УДК 517.956.4

М. М. Зайнулабидов, З. М. Зайнулабидова

Об уравнениях типа Бюргерса и Кортевега-де Фриза для функций трех переменных

Настоящая статья посвящена рассмотрению двумерных аналогов для известных в математической физике уравнений Бюргерса и Кортевега-де Фриза, для которых по аналогии с понятием «одномерное уравнение теплопроводности» можно применить термин «одномерные уравнения».

Библиография: 5 названий.

This paper is devoted to the consideration of two-dimensional analogs for known in mathematical physics equations of Burgers and Korteweg-de Vries, for which by analogy with the concept of «one-dimensional heat equation» we can use the term «one-dimensional equations».

Bibliography: 5 items.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение теплопроводности.

Keywords: Burgers equation, Korteweg-de Vries equation, heat equation.

Введение

Достаточно весома роль нелинейных уравнений Бюргерса

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} = 0 \tag{0.1}$$

и Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{0.2}$$

в теории уравнений математической физики [1].

Если смотреть на (0.1) и (0.2) как на нелинейные одномерные уравнения относительно функции $u(x,t)$ двух переменных типа линейного уравнения теплопроводности $u_t - a^2 u_{xx} = 0$, то возникает проблема поиска и исследования их двумерных аналогов типа двумерного уравнения теплопроводности $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$.

Решению этой проблемы посвящена настоящая статья.

1. Материалы и результаты исследования

На оператор u_{xx} можно смотреть и как на оператор параболического типа функции $u(x, y, t)$, и как на оператор, получаемый из операторов Лапласа $u_{xx} + u_{yy}$ и Даламбера $u_{xx} - u_{yy}$ в случае $y = const$.

По этой причине двумерные аналоги (0.1) могут быть трех типов.

Рассмотрим уравнения

$$u_t + u(u_x + u_y) + \beta(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) = 0, \tag{1.1}$$

$$u_t + u_x u_y + \beta u_{xy} = 0, \tag{1.2}$$

относительно действительной функции $u = u(x, y, t)$ и уравнение

$$w_t + w_z w_{\overline{z}} + \beta w_{z\overline{z}} = 0, \tag{1.3}$$

относительно комплексной функции $w = w(z, \overline{z}, t) = u(x, y, t) + iv(x, y, t)$, где $z = x + \imath y$, $\overline{z} = x - iy$, $2w_z = w_x - iw_y$, $2w_{\overline{z}} = w_x + iw_y$.

На (1.1) и (1.2) можно смотреть как на двумерные уравнения Бюргерса с операторами параболического и гиперболического типов в главных частях соответственно, так как (1.1) при $y = const$ совпадает с (0.1), а (1.2) при $y = x$ принимает вид $u_t + u_x^2 + \beta u_{xx} = 0$, который, как отмечено в [2, 3] является другой формой записи одномерного уравнения Бюргерса.

Уравнение (1.3) является комплексным аналогом (1.2), в силу чего оно так же может быть рассмотрено как двумерное уравнение Бюргерса с эллиптическим оператором $w_{z\overline{z}}$ в главной части.

В качестве двумерных уравнений (КдФ) можно рассматривать уравнения

$$u_t + u(u_x + u_y) + \beta(u_{xxx} + 3u_{xxy} + 3u_{xyy} + u_{yyy}) = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + \beta u_{xxy}) + 6u_{xx}u_{xy} - u_x u_{xxy} + u_y u_{xxx} + \frac{2}{\beta}u_x(u_{xx}u_y - u_{xy}u_x = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(w_t + \beta\, w_{zz\overline{z}}) + 6\, w_{zz}\, w_{z\overline{z}} - w_z\, w_{zz\overline{z}} + w_{\overline{z}}\, w_{zzz} +$$
$$\frac{2}{\beta}\, w_z(w_{zz}\, w_{\overline{z}} - w_{z\overline{z}}\, w_z) = 0, \tag{1.6}$$

где u – действительная функция, а w – комплексная функция, такая же, что и в (1.3).

В самом деле, при $y = const$ уравнение (1.4) совпадает (0.2); при $y = x$ уравнение (1.5) принимает вид $\frac{\partial}{\partial x}(u_t + \beta u_{xxx}) + 6u_{xx}^2 = 0$, отмеченный в [2, 3] как другой вариант записи уравнения (КдФ); уравнение же (1.6) является комплексным аналогом (1.5).

Наряду (1.5) и (1.6) представляет интерес исследовать их упрощенные варианты

$$u_t + 2u_x u_{xy} + u_y u_{xx} + \frac{1}{\beta}u_x^2 u_y + \beta u_{xxy} = 0, \tag{1.7}$$

$$w_t + 2\, w_z\, w_{z\overline{z}} + w_{\overline{z}}\, w_{zz} + \frac{1}{\beta}\, w_z^2\, w_{\overline{z}} + \beta\, w_{zz\overline{z}} = 0, \tag{1.8}$$

поскольку (1.7) при $y = x$ совпадает с изученным в [3] упрощенным вариантом уравнения (КдФ), а (1.8) является комплексным аналогом (1.7).

Непосредственной проверкой можно убедится в том, что уравнения (1.1) и (1.4) в результате замены переменных согласно равенствам $\xi = x - y$, $\eta = y$, $u(x, y, t) = u(\xi + \eta, \eta, t) = v(\xi, \eta, t)$ сводятся к обычным уравнения Бюргерса и (КдФ) относительно функции $v(\xi, \eta, t)$ по независимой переменной η, где переменная ξ играет роль параметра.

Поэтому исследование (1.7), (1.8) не вызывает трудностей.

Как показано в [4], решение $u(x, y, t)$ уравнения (1.2) представимо в виде

$$u(x, y, t) = v[\varphi(x, y, t)], \tag{1.9}$$

где $v = v(\varphi)$ решение нелинейного дифференциального уравнения

$$\beta v''(\varphi) + [v'(\varphi)]^2 = 0, \tag{1.10}$$

а $\varphi(x, y, t)$ – решение линейного уравнения

$$\varphi_t + \beta\, \varphi_{xy} = 0. \tag{1.11}$$

Так как общим решением (1.10) является функция $v(\varphi) = \beta \ln |a\varphi + b|$ где a и b – произвольные действительные постоянные, то для определения решения (1.2) в виде (1.9) остается найти решение (1.11).

В учебной литературе не фиксировано исследование (1.11) при $x \neq y$, хотя оказывается его можно проводить аналогично случаю $x = y$ с незначительными изменениями.

В самом деле, если искать решение (1.11) в виде

$$\varphi(x, y, t) = X(x + y)T(t) \neq 0, \tag{1.12}$$

то получим, что искомые функции $X(x + y)$ и $T(t)$ должны быть нетривиальными решениями соответственно уравнений $X''(x + y) + \lambda^2 X(x + y) = 0$ и $T'(t) - \lambda^2 \beta T(t) = 0$, где λ – произвольная постоянная.

Следовательно, функция

$$\varphi(x, y, t) = [A(\lambda) \cos \lambda(x + y) + B(\lambda) \sin \lambda(x + y)] \exp(\beta \lambda^2 t) \tag{1.13}$$

при любых ограниченных $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ и при $\beta < 0$ является ограниченным решением (1.11) вида (1.12).

В силу (1.13) ясно, что для (1.11) корректно поставленными будут как задача Коши с начальным условием $\varphi(x, y, 0) = f(x + y)$, так и смешанная краевая задача в полосе $0 < x + y < \ell$ с граничными условиями $\varphi(x, -x, t) = \mu_1(x, t)$, $\varphi(x, \ell - x, t) = \mu_2(x, t)$ и их решения можно искать таким же способом, как и для обычного одномерного уравнения теплопроводности.

Для (1.11) можно исследовать и задачу радиального распределения тепла в виде функции $\varphi = \varphi(r, t)$, где $r = \sqrt{|xy|}$.

В самом деле, в результате перехода в (1.11) к переменным r и t получается уравнение $4r\varphi_t + \beta(r\varphi_{rr} + \varphi_r) = 0$, которые при $4a^2 = -\beta$ совпадает с уравнением получаемым при радиальным распределении тепла в бесконечном круговом цилиндре ([5], с. 554).

Таким образом проблема поиска решения (1.2) исчерпывается.

Для нахождения решения (1.3) можно применить тот же метод, что и для (1.2).

Если искать решение (1.3) в виде

$$w = v[\varphi(z,\overline{z},t)], \tag{1.14}$$

где $v(\varphi)$ – действительная функция комплексного переменного, то получим, что $v(\varphi)$ должна быть решением (1.10), а $\varphi(z,\overline{z},t)$ – решением линейного комплексного дифференциального уравнения

$$\varphi_t + \beta\varphi_{z\overline{z}} = 0, \tag{1.15}$$

которое эквивалентно расщепленной системе двух действительных уравнений

$$f_t + \beta(f_{xx} + f_{yy}) = 0,\ g_t + \beta(g_{xx} + g_{yy}) = 0 \tag{1.16}$$

относительно действительной и мнимой частей функции φ, каждое из которых при $\beta < 0$ является обычным двумерным уравнением теплопроводности.

Итак, составляя комплексную функцию $\varphi = f + ig$ из решений f и g уравнений (1.16) и подставляя в (1.11), можно выписать решение (1.3) в виде (1.14).

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что (1.5) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}[u_t + \beta u_{xxy} + 2u_x u_{xy} + u_y u_{xx} + \frac{u_x^2 u_y}{\beta}] - 3u_x^2 \frac{\partial}{\partial x}[\frac{u_{xy}}{u_x} + \frac{u_y}{\beta}] = 0. \tag{1.17}$$

В результате осуществления замены переменной $u(x,y,t)$ согласно (1.9) уравнение (1.17) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}[v'(\varphi)(\varphi_t + \beta\,\varphi_{xxy}) + \varphi_y\,\varphi_x^2[(\psi'(\varphi) + \frac{v'(\varphi)}{\beta}\psi(\varphi)] + (2\,\varphi_x\,\varphi_{xy} + \varphi_y\,\varphi_{xx})\psi(y) -$$

$$3[v'(\varphi)]^2\,\varphi_x^2\,\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\varphi_y\,\psi(y)}{\beta v'(\varphi)} + \frac{\varphi_{xy}}{\varphi_x}] = 0, \tag{1.18}$$

где $\psi(\varphi) = \beta v''(\varphi) + [v'(\varphi)]^2$.

Из (1.18) следует, что если функция $v = v(\varphi) \neq 0$, $v'(\varphi) \neq 0$ является решением (1.10), а $\varphi = \varphi(x,y,t)$, $\varphi_x \neq 0$ является решением одновременно двух уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_{xy}}{\varphi_x}\right) = 0,\ \varphi_t + \beta\varphi_{xxy} = 0, \tag{1.19}$$

то решение $u(x,y,t)$ уравнения (1.17) и, стало быть, (1.5) определяется равенством (1.9).

Легко проверить, что всякое ненулевое решение $\varphi(x,y,t)$ первого уравнения из (1.19) представимо в виде

$$\varphi(x,y,t) = A(x,t)expB(y,t) + C(y,t), \tag{1.20}$$

где A, B, C – произвольные дифференцируемые функции, причем $A \neq 0$, $A_x \neq 0$.

Требуя от (1.20) удовлетворения второму из уравнений (1.19), получим равенство

$$(A_t + AB_t + \beta A_{xx} B_y) \exp B(y,t) + C_t = 0. \tag{1.21}$$

Из (1.21) следует, что если $C(y,t) = f(y)$ – произвольная функция только переменной y; $B(y,t) = y + d$ – линейная относительно y функция, $A(x,t)$ – решение уравнения теплопроводности $A_t + c\beta A_{xx} = 0$, то функция (1.20) принимает вид

$$\varphi(x,y,t) = A(x,t) \exp(cy + d) + f(y) \tag{1.22}$$

и является одновременно решением обоих уравнений (1.19).

Таким образом, достаточно широкий класс решений уравнения (1.5) определяется равенством (1.9), где $v(\varphi)$ – решение (1.12) уравнения (1.10), $\varphi(x,y,t)$ определяется равенством (1.22), где c и d – произвольные постоянные, $f(y)$ – произвольная функция, $A(x,t)$ – решение одномерного уравнения теплопроводности $A_t + \beta A_{xx}$.

Если искать решение (1.6), переписав его в виде аналогичном (1.17), согласно формуле (1.14), то снова окажется, что функция $v(\varphi)$ должна быть решением (1.10), а функция $\varphi(z, \overline{z}, t)$ – решением комплексных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_{z\overline{z}}}{\varphi_z}\right) = 0, \ \varphi_t + \beta \varphi_{zz\overline{z}} = 0. \tag{1.23}$$

При этом функция $\varphi(z, \overline{z}, t)$ будет иметь вид (1.22), где c и d – комплексные постоянные, φ – комплексная функция, $A(z,t)$ – решение комплексного уравнения $A_t + \beta A_{zz}$=0.

Что касается исследования упрощенных вариантов (1.7) и (1.8) уравнений (1.5) и (1.6), то, очевидно, их решения можно строить таким же образом, что и для (1.5) и (1.6).

Однако при этом искомая функция φ должна быть решением только одного линейного уравнения, совпадающего со вторым из (1.19) для (1.7) и вторым из (1.23) для (1.8).

В заключение обратим внимание на то, что приведенные выше исследования указывают на актуальность самостоятельного изучения линейных уравнений типа $u_t - a^2 u_{xxx} = 0$ и $u_t - a^2 u_{xxy} = 0$ и их комплексных аналогов на предмет поиска корректно поставленных для них краевых и начально-краевых задач.

Список литературы

[1] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М., Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2002. 367 с.

[2] Зайнулабидов М.М., Зайнулабидов Г.М., Зайнулабидова З.М. О некоторых нелинейных уравнениях типа Кортевега-де Фриза // Известия ДГПУ, естественные и точные науки. 2013. №2. С. 6–8.

[3] Зайнулабидов М.М., Зайнулабидова З.М. К теории нелинейных уравнений волновых процессов // Информационные технологии в образовании и науке (ДАГИТО-2014). Вып. 5. Махачкала. 2014. С. 177–179.

[4] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука. 1988. 448 с.

[5] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М. Гос. изд-во ФМЛ. 1962. 767 с.

М. М. Зайнулабидов (M. M. Zainulabidov)
Дагестанский государственный педагогический университет
E-mail: zaynulabidov.mansur@mail.ru

Поступила в редакцию
01.11.2016

З. М. Зайнулабидова (Z. M. Zainulabidova)
Махачкалинский лицей №5
E-mail: zzaynulabidova@mail.ru