УДК 517.538

И. И. Шарапудинов**Асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Якоби**

Рассмотрены полиномы $p_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), порожденные классическими ортонормированными полиномами Якоби $p_n^{\alpha,\beta}(x)$, образующие ортонормированную систему по Соболеву относительно скалярного произведения следующего вида

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt,$$

где $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ – весовая функция Якоби. Для полиномов $p_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ получены явные представления, с помощью которых исследованы асимптотические свойства полиномов $p_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$.

Библиография: 32 названия.

We consider polynomials $p_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), generated by classical Jacobi polynomials $p_n^{\alpha,\beta}(x)$ and forming orthonormal system with respect to Sobolev-type inner product

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt,$$

where $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ – Jacobi weight function. The explicit representations for polynomials $p_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ are obtained and using these ones the asymptotic properties of polynomials $p_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ are investigated.

Bibliography: 32 items.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, ортогональные по Соболеву полиномы, полиномы Якоби, полиномы Чебышева первого рода, полиномы Лежандра.

Keywords: orthogonal polynomials, Sobolev orthogonal polynomials, Jacobi polynomials, Chebyshev polynomials of the first kind, Legendre polynomials.

1. Введение

В течении последних двух десятилетий в теории ортогональных полиномов появилось и стало интенсивно развиваться (см. [1] – [8] и цитированную там литературу) новое направление, которое принято обозначать словами: «полиномы, ортогональные по Соболеву». Растущий интерес к этому направлению теории ортогональных полиномов можно объяснить в том числе и тем

обстоятельством, что ряды Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, оказались естественным и весьма удобным инструментом для представления решений дифференциальных (разностных) уравнений. Это можно показать, в частности, на примере задачи Коши для линейного дифференциального уравнения

$$a_r(x)y^{(r)}(x) + a_{r-1}(x)y^{(r-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = h(x) \quad (1.1)$$

с начальными условиями $y^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$. Наряду с различными сеточными методами, для решения этой задачи часто применяют так называемые спектральные методы [10] – [18]. Напомним, что суть спектрального метода решения задачи Коши для ОДУ (1.1) заключается в том, что в первую очередь искомое решение $y(x)$ представляется в виде ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}_k \psi_k(x) \quad (1.2)$$

по подходящей ортонормированной системе $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ (чаще всего в качестве $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ используют тригонометрическую систему, ортогональные полиномы, вейвлеты, корневые функции того или иного дифференциального оператора и некоторые другие). На втором этапе осуществляется подстановка вместо $y(x)$ ряда (1.2) в уравнение (1.1). Это приводит к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\hat{y}_k$ ($k = 0, 1, \dots$). На третьем этапе требуется решить эту систему с учетом начальных условий $y^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$ исходной задачи Коши. Одна из основных трудностей, которая возникает на этом этапе, состоит в том, чтобы выбрать такой ортонормированный базис $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, для которого искомое решение $y(x)$ уравнения (1.1), представленное в виде ряда (1.2), удовлетворяло бы начальным условиям $y^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$. Более того, поскольку в результате решения системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\hat{y}_k$ будет найдено только конечное их число с $k = 0, 1, \dots, n$, то весьма важно, чтобы частичная сумма ряда (1.2) вида

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \hat{y}_k \psi_k(x),$$

будучи приближенным решением рассматриваемой задачи Коши, также удовлетворяла начальным условиям $y_n^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$. Покажем, что базис $\{\psi_k(x) = p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящий из полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt \quad (1.3)$$

и порожденных ортонормированными полиномами Якоби $p_k^{\alpha,\beta}(x)$ посредством равенств

$$p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (1.4)$$

$$p_{r,r+n}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} p_n^{\alpha,\beta}(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

обладает указанными свойствами. С этой целью заметим, что ряд Фурье (1.2), в случае, когда $\{\psi_k(x) = p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^\infty$, приобретает, как показано в §4, следующий вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{r-1} y^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty \hat{y}_{r,k} p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x), \quad (1.6)$$

где

$$\hat{y}_{r,k} = \int_{-1}^1 y^{(r)}(t) p_{k-r}^{\alpha,\beta}(t) \kappa(t) dt. \quad (1.7)$$

С другой стороны, из определения (1.5) вытекает, что $(p_{r,k}^{\alpha,\beta}(-1))^{(\nu)} = 0$ для всех $0 \leq \nu \leq r-1$, поэтому функция $y(x)$, представленная в виде ряда (1.6), так и частичная сумма этого ряда вида

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{r-1} y^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^n \hat{y}_{r,k} p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) \quad (1.8)$$

удовлетворяют начальным условиям задачи Коши для уравнения (1.1).

Таким образом, полиномы, ортогональные по Соболеву относительно скалярного произведения (1.3), тесно связаны с задачей Коши для уравнения (1.1). Можно также показать, что полиномы $p_{r,k}^{0,0}(x)$ могут служить удобным и эффективным методом приближенного решения двухточечной краевой задачи для уравнений типа (1.1).

Следует отметить, что смешанные ряды вида (1.6), ассоциированные с классическими ортогональными полиномами, являлись основным объектом исследования работ [19] – [26]. Полиномы $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$, определяемые равенствами типа (1.4) и (1.5), в этих работах существенно использовались в качестве вспомогательного аппарата при исследовании вопросов сходимости смешанных рядов вида (1.6), не отмечая при этом свойство их ортогональности по Соболеву относительно скалярного произведения (1.3). Общая идея, которая лежит в основе построения смешанных рядов, заключается в следующем. Предположим, что система функций $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормирована на (a, b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad (1.9)$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Через $L_\rho^p(a, b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a, b) , для которых

$$\int_a^b |f(x)|^p \rho(x) dx < \infty.$$

Если $\rho(x) \equiv 1$, то будем писать $L_\rho^p(a, b) = L^p(a, b)$ и $L(a, b) = L^1(a, b)$. Из (1.9) следует, что $\varphi_k(x) \in L_\rho^2(a, b)$ ($k = 0, 1, \dots$). Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a, b)$ ($k = 0, 1, \dots$). Тогда мы можем определить следующие порожденные системой $\{\varphi_k(x)\}$ функции

$$\varphi_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.10)$$

Кроме того, определим конечный набор функций

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1. \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) следует, что для п.в. $x \in (a, b)$

$$(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \leq \nu \leq r-1, r \leq k, \\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \leq k, \\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \leq k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leq r-1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Через $W_{L^p_\rho(a,b)}^r$ обозначим пространство Соболева $W_{L^p_\rho(a,b)}^r$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho(a, b)$. Скалярное произведение в пространстве $W_{L^p_\rho(a,b)}^r$ определим с помощью равенства

$$(f, g) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt. \quad (1.13)$$

Тогда, пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (1.10) и (1.11)) и равенством (1.12), нетрудно увидеть (см. теорему 2.1), что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной в пространстве $W_{L^p_\rho(a,b)}^r$. Мы будем называть систему $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ *ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (1.13) и *порожденной ортонормированной системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$. В дальнейшем будет показано (см. §2), что ряд Фурье функции $f(x) \in W_{L^p_\rho(a,b)}^r$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ имеет смешанный характер, а, более точно, имеет следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty \hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x), \quad (1.14)$$

где

$$\hat{f}_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t) \varphi_{r,k}^{(r)}(t) \rho(t) dt = \int_a^b f^{(r)}(t) \varphi_{k-r}(t) \rho(t) dt, \quad (1.15)$$

поэтому ряд вида (1.14) будем (следуя [19] – [24]) называть *смешанным рядом* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, считая это название условным и сокращенным обозначением полного названия: «ряд Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, ортонормированной по Соболеву, порожденной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ ».

В цитированных выше работах [19] – [26] (см. также [27]) были рассмотрены некоторые частные случаи ортонормированных систем функций вида $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденных классическими ортонормированными системами Якоби, Лежандра, Чебышева, Лагерра и Хаара. С другой стороны, как уже отмечалось, в последние годы интенсивное развитие получила теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые,

которые «контролируют», поведение соответствующих ортогональных полиномов в нескольких заданных точках числовой оси. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a, b) , могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a, b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (1.13), рассматриваемое в настоящей работе, имеет одну особую точку, а именно, точку a , в окрестности которой «контролируется» поведение функций $\varphi_{r,k}(x)$, ортогональных по Соболеву и порожденных исходной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенства (1.10).

Отметим некоторые важные свойства смешанного ряда (1.14), непосредственно вытекающие из (1.12). Первое из них связано с дифференциальным свойством смешанного ряда, а именно, если $r > 1$, то в результате почленного дифференцирования смешанного ряда (1.14) мы получим смешанный ряд для производной $f'(x)$, соответствующий случаю, когда вместо r фигурирует $r - 1$, другими словами

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1} \varphi_{r-1,k-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x))'. \quad (1.16)$$

Второе свойство связано с почленным интегрированием с переменным верхним пределом и имеет вид

$$\int_a^x f'(t) dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1} \int_a^x \varphi_{r-1,k-1}(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x). \quad (1.17)$$

Важное значение имеет свойство смешанного ряда (1.14), которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$Y_{r,N}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^N \hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x) \quad (1.18)$$

при $r \leq N$ совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = a$ r -кратно, т.е.

$$(Y_{r,N}(f, x))_{x=a}^{(\nu)} = f^{(\nu)}(a) \quad (0 \leq \nu \leq r-1). \quad (1.19)$$

Кроме того, из (1.12) и (1.18) следует, что $(0 \leq \nu \leq r-1)$

$$Y_{r,N}^{(\nu)}(f, x) = \sum_{n=0}^{r-1-\nu} f^{(n+\nu)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \sum_{n=r-\nu}^{N-\nu} f_{r-\nu,n}^{(\nu)} \varphi_{r-\nu,n}(x) = Y_{r-\nu,N-\nu}(f^{(\nu)}, x), \quad (1.20)$$

отсюда, в свою очередь, выводим $(0 \leq \nu \leq r-2)$

$$f^{(\nu)}(x) - Y_{r,N}^{(\nu)}(f, x) = \frac{1}{(r-\nu-2)!} \int_a^x (x-t)^{r-\nu-2} (f^{(r-1)}(t) - Y_{r,N}^{(r-1)}(f, t)) dt =$$

$$\frac{1}{(r - \nu - 2)!} \int_a^x (x - t)^{r-\nu-2} (f^{(r-1)}(t) - Y_{1,N-r+1}(f^{(r-1)}, t)) dt. \quad (1.21)$$

В [19] – [26], воспользовавшись равенствами типа (1.20) и (1.21), было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. Как было показано выше, такие задачи непосредственно возникают, например, в связи с решением краевых задач для дифференциальных уравнений спектральными методами. Основное внимание в [19] – [24] уделялось исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по ультрасферическим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$, тогда как в работе [26] были найдены условия на параметры α и β , которые обеспечивают равномерную сходимость смешанных рядов по общим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ с $\alpha, \beta > -1$.

В связи с отмеченными выше и рядом других задач, в которых полиномы, ортогональные по Соболеву, предстают перед нами как естественный и эффективный инструмент для их решения, возникают важные задачи об изучении различных свойств самих этих полиномов. Наиболее трудными из них, как это и бывает в теории ортогональных полиномов, являются задачи, связанные с их асимптотическим поведением. В связи с этой проблемой отметим работу [6], в которой, используя идеи и технику А. А. Гончара [28], исследована задача о сравнительной асимптотике полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева с дискретными массами.

Основной целью настоящей статьи является получение различных выражений для полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных по Соболеву относительно скалярного произведения (1.3) и порожденных полиномами Якоби $p_k^{\alpha,\beta}(x)$ посредством равенства (1.5). Эти результаты будут использованы при изучении асимптотических свойств полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$ при $x \in [-1, 1]$ и $n \rightarrow \infty$.

Прежде, чем перейти к исследованию свойств полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$, мы рассмотрим некоторые общие свойства функций $\varphi_{r,k}(x)$, ($k = 0, 1, \dots$), определенных равенствами (1.10) и (1.11), ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (1.13).

2. Некоторые результаты общего характера

Рассмотрим сначала задачу о полноте в $W_{L_\rho^2(a,b)}^r$ системы $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, состоящей из функций, определенных равенствами (1.10) и (1.11).

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что функции $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют полную в $L_\rho^2(a, b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на (a, b) . Тогда система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ посредством равенств (1.3) и (1.4), полна в $W_{L_\rho^2(a,b)}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (1.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (1.3) следует, что если $r \leq k$ и $0 \leq \nu \leq r-1$, то $(\varphi_{r,k}(x))_{x=a}^{(\nu)} = 0$, поэтому в силу (1.5), (1.6), имеем

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle &= \int_a^b (\varphi_{r,k}(x))^{(r)} (\varphi_{r,l}(x))^{(r)} \rho(x) dx = \\ &= \int_a^b \varphi_{k-r}(x) \varphi_{l-r}(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad k, l \geq r, \end{aligned} \quad (2.1)$$

а из (1.4) и (1.6) имеем

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} (\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)}|_{x=a} (\varphi_{r,l}(x))^{(\nu)}|_{x=a} = \delta_{kl}, \quad k, l < r. \quad (2.2)$$

Очевидно также, что

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = 0, \quad \text{если } k < r \leq l \text{ или } l < r \leq k. \quad (2.3)$$

Это означает, что функции $\varphi_{r,k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют в $W_{L^2_\rho(a,b)}^r$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1.6). Остается убедиться в ее полноте в $W_{L^2_\rho(a,b)}^r$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W_{L^2_\rho(a,b)}^r$ и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leq r-1$, то $\langle f, \varphi_{r,k} \rangle = f^{(k)}(a)$, поэтому с учетом того, что $\langle f, \varphi_{r,k} \rangle = 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt. \quad (2.4)$$

С другой стороны, для всех $k \geq r$ имеем

$$0 = \langle f, \varphi_{r,k} \rangle = \int_a^b f^{(r)}(x) (\varphi_{r,k}(x))^{(r)} \rho(x) dx = \int_a^b f^{(r)}(x) \varphi_{k-r}(x) \rho(x) dx.$$

Отсюда и из того, что $\varphi_m(x)$ ($m = 0, 1, \dots$) образуют в $L^2_\rho(a,b)$ полную ортонормированную систему, имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на (a,b) . Поэтому $f(x) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a,b)$, а функции $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют полную в $L^2_\rho(a,b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на (a,b) , $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ – система, ортонормированная в $W_{L^2_\rho(a,b)}^r$ относительно скалярного произведения (1.6), порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ посредством равенств (1.3) и (1.4). Тогда, если $f(x) \in W_{L^2_\rho(a,b)}^r$, то ряд Фурье (смешанный ряд) (1.7) сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [a,b]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $S_n(f^{(r)}) = S_n(f^{(r)}, x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $f^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a,b)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, т.е.

$$S_n(f^{(r)}, x) = \sum_{k=0}^n f_{r,k+r} \varphi_k(x), \quad (2.5)$$

где коэффициенты $f_{r,k+r}$ ($k = 0, 1, \dots$) определены равенством (1.8). Из условий теоремы 2 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_{L^2_\rho(a,b)} \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Далее, обозначим через $Y_{n+r}(f, x)$ частичную сумму смешанного ряда (1.7) следующего вида

$$Y_{n+r}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n+r} \hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x), \quad (2.7)$$

и запишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt. \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) имеем

$$f(x) - Y_{n+r}(f, x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \sum_{k=r}^{n+r} \hat{f}_{r,k} \varphi_{r,k}(x). \quad (2.9)$$

Обратимся к равенству (1.3), тогда (2.9) можно переписать так

$$\begin{aligned} f(x) - Y_{n+r}(f, x) &= \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \sum_{k=r}^{n+r} \hat{f}_{r,k} \varphi_{k-r}(t) dt = \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} [f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)}, t)] dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) и неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - Y_{n+r}(f, x)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{(r-1)!} \left(\int_a^b \frac{|x-t|^{2(r-1)}}{\rho(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)}, t)]^2 \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Сопоставляя (2.6) с (2.11), убеждаемся в справедливости теоремы 2.

3. Некоторые сведения о полиномах Якоби

При изучении свойств полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, нам понадобятся ряд свойств классических полиномов Якоби. Для произвольных действительных α и β полиномы Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ можно определить [29] с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \rho(x) \sigma^n(x) \}, \quad (3.1)$$

где α, β – произвольные действительные числа, $\rho(x) = \rho(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \beta}(x) P_m^{\alpha, \beta}(x) \rho(x) dx = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (3.2)$$

где

$$h_n^{\alpha, \beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \quad (3.3)$$

Нам понадобятся еще следующие свойства полиномов Якоби [29], [32]:

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x), \quad (3.4)$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{2^\nu} P_{n-\nu}^{\alpha+\nu, \beta+\nu}(x), \quad (3.5)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)\dots(a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$,

$$\binom{n}{l} P_n^{\alpha, -l}(x) = \binom{n+\alpha}{l} \left(\frac{x+1}{2}\right)^l P_{n-l}^{\alpha, l}(x), \quad 1 \leq l \leq n, \quad (3.6)$$

$$P_n^{\alpha, \beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k! (\alpha+1)_k} \left(\frac{1-t}{2}\right)^k, \quad (3.7)$$

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ (1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha, m+\beta}(x) \right\}, \quad (3.8)$$

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$P_n^{\alpha, \beta}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}, \quad P_n^{\alpha, \beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{a, a}(x)}{P_n^{a, a}(1)} &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!(\alpha+1)_{n-2j}(n+2a+1)_{n-2j}(1/2)_j(a-\alpha)_j}{(n-2j)!(2j)!(a+1)_{n-2j}(n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}} \\ &\times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j(n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{P_{n-2j}^{\alpha, \alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha, \alpha}(1)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $[b]$ – целая часть числа b .

ЛЕММА 3.1. Пусть $\alpha > -1$, k, r – целые, $r \geq 1$, $k \geq r+1$. Тогда

$$P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r, k) = \frac{(-1)^j (k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j} (1/2)_j r^{[j]} (\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j} (k+r-2j+\alpha+3/2)_j (2j)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$, тогда, полагая $a = \alpha - r$, мы можем воспользоваться формулой (3.10). Поскольку при $j \geq r + 1$ выполняется равенство $(a - \alpha)_j = (-r)_j = 0$, то из (3.10) мы имеем

$$P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \frac{P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(1)}{P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(1)} \frac{(k+r)!(\alpha+1)_{k+r-2j}(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j)!(2j)!(\alpha-r+1)_{k+r-2j}} \times \\ \frac{(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} = \\ \frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 3.1 в случае $\alpha > r - 1$. Но поскольку $P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, λ_j^α и $P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x)$ представляют собой аналитические функции относительно α , то утверждение леммы 3.1 вытекает из уже доказанного случая.

ЛЕММА 3.2. Пусть k, r — целые, $r \geq 1$, $k \geq r + 1$. Тогда

$$P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^{-\frac{1}{2}}(k, r) P_{k+r-2j}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x),$$

где

$$\lambda_j^{-\frac{1}{2}}(k, r) = \frac{(-1)^j(k-r)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(k-1/2)^{[j]}}{(k+r-2j)_{k+r-2j}(k+r-2j+1)_j(2j)!} = \\ (-1)^j \frac{((k+r-2j)!)^2 2^{2k+2r-4j}}{(2(k+r-2j))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \frac{r^{[j]}}{j!} \frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедиться в справедливости утверждения леммы 3.2 достаточно в лемме 3.1 взять $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — полином Чебышева первого рода. Тогда [29]

$$P_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} T_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} T_n(x) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (1 + \sigma_n) T_n(x) \quad (\sigma_n = O(1/n)); \quad (3.12)$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 3.3. Пусть k, r — целые, $r \geq 1$, $k \geq r + 1$. Тогда

$$P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \sum_{j=0}^r \frac{(-1)^j}{j!} \frac{r^{[j]} k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}} T_{k+r-2j}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 3.3 непосредственно вытекает из леммы 3.2 и равенств (3.12) и (3.11).

Пусть α и β – произвольные вещественные числа,

$$s(\theta) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_n = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Тогда для $0 < \theta < \pi$ имеет место асимптотическая формула

$$P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta) = n^{-\frac{1}{2}} s(\theta) \left(\cos(\lambda_n \theta + \gamma) + \frac{v_n(\theta)}{n \sin \theta} \right), \quad (3.13)$$

в которой для функции $v_n(\theta) = v_n(\theta; \alpha, \beta)$ справедлива оценка

$$|v_n(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, \delta) \quad \left(0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n} \right). \quad (3.14)$$

4. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные полиномами Якоби

Из равенства (3.2) следует, что если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы

$$p_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{P_n^{\alpha, \beta}(x)}{\sqrt{h_n^{\alpha, \beta}}} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.1)$$

образуют ортонормированную в $L_\kappa^2(-1, 1)$ с весом $\kappa(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ систему. Как хорошо известно [29], система полиномов Якоби (4.1) полна в $L_\kappa^2(-1, 1)$. Эта система порождает на $[-1, 1]$ систему полиномов $p_{r,k}^{\alpha, \beta}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), определенных равенствами (1.4) и (1.5). Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha, \beta > -1$. Тогда система полиномов $\{p_{r,k}^{\alpha, \beta}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой ортонормированных полиномов Якоби (4.1) посредством равенств (1.4) и (1.5), полна в $W_{L_\kappa^2(-1,1)}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (1.3).

Ряд Фурье (1.14) для системы $\{p_{r,k}^{\alpha, \beta}(x)\}_{k=0}^\infty$ приобретает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty \hat{f}_{r,k} p_{r,k}^{\alpha, \beta}(x), \quad (4.2)$$

где

$$\hat{f}_{r,k} = \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) p_{k-r}^{\alpha, \beta}(t) \kappa(t) dt. \quad (4.3)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $-1 < \alpha, \beta < 1$. Тогда, если $f(x) \in W_{L_\kappa^2(-1,1)}^r$, то ряд Фурье (смешанный ряд) (4.5) сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $-1 < \alpha, \beta < 1$, то $\frac{1}{\kappa(x)} \in L(-1, 1)$, где $\kappa(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Поэтому утверждение следствия 2 вытекает из теоремы 2 и следствия 1.

При исследовании дальнейших (более глубоких) аппроксимативных свойств частичных сумм смешанного ряда (4.5) возникает задача об асимптотических свойствах полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$. С этой целью мы перейдем к получению некоторых представлений для этих полиномов.

ТЕОРЕМА 3. Для произвольных $\alpha, \beta > -1$ и $n \geq 0$ имеет место следующее равенство

$$p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n 2^r}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta}}} \binom{n+\beta}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\beta+1)_k (k+r)!} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{k+r}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством (3.7) и запишем

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(-x) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k! (\beta+1)_k} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k,$$

поэтому, в силу (4.1) имеем

$$p_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta}}} \binom{n+\beta}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k! (\beta+1)_k} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k. \quad (4.5)$$

С другой стороны в силу формулы Тейлора

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{k+r} = \frac{(k+r)^{[r]}}{2^r (r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \left(\frac{1+t}{2}\right)^k dt. \quad (4.6)$$

Сопоставляя (4.5) и (4.6) с (1.5), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 3.

Равенство (4.4), установленное в теореме 3, играет важную роль при исследовании асимптотических свойств полиномов $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$ в окрестности точки $x = -1$. Если же $-1 + \varepsilon \leq x$, то формула (4.4) становится не пригодной для изучения асимптотического поведения полиномов $p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x)$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому возникает задача найти иные представления для этих полиномов, которые могли бы быть использованы для исследования их поведения при $n \rightarrow \infty$ в том случае, когда точка x не находится в непосредственной близости от -1 . Мы перейдем теперь к рассмотрению этого вопроса. Пусть $\lambda = \alpha + \beta$. Тогда если $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (3.5) и записать

$$P_k^{\alpha,\beta}(t) = \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t). \quad (4.7)$$

Заметим, что если $-1 < \alpha, \beta < 1$ и $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, то равенство (4.7) справедливо при всех $k = 0, 1, \dots$. Если $k \geq r - \lambda$, то, очевидно, $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$ и для таких k мы можем снова воспользоваться равенством (4.7). Наконец, если одно из

чисел α или β целое, а другое дробно, то $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$ для всех $k = 0, 1, \dots$ и опять верна формула (4.7). Итак, пусть $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$, тогда в силу (4.7)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha, \beta}(t) dt = \\ & \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(t) dt = \\ & \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(1+x)^\nu}{\nu!} \left\{ P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далее, в силу (3.5)

$$\left\{ P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)} = \frac{(k+\lambda-r+1)_\nu}{2^\nu} P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r, \beta+\nu-r}(t), \quad (4.9)$$

а из (3.9) имеем

$$\begin{aligned} P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r, \beta+\nu-r}(-1) &= (-1)^{k+r-\nu} \binom{k+\beta}{k+r-\nu} = \\ &= \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из (4.9) и (4.10) находим

$$\left\{ P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)! 2^\nu} = A_{\nu, k, r}^{\alpha, \beta}. \quad (4.11)$$

Сопоставляя (4.8) и (4.11) мы можем записать

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha, \beta}(t) dt = \\ & \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu, k, r}^{\alpha, \beta}}{\nu!} (1+x)^\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из (4.1), (1.5) и (4.12) мы выводим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\lambda = \alpha + \beta$. Тогда при условии $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$ имеет место следующее равенство

$$p_{r, r+k}^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k^{\alpha, \beta}}} \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu, k, r}^{\alpha, \beta}}{\nu!} (1+x)^\nu \right], \quad (4.13)$$

в котором числа $A_{\nu, k, r}^{\alpha, \beta}$ определены равенством (4.11).

Замечание 1. Выражения, аналогичные тем, которые фигурируют в правой части равенства (4.13), впервые появились в работах [21], [25], [26] в связи исследованием задачи об аппроксимативных свойствах смешанных рядов (4.5) по общим полиномам Якоби $P_k^{\alpha, \beta}(x)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

4.1. Полиномы, порожденные полиномами Якоби $p_k^{\alpha,0}(x)$. Пусть $\beta = 0$, α – дробное. Тогда, во-первых $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$ для всех $k \geq 0$, во-вторых из (4.11) следует, что $A_{\nu,k,r}^{\alpha,0} = 0$ при всех $\nu = 0, 1, \dots, r-1$, поэтому равенство (4.13) можно переписать так

$$p_{r,r+k}^{\alpha,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k^{\alpha,0}}} \frac{2^r}{(k + \alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r,-r}(x) \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (4.14)$$

С учетом свойства (3.6) этому равенству можно придать также следующий вид

$$p_{r,r+k}^{\alpha,0}(x) = \frac{(1+x)^r P_k^{\alpha-r,r}(x)}{(k+r)^{[r]} \sqrt{h_k^{\alpha,0}}}, \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (4.15)$$

Соответствующий ряд Фурье (смешанный ряд) (4.2) принимает в рассматриваемом случае следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{(1+x)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \frac{2^r \hat{f}_{r,k} P_k^{\alpha-r,-r}(x)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}} (k + \alpha - r)^{[r]}} \quad (4.16)$$

или, что то же,

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{(1+x)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\hat{f}_{r,k} (1+x)^r P_{k-r}^{\alpha-r,r}(x)}{k^{[r]} \sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}}, \quad (4.17)$$

где, в силу (4.6)

$$\hat{f}_{r,k} = \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) \frac{P_{k-r}^{\alpha,0}(t)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}} (1-t)^{\alpha} dt. \quad (4.18)$$

4.2. Полиномы, порожденные полиномами Лежандра $p_n^{0,0}(x)$. Рассмотрим ортогональные по Соболеву полиномы $p_{r,n}^{0,0}(x)$, порожденные полиномами *Лежандра*. С этой целью положим $\beta = \alpha = 0$. Тогда $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$ для всех $k \geq r$, а из (4.11) следует, что $A_{\nu,k,r}^{0,0} = 0$ при всех $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Поэтому

$$p_{r,r+k}^{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k^{0,0}}} \frac{2^r}{k^{[r]}} P_{k+r}^{-r,-r}(x) \quad (k = r, r+1, \dots). \quad (4.19)$$

Если мы обратимся к равенству (3.6), то можем записать

$$P_{k+r}^{-r,-r}(x) = \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^{2r}} P_{k-r}^{r,r}(x) \quad (k = r, r+1, \dots). \quad (4.20)$$

Из (4.19) и (4.20) имеем

$$p_{r,r+k}^{0,0}(x) = \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r k^{[r]} \sqrt{h_k^{0,0}}} P_{k-r}^{r,r}(x) \quad (k = r, r+1, \dots). \quad (4.21)$$

Соответствующий этому случаю ряд Фурье по полиномам $p_{r,k}^{0,0}(x)$, ортогональным по Соболеву (или, что то же, *смешанный ряд по полиномам Лежандра*), приобретает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{2r-1} \hat{f}_{r,k} p_{r,k}^{0,0}(x) + \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=2r}^{\infty} \frac{\hat{f}_{r,k} P_{k-2r}^{r,r}(x)}{(k-r)^{[r]} \sqrt{h_{k-r}^{0,0}}}. \quad (4.22)$$

В связи с представлением (4.22) отметим следующие равенства, вытекающие из теоремы 4 при $r = 1$ и $r = 2$:

$$p_{1,1}^{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+x) \quad (r=1); \quad (4.23)$$

$$p_{2,2}^{0,0}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+x)^2, \quad p_{2,3}^{0,0}(x) = \frac{1}{2\sqrt{6}}(1+x)^2(x-2) \quad (r=2). \quad (4.24)$$

Аппроксимативные свойства частичных сумм ряда (4.22) были весьма подробно исследованы в работах автора [19] – [24].

5. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные полиномами Чебышева первого рода

В настоящем разделе мы отдельно и, большей частью, независимо от предыдущего раздела, исследуем полиномы $T_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), ортогональные по Соболеву, порожденные полиномами Чебышева первого рода. Дело заключается в том, что доказательство специфических свойств полиномов $T_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), опираясь на результаты §4, менее удобно и занимает почти столько же места, сколько уходит на их непосредственное доказательство, опираясь лишь на сведения, содержащиеся в §§ 2 и 3.

Полиномы Чебышева

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

образуют ортонормированную в $L_{\mu}^2(-1, 1)$ с весом $\mu(x) = \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ систему. Как хорошо известно [29], система полиномов Чебышева (5.1) полна в $L_{\mu}^2(-1, 1)$. Эта система порождает на $[-1, 1]$ систему полиномов $T_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), определенных равенствами

$$T_{r,k}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (5.2)$$

$$T_{r,r}(x) = \frac{(x+1)^r}{\sqrt{2}r!}, \quad T_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} T_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой ортонормированных полиномов Чебышева (5.1) посредством равенств (5.2) и (5.3), полна в $W_{L_{\mu}^2(-1,1)}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\mu(t)dt. \quad (5.4)$$

Ряд Фурье (1.7) для системы $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ приобретает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_{r,k} T_{r,k}(x), \quad (5.5)$$

где

$$\hat{f}_{r,r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t)\mu(t)dt, \quad \hat{f}_{r,r+j} = \int_{-1}^1 f^{(r)}(t)T_j(t)\mu(t)dt \quad (j \geq 1). \quad (5.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $f(x) \in W_{L_{\mu}^2(-1,1)}^r$, то ряд Фурье (смешанный ряд) (5.5) сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\frac{1}{\mu(x)} \in L(-1, 1)$, то утверждение следствия 4 вытекает из теоремы 2 и следствия 3.

Рассмотрим дальнейшие свойства полиномов $T_{r,k}(x)$. Пусть $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Тогда $\lambda = \alpha + \beta = -1$ и если $(k-1)^{[r]} \neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (3.5) и записать

$$P_k^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(t) = \frac{2^r}{(k-1)^{[r]}} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(t). \quad (5.7)$$

Если $k \geq r+1$, то, очевидно, $(k-1)^{[r]} \neq 0$ и для таких k мы можем воспользоваться равенством (5.7). Итак, пусть $(k-1)^{[r]} \neq 0$. Тогда в силу (5.7)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(t) dt = \\ & \frac{2^r}{(k-1)^{[r]}} \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(t) dt = \\ & \frac{2^r}{(k-1)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(1+x)^{\nu}}{\nu!} \left\{ P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Далее, в силу (3.5)

$$\left\{ P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(t) \right\}^{(\nu)} = \frac{(k-r)_{\nu}}{2^{\nu}} P_{k+r-\nu}^{-\frac{1}{2}+\nu-r, -\frac{1}{2}+\nu-r}(t), \quad (5.9)$$

а из (3.9) имеем

$$P_{k+r-\nu}^{-\frac{1}{2}+\nu-r, -\frac{1}{2}+\nu-r}(-1) = (-1)^{k+r-\nu} \binom{k-\frac{1}{2}}{k+r-\nu} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu-r+\frac{1}{2})(k+r-\nu)!}. \quad (5.10)$$

Из (5.9) и (5.10) находим

$$\left\{ P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\frac{1}{2})(k-r)_{\nu}}{\Gamma(\nu-r+\frac{1}{2})(k+r-\nu)! 2^{\nu}} = A_{\nu, k, r}. \quad (5.11)$$

Сопоставляя (5.8) и (5.11) мы можем записать

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(t) dt = \\ & \frac{2^r}{(k-1)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu, k, r}}{\nu!} (1+x)^{\nu} \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из (5.12), (3.12) и (5.3) имеем

$$\begin{aligned} T_{r, r+k}(x) &= \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} T_k(t) dt = \\ & \frac{2^{2k} k!^2}{(2k)!(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(t) dt = \\ & \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu, k, r}}{\nu!} (1+x)^{\nu} \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

где в силу (5.11) и равенств

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2z)}{\Gamma(z)2^{2z-1}}$$

для $k \geq r+1$ находим

$$\begin{aligned} A_{\nu, k, r} &= \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+1/2)(k-r)_{\nu}}{\Gamma(\nu-r+1/2)(k+r-\nu)! 2^{\nu}} \\ &= \frac{(-1)^k \Gamma(k+1/2)(k-r)_{\nu} \Gamma(r-\nu+1/2)}{\pi(k+r-\nu)! 2^{\nu}} = \\ &= \frac{(-1)^k (2k-1)!(2(r-\nu)-1)!(k-r)_{\nu}}{(k-1)!(r-\nu-1)!(k+r-\nu)! 2^{2(k+r-1)-\nu}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Таким образом, при $k \geq r + 1$ мы получаем следующее представление

$$T_{r,r+k}(x) = \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!} (1+x)^\nu \right]. \quad (5.15)$$

Теперь обратимся к лемме 3.3, из которой выводим

$$\frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}} P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \frac{kT_{k+r-2j}(x)}{2^r (k+r-j)^{[r+1]}}. \quad (5.16)$$

Сопоставляя (5.15) и (5.16), мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5. *Если $k \geq r + 1$, то*

$$T_{r,r+k}(x) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{(-1)^j kT_{k+r-2j}(x)}{2^r (k+r-j)^{[r+1]}} - \frac{k!^2 2^{r+2k}}{(2k)! (k-1)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!} (1+x)^\nu. \quad (5.17)$$

Рассмотрим два важных частных случая, соответствующие значениям $r = 1$ и $r = 2$.

1). Пусть $r = 1$. Тогда из (5.14) имеем

$$A_{0,k,1} = \frac{(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)! (k+1)! 2^{2k}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (5.18)$$

Из (5.17) и (5.18) для $k \geq 2$ находим

$$\begin{aligned} T_{1,k+1}(x) &= \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{kT_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}} - \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{2k+1}}{(k-1)} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)! (k+1)! 2^{2k}} \\ &= \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{kT_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}} - \frac{(-1)^k}{k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.2) и (5.3) мы выводим

СЛЕДСТВИЕ 5. *Имеют место равенства*

$$T_{1,k+1}(x) = \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{(-1)^k}{k^2 - 1} \quad (k \geq 2), \quad (5.19)$$

$$T_{1,0}(x) = 1, \quad T_{1,1}(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2}}, \quad T_{1,2}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1). \quad (5.20)$$

2). Для $r = 2$ и $k \geq 3$ из (5.14) и (5.17) имеем

$$A_{0,k,2} = \frac{6(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)! (k+2)! 2^{2(k+1)}}, \quad A_{1,k,2} = \frac{(-1)^k (2k-1)! (k-2)}{(k-1)! (k+1)! 2^{2k+1}},$$

$$T_{2,k+2}(x) = \sum_{j=0}^2 \binom{r}{j} \frac{(-1)^j kT_{k+2-2j}(x)}{2^2 (k+2-j)^{[3]}} - \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{2+2k}}{(k-1)^{[2]}} \sum_{\nu=0}^1 \frac{A_{\nu,k,2}}{\nu!} (1+x)^\nu,$$

поэтому при $k \geq 3$

$$T_{2,k+2}(x) = \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \frac{(-1)^j k T_{k+2-2j}(x)}{4(k+2-j)^{[3]}} - (-1)^k \left[\frac{1+x}{k^2-1} + \frac{3}{(k^2-1)(k^2-4)} \right].$$

Отсюда и из (5.2) и (5.3) мы выводим

СЛЕДСТВИЕ 6. *Имеют место равенства*

$$T_{2,k+2}(x) = \frac{T_{k+2}(x)}{4(k+2)(k+1)} - \frac{T_k(x)}{2(k^2-1)} + \frac{T_{k-2}(x)}{4(k-1)(k-2)} - (-1)^k \left[\frac{1+x}{k^2-1} + \frac{3}{(k^2-1)(k^2-4)} \right] \quad (k \geq 3), \quad (5.21)$$

$$T_{2,0}(x) = 1, \quad T_{2,1}(x) = 1+x, \quad T_{2,2}(x) = \frac{(1+x)^2}{2\sqrt{2}}, \quad (5.22)$$

$$T_{2,3}(x) = \frac{1}{6}(x-2)(x+1)^2, \quad T_{2,4}(x) = \frac{1}{6}x(x-2)(x+1)^2. \quad (5.23)$$

Рассмотрим дальнейшие свойства полиномов $T_{r,k}(x)$. С этой целью установим их связь с полиномами $p_{r,k}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x)$, определенными равенством (1.5). В силу (3.12), (5.3) и (4.1) имеем

$$T_{r,r+n}(x) = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n)!} \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(t) dt = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n)!} \frac{\sqrt{h_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}}}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} p_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(t) dt = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n)!} \sqrt{h_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}} p_{r,r+n}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x). \quad (5.24)$$

Обратимся теперь к теореме 4, из которой следует равенство

$$p_{r,n+r}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n 2^r}{\sqrt{h_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}}} \binom{n - \frac{1}{2}}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k}{(\frac{1}{2})_k (k+r)!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{k+r}. \quad (5.25)$$

Сопоставляя (5.24) и (5.26) и учитывая, что $\binom{n - \frac{1}{2}}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2 2^{2n}}$, мы приходим к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 7. *При $n \geq 1$ имеет место равенство*

$$T_{r,n+r}(x) = (-1)^n 2^r \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n)_k}{(\frac{1}{2})_k (k+r)!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{k+r}. \quad (5.26)$$

6. Асимптотические свойства полиномов $p_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$

Результаты, полученные в предыдущих разделах мы применим здесь к исследованию поведения полиномов $p_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ при $n \rightarrow \infty$, а $x \in \mathbb{C}$. Мы начнем со случая, когда x находится в непосредственной близости от точки -1 .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $a > 0$, $\alpha, \beta > -1$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta}}} \binom{n+\beta}{n} (1+x)^r \left(\frac{1}{r!} + v_{r,n}^{\alpha,\beta}(x) \right), \quad (6.1)$$

в которой для остаточного члена $v_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ при $|1+x| \leq \frac{a}{n^2}$ имеет место оценка

$$|v_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(a, r, \alpha, \beta) n^2 |1+x|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к теореме 4 и перепишем равенство (4.4) в следующем виде

$$p_{r,n+r}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta}}} \binom{n+\beta}{n} (1+x)^r \left(\frac{1}{r!} + v_{r,n}^{\alpha,\beta}(x) \right), \quad (6.2)$$

где

$$v_{r,n}^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\beta+1)_k (k+r)!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^k. \quad (6.3)$$

Оценим $v_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ при $|1+x| \leq \frac{a}{n^2}$. Из (6.3) имеем

$$\begin{aligned} |v_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\beta+1)_k (k+r)!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^k \right| \leq \\ &c(r, \alpha, \beta) n^2 |1+x| \sum_{k=1}^n \frac{(n^2 |1+x|)^{k-1}}{(\beta+1)_k (k+r)!} \leq \\ &c(r, \alpha, \beta) n^2 |1+x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(\beta+1)_k (k+r)!} \leq c(a, r, \alpha, \beta) n^2 |1+x|. \end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

Перейдем к случаю, когда $-1 + \frac{a}{n^2} \leq x \leq 1 - \frac{a}{n^2}$ ($a > 0$). При этом мы ограничимся рассмотрением двух характерных значений величины r , а именно: $r = 1$ и $r = 2$. Из равенства (4.13) (теорема 5) при $r = 1$ имеем

$$p_{1,n+1}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta}}} \frac{2}{n+\lambda} \left[P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}(x) - A_{0,n,1}^{\alpha,\beta} \right], \quad (6.4)$$

где

$$A_{0,n,1}^{\alpha,\beta} = P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}(-1) = \frac{(-1)^{n+1} \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta) \Gamma(n+2)}.$$

Обратимся теперь к асимптотической формуле (3.13) и запишем

$$P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}(\cos \theta) = (n+1)^{-\frac{1}{2}} \hat{s}(\theta) \left(\cos(\hat{\lambda}_n \theta + \hat{\gamma}) + \frac{\hat{v}_n(\theta)}{(n+1) \sin \theta} \right), \quad (6.5)$$

где

$$\hat{s}(\theta) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha+\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta+\frac{1}{2}},$$

$$\hat{\lambda}_n = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \hat{\gamma} = -\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2},$$

а для функции $\hat{v}_n(\theta)$ при $0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n}$ справедлива оценка

$$|\hat{v}_n(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, \delta). \quad (6.6)$$

Перепишем равенство (6.5) в следующем виде

$$P_{n+1}^{\alpha-1, \beta-1}(\cos \theta) = \frac{\hat{s}(\theta)}{\sqrt{n+1}} \cos(\hat{\lambda}_n \theta + \hat{\gamma}) + \frac{\hat{v}_n(\theta) \hat{s}(\theta)}{(n+1)^{\frac{3}{2}} \sin \theta}. \quad (6.7)$$

Сопоставляя (6.4) с (6.7), мы можем сформулировать следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $0 < \theta < \pi$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$p_{1,n+1}^{\alpha, \beta}(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{h_n^{\alpha, \beta}}} \frac{2}{n + \alpha + \beta} \left[\frac{\hat{s}(\theta)}{\sqrt{n+1}} \cos(\hat{\lambda}_n \theta + \hat{\gamma}) - A_{0,n,1}^{\alpha, \beta} + \hat{w}_n(\theta) \right], \quad (6.8)$$

где

$$w_n(\theta) = \frac{\hat{v}_n(\theta) \hat{s}(\theta)}{(n+1)^{\frac{3}{2}} \sin \theta}, \quad (6.9)$$

а для $\hat{v}_n(\theta)$ при $0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n}$ справедлива оценка (6.6).

При $r = 2$ теорема 4 дает (равенство (4.13))

$$p_{2,n+2}^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n^{\alpha, \beta}}} \frac{4}{(n + \lambda)^{[2]}} \left[P_{n+2}^{\alpha-2, \beta-2}(x) - A_{0,n,2}^{\alpha, \beta} - A_{1,n,2}^{\alpha, \beta}(1 + x) \right], \quad (6.10)$$

где

$$A_{0,n,2}^{\alpha, \beta} = \frac{(-1)^{n+2} \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta - 1) \Gamma(n + 3)},$$

$$A_{1,n,2}^{\alpha, \beta} = \frac{(-1)^{n+1} \Gamma(n + \beta + 1)(n + \lambda - 1)}{2\Gamma(\beta) \Gamma(n + 2)}.$$

Из асимптотической формулы (3.13) имеем

$$P_{n+2}^{\alpha-2, \beta-2}(\cos \theta) = (n+2)^{-\frac{1}{2}} \tilde{s}(\theta) \cos(\tilde{\lambda}_n \theta + \tilde{\gamma}) + \frac{\tilde{v}_n(\theta) \tilde{s}(\theta)}{(n+2)^{\frac{3}{2}} \sin \theta}, \quad (6.11)$$

где

$$\tilde{s}(\theta) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha + \frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta + \frac{3}{2}},$$

$$\tilde{\lambda}_n = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \tilde{\gamma} = -\left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{2},$$

Теперь мы можем сформулировать следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $0 < \theta < \pi$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$p_{2,n+2}^{\alpha,\beta}(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta}}} \frac{2}{(n + \alpha + \beta)^{[2]}} \times \\ \left[\frac{\tilde{s}(\theta)}{\sqrt{n+2}} \cos(\tilde{\lambda}_n \theta + \tilde{\gamma}) - A_{1,n,2}^{\alpha,\beta} (1 + \cos \theta) + \tilde{w}_n(\theta) \right], \quad (6.12)$$

где

$$\tilde{w}_n(\theta) = \frac{\tilde{v}_n(\theta) \tilde{s}(\theta)}{(n+2)^{\frac{3}{2}} \sin \theta} - A_{0,n,2}^{\alpha,\beta}, \quad (6.13)$$

а для $\tilde{v}_n(\theta)$ при $0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n}$ справедлива оценка $|\tilde{v}_n(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, \delta)$.

Наконец, рассмотрим случай $|1 - x| \leq \frac{a}{n^2}$. Нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА 6.1. Пусть $a > 0$, $r \geq 1$, α, β – произвольные вещественные числа. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$P_{n+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x) = \binom{n+\alpha}{n+r} (1 + q_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)), \quad (6.14)$$

в которой для остаточного члена $q_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ при $|1 - x| \leq \frac{a}{n^2}$ имеет место оценка

$$|q_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta, a, r) n^2 |1 - x|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость этого утверждения непосредственно выводится из равенства (3.7), почти дословно повторяя рассуждения, использованные нами при доказательстве теоремы 6.

ЛЕММА 6.2. Пусть $a > 0$, α, β – произвольные вещественные числа. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,n,r}^{\alpha,\beta}}{\nu!} (1+x)^\nu = (-1)^{n+1} \binom{n+\beta}{n+1} \frac{(1+x)^{r-1}}{(r-1)!} (1 + h_{r,n}(x)), \quad (6.15)$$

в которой для остаточного члена $h_{r,n}(x) = h_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ при $|1 - x| \leq \frac{a}{n^2}$ имеет место оценка

$$|h_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta, a, r) n^{-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение непосредственно вытекает из равенства (4.11).

Из теоремы 6 и лемм 6.1 и 6.2 мы выводим следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\lambda = \alpha + \beta$. Тогда если $(n + \lambda)^{[r]} \neq 0$, то имеет место асимптотическая формула

$$p_{r,r+n}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta}}} \frac{2^r}{(n + \lambda)^{[r]}} \times \\ \left[\binom{n+\alpha}{n+r} (1 + q_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)) + (-1)^n \binom{n+\beta}{n+1} \frac{(1+x)^{r-1}}{(r-1)!} (1 + h_{r,n}(x)) \right], \quad (6.16)$$

в которой для остаточных членов $q_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)$ и $h_{r,n}(x)$ при $|1-x| \leq \frac{a}{n^2}$ справедливо оценки

$$|q_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta, a, r)n^2|1-x|, \quad |h_{r,n}^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta, a, r)n^{-2}.$$

Список литературы

- [1] Kwon K.H. and Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Issue 2. Pp. 289–303.
- [2] Kwon K.H. and Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. Pp. 547–594.
- [3] Marcellan F., Alfaro M. and Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. North-Holland. 1993. Vol. 48. Pp. 113–131.
- [4] Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P. and Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // Journal of Approximation Theory. 1991. Vol. 65. Pp. 151–175.
- [5] Meijer H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // Journal of Approximation Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.
- [6] Lopez G. Marcellan F. Vanassche W. Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constructive Approximation. 1995. Vol. 11. Issue 1. Pp. 107–137.
- [7] Marcellan F. and Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015 Vol. 33. Issue 3. Pp. 308–352.
- [8] Шарапудинов И.И. Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» Саратов: ООО «Издательство «Научная книга». 2016. С. 329–332.
- [9] Гончар А. А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Математический сборник. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 607–629.
- [10] Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia: SIAM. 2000.
- [11] Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University. 1996.
- [12] Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. Москва: Машиностроение. 1986.
- [13] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. Москва: Наука. 1983.
- [14] Арушанян О.Б., Волченкова Н.И., Залеткин С.Ф. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сиб. электрон. матем. изв. 1983. Т. 7. С. 122–131.
- [15] Арушанян О.Б., Волченкова Н.И., Залеткин С.Ф. Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Выч. мет. программирования. 2013. Том 14, вып 2. С. 203–214.
- [16] Арушанян О.Б., Волченкова Н.И., Залеткин С.Ф. Применение рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Т. 11. С. 517–531.
- [17] Лукомский Д.С., Терехин П.А. Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные

- проблемы теории функций и их приложения». Саратов: ООО «Издательство «Научная книга». 2016. С. 171–173.
- [18] Магомед-Касумов М.Г. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов: ООО «Издательство «Научная книга». 2016. С. 176–178.
- [19] Шарапудинов И.И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 5. С. 143–160.
- [20] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математические заметки. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 765–795.
- [21] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: Издательство Дагестанского научного центра. 2004. С. 1–176.
- [22] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. 2005. Т. 78, вып. 3. С. 442–465.
- [23] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 3. С. 135–154.
- [24] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Математические заметки. 2008. Т. 84, вып. 3. С. 452–471.
- [25] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Математический сборник. 2003. Т. 194, № 3. С. 115–148.
- [26] Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Математические заметки. 2010. Т. 88, вып. 1. С. 116–147.
- [27] Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства g -кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.
- [28] Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Математический сборник. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 607–629.
- [29] Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва: Физматгиз. 1962.
- [30] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва: Физматгиз. 2001. Т. 2. 810 с.
- [31] Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по общим полиномам Лагерра и ряды Фурье по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Т. 4. С. 31–73.
- [32] Gasper G. Positivity and special function // Theory and appl. Spec. Funct. Edited by Richard A. Askey. 1975. Pp. 375–433.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН
Дагестанский государственный педагогический
университет
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию
27.06.2016