УДК 517.5

Меджидов З.Г.

О восстановлении функции по ее интегралам вдоль ломаных одного семейства на плоскости

Решается задача восстановления функции по ее интегралам вдоль ломаных некоторых семейств на плоскости, когда весовая функция – квазимногочлен. Для отдельных частных случаев весовых функций получены формулы обращения. В общем случае доказана единственность решения поставленной задачи.

Библиография: 5 названий.

The problem of recovery of a function from its integrals along broken of some families on the plane, when the weight function is the quasi polynomial is solved. For some particular cases of weight functions the inversion formulas are obtained. In the general case the uniqueness of the solution of the task is proved.

Bibliography: 5 items.

Ключевые слова: интегральное преобразование, квазимногочлен, двухпараметрическое семейство ломаных, однозначность восстановления.

Keywords: integral transform, quasi polynomial, two-parameter family of broken, uniqueness of the reconstruction.

1. Основная формула

Пусть $\omega = (\omega_1, \omega_2), \theta = (\theta_1, \theta_2)$ – линейно независимые единичные векторы на плоскости, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ – произвольная точка. Символом $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$ обозначим объединение лучей с вершиной в точке x и направляющими векторами ω и θ соответственно:

$$\Gamma_{\omega,\theta}(x) = \Gamma_\omega(x) \cup \Gamma_\theta^-(x),$$

где $\Gamma_\omega(x) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2)) \in \mathbb{R}^2 : \xi = x + \omega t, t \geqslant 0\}$; знак "$-$" в символе $\Gamma_\theta^-(x)$ означает, что луч $\Gamma_\theta(x)$ проходится в направлении, противоположном направлению вектора θ . При фиксированных ω и θ $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$ – двухпараметрическое семейство ломаных, зависящих от координат вершины $x = (x_1, x_2)$.

Рассмотрим множество криволинейных интегралов 1-го рода вдоль $\Gamma_{\omega,\theta}(x)$

$$g_\rho(x;\omega,\theta) = \int\limits_{\Gamma_{\omega,\theta}(x)} \rho(x,\xi) f(\xi) d\xi = \int\limits_{\Gamma_\omega(x)} \rho(x,\xi) f(\xi) d\xi - \int\limits_{\Gamma_\theta(x)} \rho(x,\xi) f(\xi) d\xi, \quad (1.1)$$

где ρ – некоторая весовая функция.

Задача состоит в восстановлении финитной функции $f(x)$ по известным интегралам (1.1), в которых ω и θ – фиксированные векторы.

В пространстве четной размерности задача определения функции по ее интегралам вдоль конических поверхностей с единичной весовой функцией решена в работе А. Бегматова [1]. Сформулируем этот результат.

Пусть $\{\Gamma(x,y)\}$, где $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, $y \geqslant 0$, $n = 2m > 2$, – семейство конусов с вершинами в точках (x,y):

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_k - \xi_k)^2 = (y-\eta)^2, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant y,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta \geqslant 0$. Через U обозначим класс функций $f(x,y)$, которые всюду имеют все непрерывные частные производные до n-го порядка включительно и финитны с носителем в слое

$$\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n,\, y \in (o,h),\, h < +\infty\}.$$

Тогда решение уравнения

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} f(\xi,\eta)ds = g(x,y)$$

в классе U единственно, причем имеет место представление

$$f(x,y) = C\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \Delta_x\right)^m \int\limits_0^y g(x,y)d\eta, \tag{1.2}$$

где Δ_x – оператор Лапласа.

В статье [2] вводится в рассмотрение двухпараметрическое семейство симметричных относительно вертикальной оси ломаных $(\xi_1,\xi_2) = (x \pm r\sin\varphi, r\cos\varphi)$ с вершинами $M(x,0)$ на оси $O\xi$, где $r \geqslant 0$, $0 < \varphi < \pi/2$. Соответствующее интегральное преобразование имеет вид

$$g(x,\tau) = \int\limits_0^\infty f(x \pm r\sin\varphi, r\cos\varphi)dr,$$

где $\tau = \operatorname{tg}\varphi$. Формула обращения, которую можно понимать как композицию свертки и обратной проекции, имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\left(p.v.\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\left(\frac{g'(\xi,\tau)}{\xi - x - y\tau} + \frac{g'(\xi,\tau)}{\xi - x + y\tau}\right)\right);$$

внутренний интеграл понимается в смысле главного значения, а штрих означает производную по переменной ξ.

Решим сначала задачу обращения интегрального преобразования

$$g_\rho(x;\omega) = \int\limits_{\Gamma_\omega(x)} \rho(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{1.3}$$

в котором интегралы берутся вдоль лучей, параллельных вектору ω, а весовая функция – квазимногочлен вида

$$\rho(x,\xi) = (x_1-\xi_1)^{n_1}(x_2-\xi_2)^{n_2}e^{\langle a, x-\xi\rangle}, \tag{1.4}$$

где $a=(a_1,a_2)$, $\langle a, x-\xi\rangle = a_1(x_1-\xi_1)+a_2(x_2-\xi_2)$.

Преобразования вида (1.1), (1.3) с различными весовыми функциями – частными случаями функции (1.4) – изучены в работах [3], [4]. Применением преобразований Фурье и Лапласа для них получены формулы обращения в классе гладких финитных функций с носителями, лежащими в некоторой полосе на плоскости.

Введем дифференциальный оператор $\partial_\omega = \langle \omega, \nabla_x\rangle\, h = \omega_1\frac{\partial h}{\partial x_1} + \omega_2\frac{\partial h}{\partial x_2}$. Если ω – единичный вектор, то ∂_ω – производная скалярного поля h по направлению вектора ω: $\partial_\omega h = \frac{\partial h}{\partial \omega}$.

Теорема 1.1. *Пусть интегралы (1.3) с весовой функцией (1.4) и фиксированным вектором $\omega\,(\omega_1\neq 0, \omega_2\neq 0)$ известны всюду в $\mathbb{R}^2$. Тогда задача восстановления функции $f(x)$ однозначно разрешима в классе $C_0^{n_1+n_2+1}(\mathbb{R}^2))$ финитных n_1+n_2+1 раз непрерывно дифференцируемых функций, причем справедлива формула обращения*

$$f(x) = -\frac{1}{\omega_1^{n_1}\omega_2^{n_2}}(\partial_\omega+\lambda)^{n_1+n_2+1}g_\rho(x;\omega), \tag{1.5}$$

где $\lambda = -\langle a,\omega\rangle$, а $(\partial_\omega+\lambda)^k$ – k-я степень дифференциального оператора $(\partial_\omega+\lambda)h = \partial_\omega h+\lambda h$.

Введем обозначение

$$h_n(x,\omega) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda t}t^n f(x+t\omega)dt.$$

Докажем вспомогательную формулу.

Лемма 1.1. *Для любого натурального n справедлива формула*

$$\partial_\omega^n h_{n-1}(x,\omega) = (-1)^n(n-1)!f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j\lambda^{n-j}\partial_\omega^j h_{n-1(x,\omega)}, \tag{1.6}$$

где $C_n^j = \frac{n!}{j!\cdot(n-j)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Проведем индукцией по n. При $n=1$ имеем

$$\partial_\omega h_0(x,\omega) = \int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda t}\partial_\omega f(x+\omega t)dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda t}\frac{\partial}{\partial t}f(x+\omega t)dt = -f(x)-\lambda h_0(x,\omega);$$

мы воспользовались очевидным равенством

$$\partial_\omega f(x+\omega t) = \frac{\partial}{\partial t}f(x+\omega t)$$

и интегрированием по частям.

Предположим, что формула (1.6) верна при $n = k$:

$$\partial_\omega^k h_{k-1}(x,\omega) = (-1)^k (k-1)! f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \lambda^{k-j} \partial_\omega^j h_{k-1}(x,\omega), \tag{1.7}$$

и докажем ее для $n = k+1$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ интегрированием по частям устанавливается формула

$$\partial_\omega h_k(x,\omega) = -k h_{k-1}(x,\omega) - \lambda h_k(x,\omega), \tag{1.8}$$

откуда

$$k h_{k-1}(x,\omega) = -\partial_\omega h_k(x,\omega) - \lambda h_k(x,\omega). \tag{1.9}$$

Воздействуем к обеим частям равенства (1.8) оператором ∂_ω^k и преобразуем правую часть этого равенства, используя формулы (1.7) и (1.9):

$$\partial_\omega^{k+1} h_k(x,\omega) = -k\partial_\omega^k h_{k-1}(x,\omega) - \lambda \partial_\omega^k h_k(x,\omega) =$$

$$= -k \left((-1)^k (k-1)! f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \lambda^{k-j} \partial_\omega^j h_{k-1}(x,\omega) \right) - \lambda \partial_\omega^k h_k(x,\omega) =$$

$$= (-1)^{k+1} k! f(x) + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \lambda^{k-j} \partial_\omega^j (k h_{k-1}(x,\omega)) - \lambda \partial_\omega^k h_k(x,\omega) =$$

$$= (-1)^{k+1} k! f(x) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \lambda^{k-j} \partial_\omega^j (\partial h_k(x,\omega) + \lambda h_k(x,\omega)) + \lambda \partial_\omega^k h_k(x,\omega) \right) =$$

$$= (-1)^{k+1} k! f(x) -$$

$$- \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \lambda^{k-j} \partial_\omega^{j+1} h_k(x,\omega) + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \lambda^{k-j+1} \partial_\omega^j h_k(x,\omega) + \lambda \partial_\omega^k h_k(x,\omega) \right) =$$

$$= (-1)^{k+1} k! f(x) - \left(\sum_{j=1}^{k} (C_k^{j-1} + C_k^j) \lambda^{k-j+1} \partial_\omega^j h_k(x,\omega) + \lambda^{k+1} h_k(x,\omega) \right) =$$

$$= (-1)^{k+1} k! f(x) - \sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^j \lambda^{k-j+1} \partial_\omega^j h_k(x,\omega).$$

Лемма доказана.

Формула (1.6) позволяет написать явную формулу для вычисления $f(x)$ в компактной форме:

$$f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(\partial_\omega + \lambda)^{n+1} h_n(x, \omega). \tag{1.10}$$

Доказательство теоремы 1.1 следует из формулы (1.10), если заметить, что преобразование (1.3) с весовой функцией (1.4) можно записать в виде

$$g_\rho(x; \omega) = (-1)^{n_1+n_2} \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2} h_{n_1+n_2}(x, \omega)$$

и положить $n = n_1 + n_2$.

Отметим частные случаи формулы (1.5). Заметим сначала, что если в формуле (1.3) луч $\Gamma_\omega(x)$ заменить на $\Gamma_\omega^-(x)$:

$$g_\rho(x, \omega) = \int\limits_{\Gamma_\omega^-(x)} \rho(x, \xi) f(\xi) d\xi, \tag{1.11}$$

то в формуле обращения (1.5) в правой части изменится лишь знак:

$$f(x) = \frac{1}{\omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2}}(\partial_\omega + \lambda)^{n_1+n_2+1} g_\rho(x; \omega). \tag{1.12}$$

Если в формуле (1.11) взять $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, а весовую функцию $\rho(x, \xi) = x_1 - \xi_1$, т. е. в формуле (1.4) положить $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $a = (0, 0)$, то формула (1.12) примет вид

$$f(x) = \sqrt{2} \partial_\omega^2 g_\rho(x, \omega),$$

или, в координатном виде,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) g_\rho(x_1, x_2; \omega). \tag{1.13}$$

Если с тем же вектором $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ взять весовую функцию $e^{\xi_1 - x_1}$ (соответственно, в формуле (1.4) положить $n_1 = n_2 = 0$, $a = (-1, 0)$), то получим следующую формулу обращения

$$f(x) = (\partial_\omega + 1) g_\rho(x, \omega),$$

или

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) g_\rho(x_1, x_2; \omega) + g_\rho(x_1, x_2; \omega). \tag{1.14}$$

Формулы (1.13), (1.14) получены в работе [4]. Наличие коэффициентов $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}$ в наших формулах обусловлено тем, что мы рассматриваем криволинейные интегралы и единичные направляющие векторы, тогда как в работах [3] и [4] интегрирование ведется по переменной ξ_1, а векторы – произвольные.

Вернемся к преобразованию (1.1) с весовой функцией (1.4). Для компактности записей введем обозначения: $n = n_1 + n_2$, $\omega^n = \omega_1^{n_1} \cdot \omega_2^{n_2}$. Подействуем на обе части формулы (1.1) оператором $-\frac{1}{\omega^n n!}(\partial_\omega+\lambda)^{n+1}$ и воспользуемся формулой (1.5):

$$-\frac{1}{\omega^n n!}(\partial_\omega+\lambda)^{n+1}g_\rho(x,\omega,\theta)=f(x)+\frac{1}{\omega^n n!}(\partial_\omega+\lambda)^{n+1}\int\limits_{\Gamma_\theta(x)}\rho(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

К обеим частям полученного равенства подействуем оператором $-\frac{1}{\omega^n n!}(\partial_\theta+\mu)^{n+1}$, где $\mu=-\langle a,\theta\rangle$, и снова воспользуемся формулой (1.5):

$$\left[\frac{1}{\omega^n}(\partial_\omega+\lambda)^{n+1}-\frac{1}{\theta^n}(\partial_\theta+\mu)^{n+1}\right]f(x)=$$
$$\frac{1}{\omega^n\theta^n n!}\left[(\partial_\theta+\mu)(\partial_\omega+\lambda)\right]^{n+1}g_\rho(x;\omega,\theta). \tag{1.15}$$

Замечание 1. Можно рассмотреть интегральное преобразование более общего вида, чем (1.1), а именно,

$$g_{\rho,r}(x;\omega,\theta)=\int\limits_{\Gamma_\omega(x)}\rho(x,\xi)f(\xi)d\xi-\int\limits_{\Gamma_\theta(x)}r(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{1.16}$$

где функция $\rho(x,\xi)$ определена формулой (1.4), $r(x,\xi)$ – квазимногочлен такого же вида:

$$r(x,\xi)=(x_1-\xi_1)^{k_1}(x_2-\xi_2)^{k_2}e^{\langle b,x-\xi\rangle}.$$

Легко заметить, что аналогичными рассуждениями можно получить формулу

$$\left[\frac{1}{\omega^n n!}(\partial_\omega+\lambda)^{n+1}-\frac{1}{\theta^k k!}(\partial_\theta+\nu)^{k+1}\right]f(x)=$$
$$\frac{1}{\omega^n\theta^k n!k!}(\partial_\theta+\nu)^{k+1}(\partial_\omega+\lambda)^{n+1}g_{\rho,r}(x,\omega,\theta), \tag{1.17}$$

где $k=k_1+k_2$, $\nu=-\langle b,\theta\rangle$.

Пример. Пусть $\rho(x,\xi)=1$, $\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, $\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$. Преобразование (1.1) в координатном виде имеет вид

$$g(x;\omega,\theta)=\int\limits_0^{+\infty}\left(f\left(x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}t,x_2-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)-f\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}t,x_2-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\right)dt.$$

Формула обращения (1.15) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)g(x;\omega,\theta). \tag{1.18}$$

Эта формула также получена в [3].

2. Формулы обращения интегральных преобразований с различными весовыми функциями

Из формулы обращения (1.15) (а также из формул (1.17), (1.18)) видно, что по заданной функции $g_\rho(x;\omega,\theta)$ восстанавливается не сама функция $f(x_1,x_2)$, а значение некоторого дифференциального оператора на неизвестной функции. Покажем, что в отдельных случаях весовых функций на самом деле имеет место однозначное восстановление в классе гладких функций $f(x_1,x_2)$, сосредоточенных в некотором шаре $S_R=\{x\in\mathbb{R}^2:|x|\leqslant R\}$ (формулы и утверждения можно легко перенести на функции, сосредоточенные в полосе).

Пусть $\rho(x,\xi)=1$ и, стало быть, $n=0$, $\lambda=0$. Формула (1.15) имеет вид

$$\partial_{\omega-\theta}f(x)=\partial_{\omega\theta}g(x;\omega,\theta), \tag{2.1}$$

где $\partial_{\omega\theta}=\partial_\omega\partial_\theta$. Положив $\tau=\omega-\theta$, $h(x)=\partial_{\omega\theta}g_\rho(x;\omega,\theta)$, запишем уравнение (2.1) в виде

$$\partial_\tau f(x)=h(x). \tag{2.2}$$

Общее решение этого уравнения, как легко проверить, дается формулой

$$f(x_1,x_2)=-\int\limits_0^{t_0}h(x_1+\tau_1t,x_2+\tau_2t)dt+F(-\tau_2x_1+\tau_1x_2), \tag{2.3}$$

где $t_0>0$ – такое число, что $|x+\tau t_0|\geqslant R$ для всех $x\in S_R$, а F – произвольная функция одной переменной. Значения функции F постоянны на любой прямой, параллельной вектору τ. Такие функции называют плоскими волнами или, вслед за авторами статьи [5], ридж-функциями. Если ридж-функция равна нулю на какой-либо прямой, перпендикулярной вектору τ, то она тождественно равна нулю.

Рассмотрим значения обеих частей формулы (2.3) в точках прямой $l:x=\chi\tau+\mu\tau^\perp,|\chi|\geqslant R+t_0,\mu\in\mathbb{R}$, перпендикулярной τ (χ фиксировано). Поскольку $|\chi\tau+\mu\tau^\perp|\geqslant R$ и $|(\chi+t)\tau+\mu\tau^\perp|\geqslant R$ для всех $t\in[0,t_0]$, то $f(\chi\tau+\mu\tau^\perp)=0$ и $h((\chi+t)\tau+\mu\tau^\perp)=0$, поэтому функция F тождественно равна нулю.

Таким образом, уравнение (2.1) имеет единственное решение и дается оно формулой

$$f(x)=-\int\limits_0^{t_0}\partial_{\omega\theta}g(x+(\omega-\theta)t;\omega,\theta)dt.$$

В частности, если $\omega=(1,1)$, $\theta=(1,-1)$, то получим

$$f(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\int\limits_0^{t_0}g(x_1,x_2+2t)dt,$$

т. е. с точностью до обозначений формулу (1.2).

Введем оператор, дающий решение уравнения (2.2):

$$\partial_\tau^{-1} h(x) = -\int_0^{t_0} h(x_1 + \tau_1 t, x_2 + \tau_2 t)dt.$$

Рассмотрим весовую функцию (1.4) с $\lambda = 0$:

$$\rho(x, \xi) = (x_1 - \xi_1)^{n_1}(x_2 - \xi_2)^{n_2}. \tag{2.4}$$

Формулу (1.15) запишем в виде

$$\left[\theta^n \partial_\omega^{n+1} + \omega^n \partial_\theta^{n+1}\right] f(x) = \frac{1}{n!}\partial_\theta^{n+1}\partial_\omega^{n+1} g_\rho(x; \omega, \theta). \tag{2.5}$$

В левой части этой формулы стоит однородный дифференциальный оператор L порядка $n+1$ с постоянными коэффициентами:

$$Lf(x) \equiv \sum_{k=0}^{n+1} A_k \frac{\partial^{n+1}}{\partial x_1^k \partial x_2^{n+1-k}} f(x_1, x_2). \tag{2.6}$$

Оператору L поставим в соответствие алгебраический многочлен

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n+1} A_k t^k.$$

Лемма 2.1. *Предположим, что многочлен $P(t)$ имеет $n+1$ различный вещественный корень. Тогда оператор L может быть записан в виде*

$$L = \prod_{i=1}^{n+1}\left(b_i \frac{\partial}{\partial x_1} - a_i \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{2.7}$$

с попарно линейно независимыми векторами $(a_i, b_i), i = 1, \ldots, n+1$.

Действительно, пусть $t_1, \ldots, t_{n+1}$ – корни многочлена P. Достаточно положить $a_i = t_i, i = 1, \ldots, n$, $a_{n+1} = A_0 t_{n+1}$, $b_1 = \cdots = b_n = 1$, $b_{n+1} = A_0$.

Легко доказать, что если оператор L имеет вид (2.7), то общее решение однородного уравнения $Lf = 0$ будет сумма произвольных ридж-функций:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{n+1} F_k(a_k x_1 + b_k x_2).$$

Записав оператор L в терминах дифференциальных операторов ∂_τ, уравнение (2.5) перепишем в виде

$$\prod_{k=1}^{n+1} \partial_{\tau_k} f(x) = \frac{1}{n!}\partial_\theta^{n+1}\partial_\omega^{n+1} g_\rho(x; \omega, \theta), \tag{2.8}$$

где $\tau_k = (b_k, -a_k)$.

Лемма 2.2. *Предположим, что многочлен $P(t)$ имеет $n+1$ различный вещественный корень. Тогда уравнение (2.8) имеет единственное решение в классе $C_0^{n+1}(S_R)$ гладких финитных функций, сосредоточенных в шаре S_R.*

Для доказательства нужно к обеим частям уравнения (2.8) последовательно применить операторы $\partial_{\tau_k}^{-1}$, $k = 1, \ldots, n+1$, и использовать рассуждения, приведшие к единственному решению уравнения (2.2).

Легко заметить, что утверждение леммы 2.2 остается справедливым и в случае наличия у многочлена $P(t)$ кратных корней. В общем случае многочлен $P(t)$ разлагается в произведение неприводимых над полем вещественных чисел множителей:

$$P(t) = A_0 \left(t - t_1\right)^{k_1} \cdots \left(t - t_m\right)^{k_m} \left(t^2 + p_1 t + q_1\right)^{l_1} \cdots \left(t^2 + p_s t + q_s\right)^{l_s}.$$

Оператор L в этом случае допускает разложение в произведение операторов вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - a_i \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_i}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \beta_j \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \gamma_j \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^{l_j}.$$

Оператор $L_j = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \beta_j \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \gamma_j \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ является эллиптическим, поэтому существование и единственность решения уравнения $L_j f = g$ следует из формулы Пуассона и теоремы единственности гармонических функций.

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Пусть интегралы (1.1) с весовой функцией (2.4) и фиксированными векторами ω, θ ($\omega_i \neq 0, \theta_i \neq 0, i = 1, 2$) известны всюду в $\mathbb{R}^2$. Тогда задача восстановления функции $f(x)$ однозначно разрешима в классе $C_0^{n_1+n_2+1}(S_R)$ финитных $n_1 + n_2 + 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций. .*

Список литературы

[1] Бегматов Акрам Х. Задача интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве. 1996. СМЖ. Том 37. С. 851-857.

[2] Truong T.T., Nguen M.K. On V-line Radon transform in $\mathbb{R}^2$ and thear inversion. J. Phis. A: Math. Theor. 2011. V. 44. No 075206. 13 pp.

[3] Бегматов А.Х., Пиримбетов А.О., Сейдуллаев А.К. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии с возмущениями на семействе ломаных. 2015. Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика. Том 15. Вып. 1. С. 5-12.

[4] Бегматов А.Х., Джайков Г.М. Линейная задача интегральной геометрии с гладкими весовыми функциями и возмущением. 2015. Владикавказский математический журнал. Том 17. Вып. 3. С. 14-22.

[5] Logan B.F. and Shepp L.A. Optimal reconstruction of a function from its projections. 1975. Duke Math. J. 42. P. 645-659.

Меджидов З.Г. (Medzhidov Z.G.)
Дагестанский государственный университет, Дагестанский научный центр РАН

Поступила в редакцию
14.03.2017