x) - f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i)(x - x_i) - \\ &- f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \left[(x_{i+1} - g_i)(x - x_i) - (x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i) \frac{x - x_i}{x - g_i} \right] = \\ &= f(x_{i-1}, x_i, x)(x - x_{i-1})(x - x_i) - \\ &- f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - g_i)(x - x_i) \left[1 - \frac{x_{i-1} - g_i}{x - g_i} \right] = \\ &= f(x_{i-1}, x_i, x)(x - x_{i-1})(x - x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - g_i)(x - x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x - g_i} = \\ &= \left[f(x_{i-1}, x_i, x) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{x_{i+1} - g_i}{x - g_i} \right] (x - x_{i-1})(x - x_i). \end{aligned}$$

Так как в этом случае $g_i = x_{i+1} + \lambda(x_{i+1} - x_i)$, получим

$$0 < \frac{x_{i+1} - g_i}{x - g_i} = \frac{g_i - x_{i+1}}{g_i - x} \leq 1.$$

Пусть теперь $h_i < h_{i+1}$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$. Тогда по (1.4) имеем $b_i = f(x_i, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)$ и аналогично предыдущему случаю получим

$$f(x) - R_i(x) = \left[f(x_i, x_{i+1}, x) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{x_{i-1} - g_i}{x - g_i} \right] (x - x_i)(x - x_{i+1}),$$

причем

$$0 < \frac{x_{i-1} - g_i}{x - g_i} \leq 1.$$

Значит, учитывая очевидный случай $x = x_j$ ($j = i-1, i, i+1$), при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) в обоих случаях получим

$$|f(x) - R_i(x)| \leq \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} \cdot 2\Delta_i^2.$$

Отсюда и из равенства (0.3) при $k = 2$ получим требуемое неравенство (0.7).

3. Замечание

Из доказанной теоремы 0.2, в частности, вытекает существование равномерно сходящихся последовательностей вторых производных сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам на классе $C_{[a,b]}^{(2)}$.

Действительно, пусть задана последовательность сеток узлов $\Delta^{(N)} : a = x_0^{(N)} < x_1^{(N)} < \dots < x_N^{(N)} = b$ ($N = 2, 3, \dots$) с диаметром $\|\Delta^{(N)}\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Исходя из последовательности значений $q_N = \rho_{\Delta^{(N)}}$ для сеток $\Delta^{(N)}$, построим последовательность $\lambda_N \geq 1$ такую, что $q_N/\lambda_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Для каждого значения $\lambda = \lambda_N$ ($N = 2, 3, \dots$) возьмем набор точек $g^{(N)} = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ в соответствии с (0.1).

Тогда из доказанной теоремы 0.2 непосредственно следует, что для любой функции $f \in C_{[a,b]}^{(2)}$ и соответствующих рациональных сплайнов $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta^{(N)}, g^{(N)})$ имеем $\|f'' - R_{N,2}''\|_{[a,b]} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Заметим также, что из теоремы 0.1, очевидно, вытекает безусловная сходимость самих сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам на классе $C_{[a,b]}$ при любых ограниченных значениях параметра $\lambda > 0$, а первых производных этих сплайнов — на классе $C_{[a,b]}^{(1)}$ при любых значениях параметра $\lambda \geq \lambda_0$ (λ_0 — любое фиксированное положительное число).

Список литературы

- [1] Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972.
- [2] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Добавления к книге Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972.
- [3] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. 1976.
- [4] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука. 1984.
- [5] Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Л.: Изд-во ЛГУ. 1986.
- [6] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1980.
- [7] Субботин Ю.Н. Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Том 3, вып. 4. С. 1043–1058.
- [8] Nord S. Approximation properties of the spline fit // ВТ. 1967. Vol. 7. Pp. 132–144.
- [9] Привалов Ал.А. О сходимости кубических интерполяционных сплайнов к непрерывной функции // Матем. заметки. 1979. Том 25, вып. 5. С. 681–700.
- [10] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестанские Электронные Математические Известия. 2015. Вып. 4. Махачкала. С. 22–31.
- [11] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по четырехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Том 22, № 4. М. С. 233–246.

А.-Р.К. Рамазанов (A.-R. K. Ramazanov)

Дагестанский государственный университет, Дагестанский
научный центр РАН

E-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила в редакцию

11.03.2017

В.Г. Магомедова (V. G. Magomedova)

Дагестанский государственный университет

E-mail: vazipat@rambler.ru