УДК 517.521

М. Г. Магомед-Касумов

Оценка скорости сходимости рядов по синусам и косинусам с коэффициентами вида $1/k^q$

Получены точные по порядку оценки скорости сходимости синус и косинус рядов с коэффициентами вида $1/k^q$, $q > 1$. В случае $0 \leqslant q \leqslant 1$ доказаны точные по порядку оценки скорости роста частичных сумм синус и косинус рядов.

Библиография: 2 названия.

Exact order-of-magnitude estimates of convergence rate of sine and cosine series with coefficients $1/k^q$, $q > 1$, are obtained. In case when $0 \leqslant q \leqslant 1$ growth rate exact order-of-magnitude estimates of partial sums of sine and cosine series are proven.

Bibliography: 2 items.

Ключевые слова: синус ряд, косинус ряд, нижняя оценка, скорость сходимости, скорость роста

Keywords: sine series, cosine series, lower estimate, convergence rate, growth rate

Введение

Ряды по синусам и косинусам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^q}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^q}, \quad q \geqslant 1, \tag{0.1}$$

играют важную роль во многих вопросах теории тригонометрических рядов. В частности, исследование скорости сходимости этих рядов позволяет получать точные по порядку оценки скорости приближения кусочно гладких функций рядами Фурье (см., например, [1]).

Теорема 0.1. *Справедливы следующие равномерные оценки:*

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^q} \Big| \asymp \frac{1}{n^{q-1}}, \quad \mathbf{R} \ni q \geqslant 1, \tag{0.2}$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]} \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^q} \Big| \asymp \frac{1}{n^{q-1}}, \quad \mathbf{R} \ni q > 1. \tag{0.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00486а)

Доказательство. Доказательство соотношения (0.3) и верхней оценки в (0.2) при $q > 1$ является тривиальным. Верхняя оценка в (0.2) при $q = 1$ следует из равномерной ограниченности сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ [2; следствие, с. 99] и равенства $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} - S_n(x)$, $x \in (0, 2\pi)$. Основную сложность представляет получение оценки снизу для (0.2). Рассмотрим следующую числовую последовательность:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx_n}{k^q}, \quad x_n = \frac{\pi}{n}. \tag{0.4}$$

Оценка снизу в (0.2) будет доказана, если мы покажем, что $|r_n| \geqslant \frac{c}{n^{q-1}}$. Для этого перепишем сумму из (0.4) в следующем виде:

$$r_n = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n} \frac{\sin(2nj + n + m)x_n}{(2nj + n + m)^q}. \tag{0.5}$$

Учитывая, что

$$\sin(2nj + n + m)x_n = \sin \frac{(2nj + n + m)\pi}{n} = -\sin \frac{m\pi}{n},$$

из (0.5) выводим

$$r_n = -\sum_{m=1}^{2n} \sin \frac{m\pi}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2nj + n + m)^q}.$$

Обратим внимание, что величина $\sin \frac{m\pi}{n}$ положительна при $1 \leqslant m \leqslant n - 1$, отрицательна при $n + 1 \leqslant m \leqslant 2n - 1$ и равна нулю при $m = n$ и $m = 2n$. Исходя из этих соображений, разобьем полученную сумму на две части:

$$-r_n = \sum_{m=1}^{n-1} \sin \frac{m\pi}{n} J(m, n, q) + \sum_{m=n+1}^{2n-1} \sin \frac{m\pi}{n} J(m, n, q), \tag{0.6}$$

где $J(m, n, q) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{((2j+1)n+m)^q}$. Делая замену переменной суммирования $m' = m - n$ во второй сумме и пользуясь свойством $\sin(x + \pi) = -\sin x$, из (0.6) получим

$$-r_n = \sum_{m=1}^{n-1} \sin \frac{m\pi}{n} \Big(J(m, n, q) - J(m + n, n, q) \Big). \tag{0.7}$$

Поскольку $J(m, n, q)$ монотонно убывает с ростом m, то все слагаемые под суммой положительны. Следовательно, мы можем отбросить в (0.7) слагаемые с индексами $[n/2] + 1 \leqslant m \leqslant n - 1$, не увеличивая при этом суммы ($[x]$ – целая часть x). Тогда, пользуясь также неравенством $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, из (0.7) выводим

$$|r_n| \geqslant \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{[n/2]} m \Big(J(m, n, q) - J(m + n, n, q) \Big) \tag{0.8}$$

Для получения оценки снизу для разности в скобках под суммой рассмотрим функцию $\psi(t) = \frac{1}{t^q}$ и применим к ней теорему Лагранжа о среднем ($(2j+1)n+m < \theta < (2j+1)n+m+n$):

$$\frac{1}{((2j+1)n+m)^q} - \frac{1}{((2j+1)n+m+n)^q} = \\ \psi((2j+1)n+m) - \psi((2j+1)n+m+n) = \frac{nq}{\theta^{q+1}} \geqslant \frac{nq}{((2j+1)n+m+n)^{q+1}}.$$

Отсюда и из (0.8) имеем:

$$|r_n| \geqslant 2q \sum_{m=1}^{[n/2]} mJ(m+n,n,q+1). \tag{0.9}$$

Оценим снизу величину $J(m+n,n,q+1)$:

$$J(m+n,n,q+1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\big(2n(j+1)+m\big)^{q+1}} \geqslant \\ \int_0^{\infty} \frac{dt}{\big(2n(t+1)+m\big)^{q+1}} = \frac{1}{2nq(m+2n)^q}.$$

Подставляя данную оценку в (0.9), находим

$$|r_n| \geqslant \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{m}{(m+2n)^q} \geqslant \frac{1}{n(5n/2)^q} \sum_{m=1}^{[n/2]} m \geqslant \frac{c}{n^{q-1}}.$$

Теорема доказана.

При $q \leqslant 1$ ряд по косинусам в (0.1) расходится в точке $x=0$, поэтому равномерные оценки вида (0.3) для него неверны. Однако можно оценить скорость роста указанного ряда. В следующих двух утверждениях приведены оценки для частичных сумм рядов (0.1) при $q=1$ и $0 \leqslant q < 1$.

Утверждение 0.1. *Имеют место следующие оценки:*

$$\max_{x\in[0,2\pi]} \Big|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\Big| \asymp 1, \quad n \geqslant 1, \tag{0.10}$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]} \Big|\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k}\Big| \asymp \ln(n+1), \quad n \geqslant 1. \tag{0.11}$$

Доказательство. Оценка сверху в (0.10) доказывается даже в более общем случае в [2; следствие, с. 99]. Нижнюю оценку легко получить, если рассмотреть значение частичной суммы из (0.10) в точке $x_n = \frac{\pi}{2n+1}$ и воспользоваться неравенством $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$, $x \in [0,\pi/2]$:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx_n}{k}\Big| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{2n+1}}{k} \geqslant \frac{2n}{2n+1} \geqslant \frac{2}{3}, \quad n \geqslant 1.$$

Что касается соотношения (0.11), то очевидно, что максимум модуля суммы из этого соотношении достигается в точке $x = 0$. Поэтому

$$\max_{x\in[0,2\pi]}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\Big| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Остаётся только отметить, что последняя сумма легко оценивается снизу и сверху с помощью интеграла:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqslant \int\limits_{1}^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1+\int\limits_{1}^{n}\frac{dx}{x} = 1+\ln n \leqslant 3\ln(n+1).$$

Утверждение доказано.

Утверждение 0.2. *При $0 \leqslant q < 1$ справедливы следующие соотношения:*

$$\max_{x\in[0,2\pi]}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k^q}\Big| \asymp n^{1-q}, \tag{0.12}$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k^q}\Big| \asymp n^{1-q}. \tag{0.13}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\max_{x\in[0,2\pi]}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k^q}\Big| \leqslant \max_{x\in[0,2\pi]}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k^q}\Big| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^q}.$$

Легко также видеть, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^q} \asymp n^{1-q}$:

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{k^q} \leqslant \int\limits_{0}^{n}\frac{dx}{x^q} = \frac{n^{1-q}}{1-q},$$

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{k^q} \geqslant \int\limits_{1}^{n+1}\frac{dx}{x^q} = \frac{(n+1)^{1-q}-1}{1-q} \geqslant \frac{(n+1)^{1-q}}{2(1-q)}.$$

Осталось показать нижнюю оценку для суммы по синусам. Для этого, как и в доказательстве предыдущего утверждения, оценим сумму в (0.12) в точках $x_n = \frac{\pi}{2n+1}$:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx_n}{k^q}\Big| = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{2n+1}}{k^q} \geqslant \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}k^{1-q} \geqslant$$
$$\frac{2}{2n+1}\int\limits_{0}^{n}x^{1-q}dx = \frac{2}{2n+1}\frac{n^{2-q}}{2-q} \geqslant cn^{1-q}, \quad n \geqslant 1.$$

Утверждение доказано.

Список литературы

[1] Магомед-Касумов М.Г. Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Математические заметки. 2016. Том 100, №2. С. 229–247.

[2] Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ. 1961. 936 с.

М. Г. Магомед-Касумов (M. G. Magomed-Kasumov)
Владикавказский научный центр РАН,
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: rasuldev@gmail.com

Поступила в редакцию
22.03.2017