УДК 517.521

Р. М. Гаджимирзаев

Приближение функций, заданных на сетке $\{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$ суммами Фурье-Мейкснера

Настоящая работа посвящена изучению аппроксимативных свойств частичных сумм ряда Фурье по модифицированным полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, которые при $\alpha > -1$ образуют ортогональную систему на сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N > 0$ с весом $w(x) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}$. Основное внимание уделено получению верхней оценки для функции Лебега указанных частичных сумм.

Библиография: 4 названия.

The present paper is devoted to the study of approximation properties of partial sums of the Fourier series in the modified Meixner polynomials $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ which for $\alpha > -1$ constitute an orthogonal system on the grid $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, where $\delta = \frac{1}{N}$, $N > 0$ with weight $w(x) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}$. The main attention is paid to obtaining an upper estimate for the Lebesgue function of these partial sums.

Bibliography: 4 items.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, ряд Фурье, функция Лебега.
Keywords: Meixner polynomials, Fourier series, Lebesgue function.

Введение

Пусть $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N > 0$. Через $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ обозначим, следуя [1], модифицированные полиномы Мейкснера, образующие при $\alpha > -1$ ортогональную систему на дискретном множестве Ω_δ с весом $w(x) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}$, то есть

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} M_{n,N}^{\alpha}(x) M_{k,N}^{\alpha}(x) w(x) = (1 - e^{-\delta})^{-\alpha-1} h_{n,N}^{\alpha}\delta_{nk},\ \alpha > -1,$$

где $h_{n,N}^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n} e^{-n\delta}\Gamma(\alpha + 1)$, а соответствующие ортонормированные с весом $\rho_N(x) = (1 - e^{-\delta})^{\alpha+1} w(x)$ полиномы обозначим через $m_{n,N}^{\alpha}(x) = (h_{n,N}^{\alpha})^{-\frac{1}{2}} M_{n,N}^{\alpha}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. В настоящей работе для функции f, заданной на множестве Ω_δ, рассмотрена задача об исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм $S_{n,N}^{\alpha}(f, x)$ ее ряда Фурье по полиномам $m_{n,N}^{\alpha}(x)$. Основное внимание уделено получению верхней оценки для функции Лебега $\lambda_{n,N}^{\alpha}(x)$ указанных частичных сумм при $x \in [0, \frac{\theta_n}{2}]$, где $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$. В случае $\alpha = -\frac{1}{2}$ эта задача была решена в работе [4].

1. Некоторые сведения о полиномах Мейкснера

При исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм ряда Фурье по полиномам $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ нам понадобятся некоторые свойства этих полиномов.

Пусть α произвольное действительное число и $q \neq 0$. Тогда для классических полиномов Мейкснера $M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x,q)$ имеют место [1]-[3]:

явное представление

$$M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x,q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $x^{[k]} = x(x-1)\dots(x-k+1)$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$;

соотношение ортогональности

$$\sum_{x=0}^{\infty} M_n^{\alpha}(x) M_k^{\alpha}(x) \rho(x) = (1-q)^{-\alpha-1} h_n^{\alpha}(q) \delta_{nk}, \quad 0 < q < 1, \ \alpha > -1,$$

где $\rho(x) = \rho(x;\alpha,q) = q^{-x} \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}$, $h_n^{\alpha}(q) = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1)$, δ_{nk} – символ Кронекера;

формула Кристоффеля-Дарбу

$$K_n^{\alpha,q}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} q^k \frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)} M_k^{\alpha}(x) M_k^{\alpha}(y)$$

$$= \frac{(n+1)! q^{n+1}}{\Gamma(n+\alpha+1)(q-1)} \frac{M_{n+1}^{\alpha}(x) M_n^{\alpha}(y) - M_n^{\alpha}(x) M_{n+1}^{\alpha}(y)}{x-y}. \tag{1.1}$$

Пусть $N > 0$, $\delta = 1/N$, $q = e^{-\delta}$. Через $M_{n,N}^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(Nx, e^{-\delta})$ $(n = 0,1,\dots)$ обозначим, следуя [1], модифицированные полиномы Мейкснера, которые при $\alpha > -1$ образуют ортогональную на $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ систему с весом $\rho_N(x) = (1-e^{-\delta})^{\alpha+1} \rho(Nx; \alpha, e^{-\delta})$, т.е.,

$$\sum_{x \in \Omega_\delta} M_{n,N}^{\alpha}(x) M_{k,N}^{\alpha}(x) \rho_N(x) = h_{n,N}^{\alpha} \delta_{nk}, \quad \alpha > -1, \tag{1.2}$$

где $h_{n,N}^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n} e^{n\delta} \Gamma(\alpha+1)$. Из (1.2) следует, что соответствующая ортонормированная система полиномов имеет вид $m_{n,N}^{\alpha}(x) = m_n^{\alpha}(Nx, e^{-\delta}) = (h_{n,N}^{\alpha})^{-1/2} M_{n,N}^{\alpha}(x)$.

Далее, пусть

$$K_{n,N}^{\alpha}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} m_{k,N}^{\alpha}(x) m_{k,N}^{\alpha}(y). \tag{1.3}$$

Тогда в силу формулы Кристоффеля-Дарбу (1.1) мы можем записать

$$K_{n,N}^{\alpha}(x,y) = \frac{\delta \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{(e^{\delta/2} - e^{-\delta/2})(y-x)} \times$$

$$\left[m_{n+1,N}^{\alpha}(x) m_{n,N}^{\alpha}(y) - m_{n,N}^{\alpha}(x) m_{n+1,N}^{\alpha}(y) \right]$$

При оценке функции Лебега нам понадобятся некоторые преобразования для $K^{\alpha}_{n,N}(x,y)$. С этой целью положим $\alpha_n = \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$, тогда для $n \geqslant 1$ имеем

$$\frac{1}{\alpha_n}K^{\alpha}_{n,N}(x,y) = \frac{\delta}{(e^{\delta/2}-e^{-\delta/2})(y-x)}\times$$

$$\left[m^{\alpha}_{n+1,N}(x)m^{\alpha}_{n,N}(y) - m^{\alpha}_{n,N}(x)m^{\alpha}_{n+1,N}(y)\right], \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}}K^{\alpha}_{n,N}(x,y) = \frac{\delta}{(e^{\delta/2}-e^{-\delta/2})(y-x)}\times$$

$$\left[m^{\alpha}_{n,N}(x)m^{\alpha}_{n-1,N}(y) - m^{\alpha}_{n-1,N}(x)m^{\alpha}_{n,N}(y)\right] + \frac{1}{\alpha_{n-1}}m^{\alpha}_{n,N}(x)m^{\alpha}_{n,N}(y) \tag{1.5}$$

Складывая правые и левые части равенств (1.4) и (1.5) для $n \geqslant 1$ имеем равенство

$$\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)K^{\alpha}_{n,N}(x,y) = \frac{1}{\alpha_{n-1}}m^{\alpha}_{n,N}(x)m^{\alpha}_{n,N}(y)+$$

$$\frac{\delta}{(e^{\delta/2}-e^{-\delta/2})(y-x)}\left[m^{\alpha}_{n,N}(y)\left(m^{\alpha}_{n+1,N}(x)-m^{\alpha}_{n-1,N}(x)\right)-\right.$$

$$\left.m^{\alpha}_{n,N}(x)\left(m^{\alpha}_{n+1,N}(y)-m^{\alpha}_{n-1,N}(y)\right)\right],$$

которое мы перепишем так

$$K^{\alpha}_{n,N}(x,y) = \frac{\alpha_n}{(\alpha_n+\alpha_{n-1})}m^{\alpha}_{n,N}(x)m^{\alpha}_{n,N}(y)+$$

$$\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{(\alpha_n+\alpha_{n-1})}\frac{\delta}{(e^{\delta/2}-e^{-\delta/2})}\frac{1}{(y-x)}\times$$

$$\left[m^{\alpha}_{n,N}(y)\left(m^{\alpha}_{n+1,N}(x)-m^{\alpha}_{n-1,N}(x)\right)\right.$$

$$\left.-m^{\alpha}_{n,N}(x)\left(m^{\alpha}_{n+1,N}(y)-m^{\alpha}_{n-1,N}(y)\right)\right]. \tag{1.6}$$

Нетрудно увидеть, что равенство (1.6) справедливо также и для $n = 0$.

Замечание 1. Формула (1.6) впервые была получена в работе [4].

Далее, обозначим через $C(\Omega_\delta)$ пространство дискретных функций $f(x)$ вида $f : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$ и таких, что

$$\lim_{x\to\infty}|f(x)|e^{-x/2} = 0.$$

Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|f\|_{C(\Omega_\delta)} = \sup_{x\in\Omega_\delta} e^{-x/2}|f(x)|.$$

Справедлива следующая лемма

Лемма 1.1. *Пусть* $\alpha > -1$, $p > 1$, $l^p_{\rho_N}$ *– пространство функций, заданных на* Ω_δ *и таких, что*

$$\|f\|_{l^p_{\rho_N}} = \left(\sum_{x\in\Omega_\delta} |f(x)|^p \rho_N(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Тогда $C(\Omega_\delta) \subset l^p_{\rho_N}$ *при* $1 < p < 2$.

Из леммы 1.1 следует, что для произвольной функции $f \in C(\Omega_\delta)$ мы можем определить коэффициенты Фурье-Мейкснера

$$f_k^\alpha = \sum_{t\in\Omega_\delta} f(t) m_{k,N}^\alpha(t)\rho_N(t)$$

и ряд Фурье-Мейкснера

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_{k,N}^\alpha(x). \tag{1.7}$$

Через $S_{n,N}^\alpha(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (1.7):

$$S_{n,N}^\alpha(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^\alpha m_{k,N}^\alpha(x),$$

которую в силу (1.3) можем представить в виде

$$S_{n,N}^\alpha(f,x) = \sum_{t\in\Omega_\delta} f(t)\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(t,x) e^{-t}\frac{\Gamma(Nt+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}. \tag{1.8}$$

Будем рассматривать $S_{n,N}^\alpha(f,x)$ как аппарат приближения функций из $C(\Omega_\delta)$. Для $f \in C(\Omega_\delta)$ через $E_n(f)$ обозначим наилучшее приближение f в метрике пространства $C(\Omega_\delta)$ алгебраическими полиномами степени n, то есть,

$$E_n(f) = \inf_{p_n\in H^n} \|f - p_n\|_{C(\Omega_\delta)},$$

где H^n – подпространство алгебраических полиномов $p_n(x)$ степени не выше n. Пусть, далее $p_n(f) = p_n(f,x)$ полином наилучшего приближения к функции f в $C(\Omega_\delta)$, для которого $E_n(f) = \|f - p_n(f)\|_{C(\Omega_\delta)}$. Тогда, пользуясь тем, что для $p_n \in H^n$ будет $S_{n,N}^\alpha(p_n) = p_n$ мы можем записать

$$\left|f(x) - S_{n,N}^\alpha(f,x)\right| = \left|f(x) - p_n(f,x) + p_n(f,x) - S_{n,N}^\alpha(f,x)\right| \leqslant$$

$$|f(x) - p_n(f,x)| + \left|S_{n,N}^\alpha(p_n - f, x)\right|.$$

Отсюда и из (1.8)

$$e^{-\frac{x}{2}}\left|f(x) - S_{n,N}^\alpha(f,x)\right| \leqslant e^{-\frac{x}{2}}|f(x) - p_n(f,x)| + e^{-\frac{x}{2}}\left|S_{n,N}^\alpha(p_n - f,x)\right| \leqslant$$

$$E_n(f)(1 + \lambda_{n,N}^\alpha(x)), \tag{1.9}$$

где

$$\lambda_{n,N}^{\alpha}(x) = \sum_{t\in\Omega_\delta} e^{-\frac{t+x}{2}} \frac{\Gamma(Nt+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,x)\right|. \tag{1.10}$$

В связи с неравенством (1.9) возникает задача об оценке на $[0,\infty)$ функции Лебега $\lambda_{n,N}^{\alpha}(x)$, определяемой равенством (1.10). Чтобы избежать чрезмерного объема статьи, мы ограничимся рассмотрением этой задачи для $x \in G_1 = [0, \frac{3}{\theta_n}]$ и $x \in G_2 = [\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}]$, оставляя случай $x \in (\frac{\theta_n}{2}, \infty)$ в качестве объекта исследования другой работы. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $\alpha > -1$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$. Тогда имеют место следующие оценки:*
1) если $x \in G_1 = [0, \frac{3}{\theta_n}]$, то

$$\lambda_{n,N}^{\alpha}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda)\begin{cases}1, & -1<\alpha<-\frac{1}{2},\\ \ln(n+1), & \alpha=-\frac{1}{2},\\ n^{\alpha+\frac{1}{2}}, & \alpha>-\frac{1}{2}.\end{cases};$$

2) если $x \in G_2 = [\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}]$, то

$$\lambda_{n,N}^{\alpha}(x) \leqslant c(\alpha,\lambda)\begin{cases}\ln(nx+1), & -1<\alpha<-\frac{1}{2},\\ \ln(n+1), & \alpha=-\frac{1}{2},\\ \ln(n+1)+\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \alpha>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Список литературы

[1] Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та. 1997.

[2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука. 1974.

[3] Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. М.: Наука. 1985.

[4] Гаджиева З. Д. Смешанные ряды по полиномам Мейкснера. Кандидатская диссертация - Саратов. Саратовский гос. ун-т. 2004.

Р. М. Гаджимирзаев (R. M. Gadzhimirzaev)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: ramis3004@gmail.com

Поступила в редакцию
27.03.2017