УДК 517.538

И. И. Шарапудинов, З. Д. Гаджиева, Р. М. Гаджимирзаев

Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами

Для заданной ортонормированной на (a,b) с весом $\rho(x)$ системы функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и натурального r построена ассоциированная с ней новая система функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированная относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)+\int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt.$$

Исследованы вопросы сходимости ряда Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрены важные частные случаи систем типа $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, для которых получены явные представления, которые могут быть использованы при исследовании асимптотических свойств функций $\varphi_{r,k}(x)$ при $k\to\infty$ и аппроксимативных свойств сумм Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Библиография: 25 названий.

For some natural number r and a given system of functions $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, orthonormal on (a,b) with weight $\rho(x)$, we construct the new system of functions $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, orthonormal with respect to the Sobolev type inner product of the following form

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)+\int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt.$$

The convergence of the Fourier series by the system $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ is investigated. Moreover, we consider some important special cases of systems of such type and obtain explicit representations for them, which can be used in the study of asymptotic properties of functions $\varphi_{r,k}(x)$ when $k\to\infty$ and the approximative properties of Fourier sums by the system $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Bibliography: 25 items.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, ортогональные по Соболеву полиномы, система Хаара, полиномы Якоби, полиномы Чебышева первого рода, полиномы Лагерра, полиномы Эрмита.

Keywords: orthogonal polynomials, Sobolev orthogonal polynomials, Haar system, Jacobi polynomials, Chebyshev polynomials of the first kind, Laguerre polynomials, Hermite polynomials.

Введение

В ряде наших работ [1] – [7] были введены, так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со значениями исходной функции. Общая идея, которая лежит в основе построения смешанных рядов, заключается в следующем. Предположим, что система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована на (a,b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\rho(x)dx = \delta_{kl}, \tag{0.1}$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Через $L^p_\rho(a,b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a,b), для которых

$$\int\limits_a^b |f(x)|^p\rho(x)dx < \infty. \tag{0.2}$$

Если $\rho(x)\equiv 1$, то будем писать $L^p_\rho(a,b) = L^p(a,b)$ и $L(a,b) = L^1(a,b)$. Из (0.1) следует, что $\varphi_k(x)\in L^2_\rho(a,b)$ $(k=0,1,\ldots)$. Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x)\in L(a,b)$ $(k=0,1,\ldots)$. Тогда мы можем определить следующие функции

$$\varphi_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)dt, \quad k=0,1,\ldots. \tag{0.3}$$

Кроме того определим конечный набор функций

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k=0,1,\ldots,r-1. \tag{0.4}$$

Из (0.3) и (0.4) следует, что

$$(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0\leqslant\nu\leqslant r-1,\ r\leqslant k,\\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu=r\leqslant k,\\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu\leqslant k<r,\\ 0, & \text{если } k<\nu\leqslant r. \end{cases} \tag{0.5}$$

Через $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x)\in L^p_\rho(a,b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt. \tag{0.6}$$

Тогда, пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (0.3) и (0.4)) и равенством (0.5) нетрудно увидеть(см. теорему 1), что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. В цитированных выше работах [1] – [7], а также в [8] были рассмотрены некоторые частные случаи ортонормированных систем функций вида $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденных классическими ортонормированными системами Якоби, Лежандра, Чебышева, Лагерра и Хаара. С другой стороны, в последние годы интенсивное развитие получила (см. [9] – [22] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в нескольких заданных точках числовой оси. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a, b), могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a, b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (0.6), рассматриваемое в настоящей работе имеет одну особую точку, а именно, точку a, в окрестности которой «контролируется» поведение функций $\varphi_{r,k}(x)$, ортогональных по Соболеву и порожденных исходной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенства (0.3).

Из (0.3) – (0.6) нетрудно увидеть, что ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ имеет смешанный характер, а, более точно, имеет следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x), \tag{0.7}$$

где

$$f_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)dt, \tag{0.8}$$

поэтому ряды Фурье вида (0.7) будем (следуя [1] – [7]) называть *смешанными рядами* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Отметим некоторые важные свойства смешанного ряда (0.7), непосредственно вытекающие из (0.5). Первое из них связано с дифференциальным свойством смешанного ряда, а именно, если $r > 1$, то в результате почленного дифференцирования смешанного ряда (0.7) мы получим смешанный ряд для производной $f'(x)$, соответствующий случаю, когда вместо r фигурирует $r - 1$, другими словами

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1}\varphi_{r-1,k-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{r,k}\varphi_{r,k}(x))'. \tag{0.9}$$

Второе свойство связано с почленным интегрированием с переменным верхним пределом и имеет вид

$$\int\limits_a^x f'(t)dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1} \int\limits_a^x \varphi_{r-1,k-1}(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x). \tag{0.10}$$

Важное значение имеет свойство смешанного ряда (0.7), которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$Y_{r,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{N} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x) \tag{0.11}$$

при $N \geqslant r$, r-кратно совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = a$, т.е.

$$(Y_{r,N}(f,x))^{(\nu)}_{x=a} = f^{(\nu)}(a) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1). \tag{0.12}$$

Кроме того, из (0.5) и (0.11) следует, что $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$

$$Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x) = \sum_{n=0}^{r-1-\nu} f^{(n+\nu)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} +$$

$$\sum_{n=r-\nu}^{N-\nu} f^{(\nu)}_{r-\nu,n}\varphi_{r-\nu,n}(x) = Y_{r-\nu,N-\nu}(f^{(\nu)},x), \tag{0.13}$$

отсюда, в свою очередь, выводим $(0 \leqslant \nu \leqslant r-2)$

$$f^{(\nu)}(x) - Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x) = \frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-\nu-2}(f^{(r-1)}(t) - Y^{(r-1)}_{r,N}(f,t))dt =$$

$$\frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-\nu-2}(f^{(r-1)}(t) - Y_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t))dt. \tag{0.14}$$

В [1] – [8] было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. При этом отметим, что в работах [1] – [6] основное внимание уделялось исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по ультрасферическим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$, тогда как в работе [7] были найдены условия на параметры α и β, которые обеспечивают равномерную сходимость смешанных рядов по общим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$. В настоящей статье вводятся и исследуются системы функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (0.6) и порожденных системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрена задача о представлении функций $\varphi_{r,k}(x)$, определенных равенством (0.3), в виде, более удобном для исследования их асимптотических свойств при $k \to \infty$. Эта задача решена для функций, ортогональных по Соболеву, порожденных ортонормированными системами Хаара, Якоби, Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита. Упомянутое представление для полиномов $p_{r,r+k}^{\alpha,\beta}(x)$, порожденных ортонормированными полиномами Якоби имеет, например, следующий вид (см. (5.13))

$$p_{r,r+k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k^{\alpha,\beta}}} \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k}}{\nu!}(1+x)^\nu \right].$$

Аналогичные представления получены (см. п. 3, п. 9, п. 11) для функций, ортогональных по Соболеву, порожденных функциями Хаара, полиномами Лагерра и Эрмита.

1. О сходимости смешанных рядов по общим ортонормированным системам

Рассмотрим сначала задачу о полноте в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ системы $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, состоящей из функций, определенных равенствами (0.3) и (0.4).

Теорема 1. *Предположим, что функции $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют полную в $L^2_\rho(a,b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на отрезке $[a,b]$. Тогда система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ посредством равенств (0.3) и (0.4), полна в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (0.6).*

Доказательство. Из равенства (0.3) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)}_{x=a} = 0$, поэтому в силу (0.5), (0.6), имеем

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = \int_a^b (\varphi_{r,k}(x))^{(r)} (\varphi_{r,l}(x))^{(r)} \rho(x) dx =$$

$$\int_a^b \varphi_{k-r}(x) \varphi_{l-r}(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad k, l \geqslant r, \tag{1.1}$$

а из (0.4) и (0.6) имеем

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} (\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)}|_{x=a} (\varphi_{r,l}(x))^{(\nu)}|_{x=a} = \delta_{kl}, \quad k, l < r. \tag{1.2}$$

Очевидно также, что

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k. \tag{1.3}$$

Это означает, что функции $\varphi_{r,k}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (0.6). Остается убедиться в ее полноте в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ и для всех $k = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства $\langle f, \varphi_{r,k} \rangle = 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leqslant r-1$, то $\langle f, \varphi_{r,k} \rangle = f^{(k)}(a)$, поэтому с учетом того, что $\langle f, \varphi_{r,k}\rangle = 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt. \tag{1.4}$$

С другой стороны, для всех $k \geqslant r$ имеем

$$0 = \langle f, \varphi_{r,k}\rangle = \int_a^b f^{(r)}(x)(\varphi_{r,k}(x))^{(r)}\rho(x)dx = \int_a^b f^{(r)}(x)\varphi_{k-r}(x)\rho(x)dx.$$

Отсюда и из того, что $\varphi_m(x)$ $(m = 0, 1, \dots)$ образуют в $L^2_\rho(a, b)$ полную и ортонормированную систему имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$. Поэтому $f(x) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Предположим, что* $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a, b)$, *а функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ *образуют полную в* $L^2_\rho(a, b)$ *ортонормированную с весом* $\rho(x)$ *систему на отрезке* $[a, b]$, $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ *– система, ортонормированная в* $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ *относительно скалярного произведения* (0.6), *порожденная системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ *посредством равенств* (0.3) *и* (0.4). *Тогда, если* $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, *то ряд Фурье (смешанный ряд)* (0.7) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно относительно* $x \in [a, b]$.

Доказательство. Обозначим через $S_n(f^{(r)}) = S_n(f^{(r)}, x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $f^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a, b)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, т.е.

$$S_n(f^{(r)}, x) = \sum_{k=0}^n f_{r,k+r}\varphi_k(x), \tag{1.5}$$

где коэффициенты $f_{r,k+r}$ $(k = 0, 1, \dots)$ определены равенством (0.8). Из условий теоремы 2 следует, что при $n \to \infty$

$$\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_{L^2_\rho(a,b)} \to 0. \tag{1.6}$$

Далее, обозначим через $Y_{r,n+r}(f, x)$ частичную сумму смешанного ряда (0.7) следующего вида

$$Y_{r,n+r}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x), \tag{1.7}$$

и запишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt. \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) имеем

$$f(x) - Y_{r,n+r}(f, x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x). \tag{1.9}$$

Обратимся к равенству (0.3), тогда (1.9) можно переписать так

$$f(x) - Y_{r,n+r}(f,x) =$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1}\sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k}\varphi_{k-r}(t)dt =$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1}[f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)},t)]dt. \tag{1.10}$$

Из (1.10) и неравенства Гельдера имеем

$$|f(x) - Y_{r,n+r}(f,x)| \leqslant$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\left(\int_a^b \frac{|x-t|^{2(r-1)}}{\rho(t)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b [f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)},t)]^2\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.11}$$

Сопоставляя (1.6) с (1.11), убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Ниже мы остановимся на важных частных случаях систем функций, ортогональных по Соболеву относительного скалярного произведения вида (0.6), порожденных некоторыми классическими ортогональными системами такими, например, как системы Хаара, Якоби, Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита и рассмотрим их особенности.

2. Некоторые сведения о системе Хаара

Рассмотрим систему функций $\chi_{r,n}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, ортогональных по Соболеву, порожденных функциями Хаара $\chi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Нам понадобится следующие обозначения [24]. Пусть $n = 2^k + i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$, $\Delta_n = \Delta_k^i = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$, $\bar{\Delta}_n = [\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}]$, $(n \geqslant 2)$, $\Delta_1 = [0,1]$,

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}) = \Delta_{k+1}^{2i-1}, \quad \Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = (\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}) = \Delta_{k+1}^{2i}.$$

Система Хаара - это система функций, $\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, в которой $\chi_0(x) = 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^k < n+1 \leqslant 2^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ определяется так

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \bar{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, & \text{если } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & \text{если } x \in \Delta_n^-. \end{cases} \tag{2.1}$$

Значения в точках разрыва функции $\chi_n(x)$ выбирается так, чтобы выполнялись равенства:

$$\chi_n(x) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}[\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)], \quad x \in (0,1),$$

$$\chi_n(0) = \lim_{\delta\to 0}\chi_n(\delta), \quad \chi_n(1) = \lim_{\delta\to 0}\chi_n(1-\delta).$$

Непосредственно из (2.1) выводим следующее свойство ортогональности функций Хаара:

$$\int_0^1 \chi_n(x)\chi_m(x)dx = \delta_{nm}. \tag{2.2}$$

Если функция $f = f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$, то мы можем определить коэффициенты Фурье-Хаара

$$c_k = c_k(f) = \int_0^1 f(t)\chi_k(t)dt \tag{2.3}$$

и ряд Фурье-Хаара

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\chi_k(x). \tag{2.4}$$

Через $S_n(f, x)$ обозначим частичную сумму Фурье-Хаара вида

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\chi_k(x). \tag{2.5}$$

3. Ортонормированная по Соболеву система функций, порожденная функциями Хаара

Для каждого натурального r мы определим систему функций $\{\chi_{r,n}\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом. Положим

$$\chi_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\chi_n(t)dt, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{3.1}$$

Кроме того определим конечный набор функций

$$\chi_{r,n}(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, r-1. \tag{3.2}$$

Пусть $W^r_{L^2(0,1)}$ – пространство Соболева с $L^2(0, 1) = L^2_\rho(0, 1)$, а $\rho = \rho(x) \equiv 1$. Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Система $\{\chi_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденная системой Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ посредством равенств (3.1) и (3.2), полна в $W^r_{L^2(0,1)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)dt. \tag{3.3}$$

Ряд Фурье по системе $\{\chi_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет следующий вид (см. (0.7))

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{r-1} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=r}^{\infty} f_{r,n}\chi_{r,n}(x), \tag{3.4}$$

где

$$f_{r,n} = \int_0^1 f^{(r)}(t)\chi_{n-r}(t)dt.$$

В работе [8] получено следующее представление для функций $\chi_{r,n}(x)$, определенных равенством (3.1) ($n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$)

$$\chi_{r,r+n}(x) = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{r!}\begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{i-1}{2^k}; \\ (x - \frac{i-1}{2^k})^r, & \frac{i-1}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{2i-1}{2^{k+1}}; \\ (x - \frac{i-1}{2^k})^r - 2(x - \frac{2i-1}{2^{k+1}})^r, & \frac{2i-1}{2^{k+1}} \leqslant x \leqslant \frac{i}{2^k}; \\ (x - \frac{i-1}{2^k})^r - 2(x - \frac{2i-1}{2^{k+1}})^r + (x - \frac{i}{2^k})^r, & \frac{i}{2^k} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

и, как следствие, доказано, что

$$\chi_{r,r+n}(x) = \frac{2^{k/2}}{r!}\Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}}(x-t)^r_+\big|_{t=\frac{i-1}{2^k}}, \quad (3.6)$$

где $\Delta_h^2 g(t)$ – конечная разность второго порядка с шагом h,

$$a_+^r = \begin{cases} a^r, & \text{если } a \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Используя свойства (3.5) и (3.6), в цитированной выше работе [8] исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм ряда (3.4) следующего вида

$$Y_{r,N}(f,x) = \sum_{n=0}^{r-1} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=r}^{N} f_{r,n}\chi_{r,n}(x) \quad (3.7)$$

для функций из классов гладких функций $W^r_{L^p(0,1)}$ с $p = 1$ и $p = 2$. В частности, для $f \in W^r_{L(0,1)}$ получена следующая оценка

$$|f^{(\nu)}(x) - Y^{(\nu)}_{r,N}(x)| \leqslant \frac{x^{r-1-\nu}}{(r-1-\nu)!}\omega_2(f^{(r-1)}, \frac{1}{N}), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad (3.8)$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$,

$$\omega_2(g,\delta) = \sup_{\substack{0\leqslant h\leqslant\delta,\\ h\leqslant x\leqslant 1-h}} |g(x+h) + g(x-h) - 2g(x)|.$$

В качестве следствия неравенства (3.8) в [8] показано, что если $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha, x, y \in [0,1], 0 < \alpha \leqslant 1$, то имеет место неравенство ($0 \leqslant \nu \leqslant r-1$)

$$|f^{(\nu)}(x) - Y^{(\nu)}_{r,N}(x)| \leqslant \frac{Mx^{r-1-\nu}}{(r-1-\nu)!}N^{-1-\alpha}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \quad (3.9)$$

4. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Для произвольных действительных α и β полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ можно определить [23] с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{\kappa(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\kappa(x)\sigma^n(x)\right\}, \quad (4.1)$$

где α, β – произвольные действительные числа, $\kappa(x) = \kappa(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $\kappa(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\kappa(x)dx = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm}, \tag{4.2}$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{4.3}$$

Нам понадобятся еще следующие свойства полиномов Якоби [23]:

$$\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \tag{4.4}$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{2^\nu}P_{n-\nu}^{\alpha+\nu,\beta+\nu}(x), \tag{4.5}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)\dots(a+\nu-1)$,

$$\binom{n}{l}P_n^{\alpha,-l}(x) = \binom{n+\alpha}{l}\left(\frac{x+1}{2}\right)^l P_{n-l}^{\alpha,l}(x), \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \tag{4.6}$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k}\left(\frac{1-t}{2}\right)^k, \tag{4.7}$$

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) =$$
$$\frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}}\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta}P_{n-m}^{m+\alpha,m+\beta}(x)\right\}, \tag{4.8}$$

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}, \quad P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \tag{4.9}$$

$$\frac{P_n^{a,a}(x)}{P_n^{a,a}(1)} = \sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{n!(\alpha+1)_{n-2j}(n+2a+1)_{n-2j}(1/2)_j(a-\alpha)_j}{(n-2j)!(2j)!(a+1)_{n-2j}(n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}}$$
$$\times\frac{1}{(n-2j+a+1)_j(n-2j+\alpha+3/2)_j}\frac{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(1)}, \tag{4.10}$$

где $[b]$ – целая часть числа b.

Лемма 4.1. *Пусть $\alpha > -1$, k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^{r}\lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r,k) = \frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$, тогда, полагая $a = \alpha - r$, мы можем воспользоваться формулой (4.10). Поскольку при $j \geqslant r+1$ выполняется равенство $(a-\alpha)_j = (-r)_j = 0$, то из (4.10) мы имеем

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \frac{P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(1)}{P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(1)} \frac{(k+r)!(\alpha+1)_{k+r-2j}(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j)!(2j)!(\alpha-r+1)_{k+r-2j}} \times$$
$$\frac{(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} =$$
$$\frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 4.1 в случае $\alpha > r-1$. Но поскольку $P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)$, λ_j^α и $P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x)$ представляют собой аналитические функции относительно α, то утверждение леммы 4.1 вытекает из уже доказанного случая.

Лемма 4.2. *Пусть k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{-\frac12-r,-\frac12-r}(x) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j^{-\frac12}(k,r) P_{k+r-2j}^{-\frac12,-\frac12}(x),$$

где

$$\lambda_j^{-\frac12}(k,r) = \frac{(-1)^j(k-r)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(k-1/2)^{[j]}}{(k+r-2j)_{k+r-2j}(k+r-2j+1)_j(2j)!} =$$
$$(-1)^j \frac{((k+r-2j)!)^2 2^{2k+2r-4j}}{(2(k+r-2j))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \frac{r^{[j]}}{j!} \frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости утверждения леммы 4.2 достаточно в лемме 4.1 взять $\alpha = -\frac12$.

Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – полином Чебышева первого рода. Тогда [23]

$$P_n^{-\frac12,-\frac12}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} T_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} T_n(x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+\sigma_n)T_n(x) \quad (\sigma_n = O(1/n)); \tag{4.12}$$

Имеет место следующая

Лемма 4.3. *Пусть k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{-\frac12-r,-\frac12-r}(x) = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \sum_{j=0}^{r} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{r^{[j]} k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}} T_{k+r-2j}(x).$$

Доказательство. Утверждение леммы 4.3 непосредственно вытекает из леммы 4.2 и равенств (4.12) и (4.11).

Пусть $A, B \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$. Обозначим через $L^p_{A,B}$ пространство измеримых функций $f = f(x)$, определенных на $[-1,1]$, для которых

$$\|f\|_{L^p_{A,B}} = \left(\int_{-1}^{1} (1-x)^A (1+x)^B |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Если $\alpha, \beta > -1$, $f \in L^p_{\alpha,\beta}$, то мы можем определить коэффициенты Фурье-Якоби

$$f_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) P_k^{\alpha,\beta}(x) dx$$

и рассмотреть сумму Фурье-Якоби по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$:

$$S_n^{\alpha,\beta}(f) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x),$$

которая при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ представляет собой [23] сумму Фурье по полиномам Чебышева $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. В работе [25] доказана следующая

Теорема 3. *Пусть $\alpha, \beta > -1$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ таковы, что*

$$\left|\frac{A+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\},$$

$$\left|\frac{B+1}{p} - \frac{\beta+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right\}.$$

Тогда, если $f \in L^p_{A,B}$, то имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{L^p_{A,B}} = 0.$$

5. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные полиномами Якоби

Из равенства (4.2) следует, что если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы

$$p_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta}}} \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{5.1}$$

образуют ортонормированную в $L^2_\kappa(-1,1)$ с весом $\kappa(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ систему. Как хорошо известно [23], система полиномов Якоби (5.1) полна в $L^2_\kappa(-1,1)$. Эта система порождает на $[-1,1]$ систему полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$, определенных равенствами

$$p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1. \tag{5.2}$$

$$p_{r,r+k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} p_k^{\alpha,\beta}(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{5.3}$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть $\alpha, \beta > -1$. Тогда система полиномов $\{p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой ортонормированных полиномов Якоби* (5.1) *посредством равенств* (5.2) *и* (5.3), *полна в $W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\kappa(t)dt. \tag{5.4}$$

Ряд Фурье (0.7) для системы $\{p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ приобретает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k}p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x), \tag{5.5}$$

где

$$f_{r,k} = \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)p_{k-r}^{\alpha,\beta}(t)\kappa(t)dt. \tag{5.6}$$

Следствие 3. *Пусть $-1 < \alpha, \beta < 1$. Тогда, если $f(x) \in W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$, то ряд Фурье (смешанный ряд)* (5.5) *сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.*

Доказательство. Заметим, что если $-1 < \alpha, \beta < 1$, то $\frac{1}{\kappa(x)} \in L(-1, 1)$, где $\kappa(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Поэтому утверждение следствия 3 вытекает из теоремы 2 и следствия 2.

При исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм смешанного ряда (5.5) возникает задача об асимптотических свойствах полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$, определенных равенством (5.3). С этой целью мы получим явное представление для этих полиномов, свободное от интеграла с переменным верхним пределом.

Пусть $\lambda = \alpha + \beta$. Тогда если $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (4.5) и записать

$$P_k^{\alpha,\beta}(t) = \frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\frac{d^r}{dt^r}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t). \tag{5.7}$$

Заметим, что если $-1 < \alpha, \beta < 1$ и $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, то равенство (5.7) справедливо при всех $k = 0, 1, \ldots$. Если $k \geqslant r - \lambda$, то, очевидно, $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$ и для таких k мы можем снова воспользоваться равенством (5.7). Наконец, если одно из чисел α или β целое, а другое дробно, то $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ и опять верна формула (5.7).

Итак, пусть $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$. Тогда в силу (5.7)

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{\alpha,\beta}(t)\,dt =$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\frac{d^r}{dt^r}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\,dt =$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(1+x)^\nu}{\nu!}\left\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\right\}_{t=-1}^{(\nu)}\right]. \tag{5.8}$$

Далее, в силу (4.5)

$$\left\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\right\}^{(\nu)}=\frac{(k+\lambda-r+1)_\nu}{2^\nu}P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(t), \tag{5.9}$$

а из (4.9) имеем

$$P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(-1)=(-1)^{k+r-\nu}\binom{k+\beta}{k+r-\nu}=$$

$$\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!}. \tag{5.10}$$

Из (5.9) и (5.10) находим

$$\left\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\right\}_{t=-1}^{(\nu)}=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!2^\nu}=A_{\nu,k}. \tag{5.11}$$

Сопоставляя (5.8) и (5.11) мы можем записать

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{\alpha,\beta}(t)\,dt=$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k}}{\nu!}(1+x)^\nu\right]. \tag{5.12}$$

Из (5.1), (5.3) и (5.12) при условии $(k+\lambda)^{[r]}\neq 0$ получаем

$$p_{r,r+k}^{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{\sqrt{h_k^{\alpha,\beta}}}\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k}}{\nu!}(1+x)^\nu\right]. \tag{5.13}$$

Представление (5.13) было найдено в работах [3], [6], [7] в связи исследованием задачи об аппроксимативных свойств смешанных рядов (5.5) по общим полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$. При этом особое внимание уделялось смешанным рядам по ультрасферическим полиномам $P_k^{\alpha,\alpha}(x)$. Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев.

1). Пусть $\beta=0$, α – дробное. Тогда, во-первых $(k+\lambda)^{[r]}\neq 0$ для всех $k\geqslant 0$, во-вторых из (5.11) следует, что $A_{\nu,k}=0$ при всех $\nu=0,1,\ldots,r-1$, поэтому равенство (5.13) можно переписать так

$$p_{r,r+k}^{\alpha,0}(x)=\frac{1}{\sqrt{h_k^{\alpha,0}}}\frac{2^r}{(k+\alpha)^{[r]}}P_{k+r}^{\alpha-r,-r}(x)\quad (k=0,1,\ldots). \tag{5.14}$$

С учетом свойства (4.6) этому равенству можно придать также следующий вид

$$p_{r,r+k}^{\alpha,0}(x)=\frac{(1+x)^rP_k^{\alpha-r,r}(x)}{(k+r)^{[r]}\sqrt{h_k^{\alpha,0}}},\quad (k=0,1,\ldots). \tag{5.15}$$

Соответствующий ряд Фурье (смешанный ряд) (5.5) принимает в рассматриваемом случае следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{(1+x)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k} P_k^{\alpha-r,-r}(x)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}(k+\alpha-r)^{[r]}} \tag{5.16}$$

или, что то же,

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{(1+x)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f_{r,k}(1+x)^r P_{k-r}^{\alpha-r,r}(x)}{k^{[r]}\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}}, \tag{5.17}$$

где, в силу (5.6)

$$f_{r,k} = \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)\frac{P_{k-r}^{\alpha,0}(t)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}}(1-t)^\alpha dt. \tag{5.18}$$

2). Рассмотрим ортогональные по Соболеву полиномы $p_{r,n}^{0,0}(x)$, порожденные полиномами *Лежандра*. С этой целью положим $\beta = \alpha = 0$. Тогда $(k+\lambda)^{[r]} \neq 0$ для всех $k \geqslant r$, а из (5.11) следует, что $A_{\nu,k} = 0$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$. Поэтому

$$p_{r,r+k}^{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k^{0,0}}}\frac{2^r}{k^{[r]}}P_{k+r}^{-r,-r}(x) \quad (k = r, r+1, \ldots). \tag{5.19}$$

Если мы обратимся к равенству (4.6), то можем записать

$$P_{k+r}^{-r,-r}(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^{2r}}P_{k-r}^{r,r}(x) \quad (k = r, r+1, \ldots). \tag{5.20}$$

Из (5.19) и (5.20) имеем

$$p_{r,r+k}^{0,0}(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r k^{[r]}\sqrt{h_k^{0,0}}}P_{k-r}^{r,r}(x) \quad (k = r, r+1, \ldots). \tag{5.21}$$

Соответствующий этому случаю ряд Фурье по полиномам $p_{r,k}^{0,0}(x)$, ортогональным по Соболеву (или, что то же, *смешанный ряд по полиномам Лежандра*), приобретает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} +$$

$$\sum_{k=r}^{2r-1} f_{r,k}p_{r,k}^{0,0}(x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{f_{r,k+r}P_{k-r}^{r,r}(x)}{k^{[r]}\sqrt{h_k^{0,0}}}. \tag{5.22}$$

Рассмотрим отдельно два частных случая: $r = 1$ и $r = 2$. Из (5.1) и (5.3) имеем

$$p_{1,1}^{0,0}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{P_0^{0,0}(t)}{\sqrt{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+x), \tag{5.23}$$

$$p_{2,2}^{0,0}(x) = \int_{-1}^{x} (x-t)\frac{P_0^{0,0}(t)}{\sqrt{2}}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+x)^2, \tag{5.24}$$

$$p_{2,3}^{0,0}(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{x} (x-t) P_1^{0,0} dt = \frac{1}{2\sqrt{6}} (1+x)^2 (x-2). \tag{5.25}$$

Для ряда Фурье (5.22) в этих случаях мы можем записать следующие представления

$$f(x) \sim f(-1) + \frac{f_{1,1}}{\sqrt{2}}(1+x) + \frac{x^2-1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{1,k+1}\sqrt{2k+1} P_{k-1}^{1,1}(x)}{k} \quad (r=1), \tag{5.26}$$

$$f(x) \sim f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f_{2,2}}{2\sqrt{2}}(1+x)^2 + \frac{f_{2,3}}{2\sqrt{6}}(1+x)^2(x-2)$$
$$+ \frac{(x^2-1)^2}{2\sqrt{2}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_{2,k+2}\sqrt{2k+1} P_{k-2}^{2,2}(x)}{k(k-1)} \quad (r=2). \tag{5.27}$$

6. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные многочленами Чебышева первого рода

Полиномы Чебышева

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

образуют ортонормированную в $L^2_\rho(-1,1)$ с весом $\rho(x) = \kappa(x) = \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ систему. Как хорошо известно [23], система полиномов Чебышева (6.1) полна в $L^2_\kappa(-1,1)$. Эта система порождает на $[-1,1]$ систему полиномов $T_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$), определенных равенствами

$$T_{r,k}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{6.2}$$

$$T_{r,r}(x) = \frac{(x+1)^r}{\sqrt{2} r!}, \quad T_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} T_k(t) dt, \; k = 1, 2 \ldots. \tag{6.3}$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 4. *Система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой ортонормированных полиномов Чебышева (6.1) посредством равенств (6.2) и (6.3), полна в $W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1) g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) \kappa(t) dt. \tag{6.4}$$

Ряд Фурье (0.7) для системы $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ приобретает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k} T_{r,k}(x), \tag{6.5}$$

где

$$f_{r,r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)\kappa(t)dt,\quad f_{r,r+j}=\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)T_j(t)\kappa(t)dt\quad(j\geqslant 1).\tag{6.6}$$

Следствие 5. *Если $f(x)\in W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$, то ряд Фурье (смешанный ряд) (6.5) сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x\in[-1,1]$.*

Доказательство. Так как $\frac{1}{\kappa(x)}\in L(-1,1)$, то утверждение следствия 5 вытекает из теоремы 2 и следствия 4.

В дальнейшем будет значительно усилено утверждение следствия 5, распространив его на более широкие, чем $W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$ классы Соболева $W^r_{L^p_\kappa(-1,1)}$ с показателем p. Но для этого нам нужны дальнейшие свойства полиномов $T_{r,k}(x)$, определенных равенствами (6.2) и (6.3).

Пусть $\lambda=\alpha+\beta$. Тогда если $(k+\lambda)^{[r]}\neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (4.5) и записать

$$P_k^{\alpha,\beta}(t)=\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\frac{d^r}{dt^r}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t).\tag{6.7}$$

Если $k\geqslant r-\lambda$, то, очевидно, $(k+\lambda)^{[r]}\neq 0$ и для таких k мы можем воспользоваться равенством (6.7). Итак, пусть $(k+\lambda)^{[r]}\neq 0$. Тогда в силу (6.7)

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{\alpha,\beta}(t)\,dt=$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\frac{d^r}{dt^r}P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\,dt=$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(1+x)^\nu}{\nu!}\left\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\right\}^{(\nu)}_{t=-1}\right].\tag{6.8}$$

Далее, в силу (4.5)

$$\left\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\right\}^{(\nu)}=\frac{(k+\lambda-r+1)_\nu}{2^\nu}P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(t),\tag{6.9}$$

а из (4.9) имеем

$$P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(-1)=(-1)^{k+r-\nu}\binom{k+\beta}{k+r-\nu}=$$

$$\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!}.\tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) находим

$$\left\{P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t)\right\}^{(\nu)}_{t=-1}=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+\beta+1)(k+\lambda-r+1)_\nu}{\Gamma(\nu-r+\beta+1)(k+r-\nu)!2^\nu}=A_{\nu,k,r}^{\alpha,\beta}.\tag{6.11}$$

Сопоставляя (6.8) и (6.11) мы можем записать

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{\alpha,\beta}(t)\,dt=$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}^{\alpha,\beta}}{\nu!}(1+x)^{\nu}\right]. \tag{6.12}$$

Из (6.3), (4.12) и (6.12) при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ имеем

$$T_{r,r+k}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}T_k(t)\,dt=$$

$$\frac{2^{2k}k!^2}{(2k)!(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(t)\,dt=$$

$$\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r,-\frac{1}{2}-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}{\nu!}(1+x)^{\nu}\right], \tag{6.13}$$

где в силу (6.11) и равенств

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\quad \Gamma(z+1/2)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2z)}{\Gamma(z)2^{2z-1}}$$

для $k\geqslant r+1$ находим

$$A_{\nu,k,r}=A_{\nu,k,r}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+1/2)(k-r)_{\nu}}{\Gamma(\nu-r+1/2)(k+r-\nu)!2^{\nu}}$$

$$=\frac{(-1)^{k}\Gamma(k+1/2)(k-r)_{\nu}\Gamma(r-\nu+1/2)}{\pi(k+r-\nu)!2^{\nu}}=$$

$$\frac{(-1)^{k}(2k-1)!(2(r-\nu)-1)!(k-r)_{\nu}}{(k-1)!(r-\nu-1)!(k+r-\nu)!2^{2(k+r-1)-\nu}}. \tag{6.14}$$

Таким образом, при $k\geqslant r+1$ мы получаем следующее представление

$$T_{r,r+k}(x)=\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r,-\frac{1}{2}-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^{\nu}\right]. \tag{6.15}$$

Теперь обратимся к лемме 5.3, из которой выводим

$$\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r,-\frac{1}{2}-r}(x)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{kT_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}. \tag{6.16}$$

Сопоставляя (6.15) и (6.16), мы приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Если $k \geqslant r+1$, то*

$$T_{r,r+k}(x) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \frac{(-1)^j k T_{k+r-2j}(x)}{2^r (k+r-j)^{[r+1]}} - \frac{k!^2 2^{r+2k}}{(2k)!(k-1)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^{\nu}. \quad (6.17)$$

Рассмотрим два важных частных случая, соответствующие значениям $r=1$ и $r=2$.

1). Пусть $r=1$. Тогда из (6.14) имеем

$$A_{0,k,1} = \frac{(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)!(k+1)!2^{2k}}, \quad k=2,3,\ldots. \quad (6.18)$$

Из (6.17) и (6.18) для $k \geqslant 2$ находим

$$T_{1,k+1}(x) = \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \frac{k T_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}} - \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{2k+1}}{(k-1)} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)!(k+1)!2^{2k}}$$
$$= \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \frac{k T_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}} - \frac{(-1)^k}{k^2-1}.$$

Отсюда и из (6.2) и (6.3) мы водим

Следствие 6. *Имеют место равенства*

$$T_{1,k+1}(x) = \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{(-1)^k}{k^2-1} \quad (k \geqslant 2), \quad (6.19)$$

$$T_{1,0}(x) = 1, \quad T_{1,1}(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2}}, \quad T_{1,2}(x) = x^2 - 1. \quad (6.20)$$

2). Для $r=2$ и $k \geqslant 3$ из (6.14) и (6.17) имеем

$$A_{0,k,2} = \frac{6(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)!(k+2)!2^{2(k+1)}}, \quad A_{1,k,2} = \frac{(-1)^k (2k-1)!(k-2)}{(k-1)!(k+1)!2^{2k+1}},$$

$$T_{2,k+2}(x) = \sum_{j=0}^{2} \binom{r}{j} \frac{(-1)^j k T_{k+2-2j}(x)}{2^2 (k+2-j)^{[3]}} - \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{2+2k}}{(k-1)^{[2]}} \sum_{\nu=0}^{1} \frac{A_{\nu,k,2}}{\nu!}(1+x)^{\nu},$$

поэтому при $k \geqslant 3$

$$T_{2,k+2}(x) = \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} \frac{(-1)^j k T_{k+2-2j}(x)}{4(k+2-j)^{[3]}} - (-1)^k \left[\frac{1+x}{k^2-1} + \frac{3}{(k^2-1)(k^2-4)}\right].$$

Отсюда и из (6.2) и (6.3) мы выводим

Следствие 7. *Имеют место равенства*

$$T_{2,k+2}(x) = \frac{T_{k+2}(x)}{4(k+2)(k+1)} - \frac{T_k(x)}{2(k^2-1)} + \frac{T_{k-2}(x)}{4(k-1)(k-2)} -$$
$$(-1)^k \left[\frac{1+x}{k^2-1} + \frac{3}{(k^2-1)(k^2-4)}\right] \quad (k \geqslant 3), \quad (6.21)$$

$$T_{2,0}(x) = 1, \quad T_{2,1}(x) = 1+x, \quad T_{2,2}(x) = \frac{(1+x)^2}{2\sqrt{2}}, \quad (6.22)$$

$$T_{2,3}(x) = \frac{1}{6}(x-2)(x+1)^2, \quad T_{2,4}(x) = \frac{1}{6}x(x-2)(x+1)^2. \quad (6.23)$$

7. Условия равномерной сходимости ряда Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным полиномами Чебышева первого рода

Вернемся к вопросу об условиях равномерной сходимости ряда Фурье (смешанного ряда) (6.5). Имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть* $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ *таковы, что*

$$\left|\frac{A+1}{p}-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}, \quad \left|\frac{B+1}{p}-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}, \tag{7.1}$$

$\rho(x)=(1-x)^A(1+x)^B$. *Тогда, если* $f \in W^r_{L^p_\rho}(-1,1)$, *то ряд* (6.5) *равномерно на* $[-1,1]$ *сходятся к* $f(x)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что мы можем определить коэффициенты $f_{r,k}$, определяемые равенством (6.6), если $f(x) \in W^r_{L^p_\rho}(-1,1)$. С этой целью покажем, что функция $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}f^{(r)}(x)$ интегрируема на $(-1,1)$. В самом деле, поскольку $f^{(r)} \in L^p_\rho(-1,1)$, то в силу условий (7.1)

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left|f^{(r)}(x)\right|dx=$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{A}{p}}(1+x)^{-\frac{1}{2}-\frac{B}{p}}\{\rho(x)\}^{\frac{1}{p}}\left|f^{(r)}(x)\right|dx \leqslant$$

$$\left(\int_{-1}^{1}(1-x)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{A}{p}\right)p'}(1+x)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{B}{p}\right)p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{-1}^{1}\rho(x)\left|f^{(r)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{7.2}$$

где $p'=\frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель. Второй интеграл в (7.2) конечен, а для сходимости первого интеграла из (7.2) достаточно, чтобы были справедливы неравенства

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{A}{p}\right)p'>-1, \quad \left(-\frac{1}{2}-\frac{B}{p}\right)p'>-1, \tag{7.3}$$

но (7.3) равносильно тому, что

$$\frac{-\frac{p}{2}-A}{p}>-\frac{1}{p'}=-1+\frac{1}{p}, \quad \frac{-\frac{p}{2}-B}{p}>-1+\frac{1}{p}$$

или, что то же,

$$\frac{p}{2}-(A+1)>0, \quad \frac{p}{2}-(B+1)>0,$$

а это, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\frac{1}{4}-\frac{A+1}{p}>-\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}-\frac{B+1}{p}>-\frac{1}{4}. \tag{7.4}$$

Справедливость неравенств (7.4) вытекает из (7.1) и тем самым коэффициенты $f_{r,k}$ существуют. Перейдем к доказательству равномерной сходимости ряда

Фурье (6.5) к функции $f(x)$ на $[-1,1]$. Обозначим через $S_n^{-\frac12,-\frac12}(f^{(r)})$ частичную сумму ряда Фурье функции $f^{(r)}(x)$ по системе полиномов Чебышева (6.1), другими словами

$$S_n^{-\frac12,-\frac12}(f^{(r)}) = S_n^{-\frac12,-\frac12}(f^{(r)},x) = \frac{f_{r,r}}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} f_{r,k+r}T_k(x), \tag{7.5}$$

где, в соответствии с (6.6),

$$f_{r,r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)\kappa(t)dt, \quad f_{r,k+r} = \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)T_k(t)\kappa(t)dt.$$

Имеем

$$\left|\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)\,dt - \int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}S_n^{-\frac12,-\frac12}(f^{(r)},t)\,dt\right| \leqslant$$

$$2^{r-1}\int_{-1}^{1}\left|f^{(r)}(t) - S_n^{-\frac12,-\frac12}(f^{(r)},t)\right|\,dt =$$

$$2^{r-1}\int_{-1}^{1}\{\rho(t)\}^{-\frac1p}\{\rho(t)\}^{\frac1p}\left|f^{(r)}(t) - S_{r,n}^{-\frac12,-\frac12}(f^{(r)},t)\right|\,dt \leqslant$$

$$2^{r-1}\left(\int_{-1}^{1}\{\rho(t)\}^{-\frac{p'}{p}}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{-1}^{1}\left|f^{(r)}(t) - S_n^{-\frac12,-\frac12}(f^{(r)},t)\right|^{p}\rho(t)\,dt\right)^{\frac1p}. \tag{7.6}$$

С другой стороны,

$$\int_{-1}^{1}\{\rho(t)\}^{-\frac{p'}{p}}\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t)^{-\frac{A}{p-1}}(1+t)^{-\frac{B}{p-1}}\,dt \leqslant c(A,B,p), \tag{7.7}$$

так как из условия (7.1) следует, что $\frac{A}{p-1} < 1$ и $\frac{B}{p-1} < 1$. Далее, если соблюдены условия теоремы 5, то из теоремы 3 следует, что

$$\|f^{(r)} - S_n^{-\frac12,-\frac12}(f^{(r)})\|_{L^p_\rho(-1,1)} \to 0\,(n\to\infty). \tag{7.8}$$

Обозначим $S_{r,n}(f,x)$ частичную сумму ряда (6.5) вида

$$S_{r,n}(f,x) = Q_{r-1}(f,x) + \sum_{k=r}^{n} f_{r,k}T_{r,k}(x), \tag{7.9}$$

где

$$Q_{r-1}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!}. \tag{7.10}$$

Имея ввиду (6.3) и (7.5), мы можем переписать (7.9) следующим образом

$$S_{r,n}(f,x) = Q_{r-1}(f,x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\left(\frac{f_{r,r}}{\sqrt{2}} + \sum_{k=r+1}^{n} f_{r,k}T_{k-r}(t)\right)dt =$$

$$Q_{r-1}(f,x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}S_{n-r}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(f^{(r)},t)dt. \tag{7.11}$$

Обратившись к формуле Тейлора (1.8) с $a=-1$, из (7.11) для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеем

$$|f(x) - S_{r,n}(f,x)| \leqslant \frac{2^{r-1}}{(r-1)!}\left(\int_{-1}^{1}(\rho(t))^{-p'/p}dt\right)^{1/p} ||f^{(r)} - S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(f^{(r)})||_{L^p_\rho(-1,1)}. \tag{7.12}$$

Сопоставляя (7.6), (7.7) с (7.12), мы убеждаемся в том, что ряд Фурье (6.5) равномерно сходится и сумма его равна $f(x)$. Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 непосредственно вытекает

Следствие 8. *Пусть $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $p>1$. Тогда, если $f \in W^r_{L^p_\rho(-1,1)}$, то ряд* (6.5) *равномерно на $[-1,1]$ сходятся к $f(x)$.*

В связи со следствием 8 возникает вопрос о том, нельзя ли в нем заменить условие $p>1$ на $p=1$. Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 6. *Пусть $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $r \geqslant 1$. Тогда, если $f \in W^r_{L^1_\rho(-1,1)}$, то ряд* (6.5) *равномерно на $[-1,1]$ сходятся к $f(x)$.*

Доказательство. Предварительно мы установим связь смешанного ряда (6.5) с рядом Фурье функции $f(x)$ по полиномам Чебышева первого рода $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. Для этого нам понадобятся некоторые обозначения. Положим

$$G_{r,k+r}(x) = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{(-1)^j k T_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}, \tag{7.13}$$

$$H_{r,k+r}(x) = -\frac{k!^2 2^{r+2k}}{(2k)!(k-1)^{[r]}}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^\nu, \tag{7.14}$$

$$U_{r-1}(f,x) = \sum_{k=2r+1}^{\infty} f_{r,k}H_{r,k}(x), \tag{7.15}$$

$$V_r(f,x) = \sum_{k=2r+1}^{\infty} f_{r,k}G_{r,k}(x), \tag{7.16}$$

$$D_{2r}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + U_{r-1}(f,x) + \sum_{k=r}^{2r} f_{r,k}T_{r,k}(x). \tag{7.17}$$

Пусть сначала $f \in W^r_{L^p_\rho(-1,1)}$, где $p > 1$. Тогда в силу следствия 8 ряд (6.5) равномерно на $[-1,1]$ сходятся к $f(x)$. Поэтому с учетом равенства (6.17) и обозначений (7.15)–(7.17) мы можем записать

$$f(x) = D_{2r}(f,x) + V_r(f,x), \tag{7.18}$$

где $D_{2r}(f,x)$ – алгебраический полином степени $2r$, определенный равенством (7.17). Рассмотрим сначала случай $r = 1$ и заметим, что в силу (6.19)

$$G_{1,k+1}(x) = \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)}, \quad H_{1,k+1}(x) = -\frac{(-1)^k}{k^2-1}, \tag{7.19}$$

поэтому правая часть равенства (7.18) принимает для $r = 1$ следующий вид

$$f(x) = f(0) + f_{1,1}\frac{1+x}{\sqrt{2}} + f_{1,2}(x^2-1) +$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} f_{1,k}}{(k-1)^2 - 1} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{1,k}}{2}\left(\frac{T_k(x)}{k} - \frac{T_{k-2}(x)}{k-2}\right), \tag{7.20}$$

причем ряды, фигурирующие в правой части равенства (7.20) сходятся, второй из которых сходится равномерно относительно $x \in [-1,1]$. Далее, имеем

$$V_1(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{1,k}}{2}\left(\frac{T_k(x)}{k} - \frac{T_{k-2}(x)}{k-2}\right)$$

$$= -\frac{f_{1,3}}{2}T_1(x) - \frac{f_{1,4}}{4}T_2(x) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{1,k} - f_{1,k+2}}{2k} T_k(x). \tag{7.21}$$

Кроме того в силу (6.6)

$$\frac{f_{1,k} - f_{1,k+2}}{2k} = \frac{1}{2k}\int_{-1}^{1} f'(t)(T_{k-1}(t) - T_{k+1}(t))\kappa(t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi} f'(\cos\theta)(\cos(k-1)\theta - \cos(k+1)\theta)d\theta =$$

$$\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} f'(\cos\theta)\sin\theta\sin k\theta d\theta = -\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} (f(\cos\theta))'\sin k\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_k(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = f_k, \tag{7.22}$$

где f_k – k-тый коэффициент Фурье-Чебышева функции $f(x)$. Из (7.20)– (7.22) мы получаем для $f(x) \in W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$ равенство

$$f(x) = f(0) + f_{1,1}\frac{1+x}{\sqrt{2}} + f_{1,2}(x^2-1) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} f_{1,k}}{(k-1)^2 - 1}$$

$$-\frac{f_{1,3}}{2}T_1(x)-\frac{f_{1,4}}{4}T_2(x)+\sum_{k=3}^{\infty}f_kT_k(x), \tag{7.23}$$

в котором функциональный ряд, фигурирующий в его правой части сходится равномерно относительно $x\in[-1,1]$. Из равенства (7.23) и из того, что система полиномов Чебышева $\{T_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной следует, что выражение

$$g(x)=f(0)+f_{1,1}\frac{1+x}{\sqrt{2}}+f_{1,2}(x^2-1)+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}f_{1,k}}{(k-1)^2-1}-\frac{f_{1,3}}{2}T_1(x)-\frac{f_{1,4}}{4}T_2(x),$$

фигурирующее в правой части (7.23), допускает представление

$$g(x)=\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{2}f_kT_k(x). \tag{7.24}$$

Сопоставляя (7.23) с (7.24), мы приходим к равенству

$$f(x)=\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}f_kT_k(x), \tag{7.25}$$

в правой части которого фигурирует ряд Фурье функции $f(x)\in W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$ по полиномам Чебышева $T_k(x)$ $(k=0,1,\ldots)$, который равномерно на $[-1,1]$ сходится к $f(x)$. Заметим, что если $f(x)\in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$ и ряд Фурье-Чебышева (7.25) сходится равномерно на $[-1,1]$ к $f(x)$, то ряд (7.20) также сходится к $f(x)$ равномерно на $[-1,1]$. Чтобы убедиться в этом достаточно выполнить в обратном порядке те преобразования, которые привели нас к равенству (7.25), отправившись от равенства (7.20). Поэтому, чтобы завершить доказательство теоремы 6 для $r=1$ нам достаточно доказать, что если $f(x)\in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$, то ряд Фурье-Чебышева (7.25) сходится равномерно относительно $x\in[-1,1]$. Итак, пусть $f(x)\in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$, тогда индуцированная функция $F(\theta)=f(\cos\theta)$, как это легко показать, является абсолютно непрерывной на периоде $[-\pi,\pi]$ и, следовательно, ее тригонометрический ряд Фурье равномерно на $[-\pi,\pi]$ сходится к $F(\theta)$, а это равносильно тому, что ряд Фурье-Чебышева функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на $[-1,1]$. Тем самым теорема 6 доказана для случая $r=1$. Если же $r>1$, то мы можем обратиться к равенству (0.14) и убедиться в том, что если смешанный ряд (6.5) сходится равномерно на $[-1,1]$ для $r=1$, то он сходится равномерно на $[-1,1]$ и для $r=2$. Поэтому справедливость утверждения теоремы 6 выводим путем математической индукции.

8. Некоторые сведения о полиномах Лагерра

При определении классических полиномов Лагерра $L_n^\alpha(t)$ может быть использована

формула Родрига

$$L_n^\alpha(t)=\frac{1}{n!}t^{-\alpha}e^t\left\{t^{n+\alpha}e^{-t}\right\}^{(n)}. \tag{8.1}$$

Нам понадобятся следующие свойства этих полиномов:

явный вид

$$L_n^\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-t)^\nu}{\nu!}; \tag{8.2}$$

соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} L_n^\alpha(t) L_m^\alpha(t) dt = \delta_{nm} h_n^\alpha \quad (\alpha > -1), \tag{8.3}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1). \tag{8.4}$$

В частности, для $L_n(t) = L_n^0(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_m(t) dt = \delta_{nm}.$$

Далее отметим следующие равенства [23]:

$$\frac{d}{dt} L_n^\alpha(t) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t); \tag{8.5}$$

$$\frac{d^r}{dt^r} L_{k+r}^{\alpha-r}(t) = (-1)^r L_k^\alpha(t); \tag{8.6}$$

$$L_k^{-r}(t) = \frac{(-t)^r}{k^{[r]}} L_{k-r}^r(t), \tag{8.7}$$

где $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$.

9. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные полиномами Лагерра

Из равенства (8.3) следует, что если $\alpha > -1$, то полиномы

$$l_n^\alpha(x) = \frac{L_n^\alpha(x)}{\sqrt{h_n^\alpha}} \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{9.1}$$

образуют ортонормированную в $L_\rho^2(0,\infty)$ с весом $\rho(x) = e^{-x} x^\alpha$ систему. Как хорошо известно [23], система полиномов Лагерра (9.1) полна в $L_\rho^2(0,\infty)$. Эта система порождает на $[0,\infty)$ систему полиномов $l_{r,k}^\alpha(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$, определенных равенствами

$$l_{r,k}^\alpha(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1. \tag{9.2}$$

$$l_{r,r+k}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} l_k^\alpha(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{9.3}$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 9. *Пусть $\alpha > -1$. Тогда система полиномов $\{l^\alpha_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой ортонормированных полиномов Лагерра (9.1) посредством равенств (9.2) и (9.3), полна в $W^r_{L^2_\rho(0,\infty)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt. \tag{9.4}$$

Найдем явное представление для полиномов $l^\alpha_{r,r+k}(x)$, свободное от интеграла с переменным верхним пределом. С этой целью обратимся к свойству (8.6) и запишем

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}L_k^\alpha(t)dt = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\frac{d^r}{dt^r}L_{k+r}^{\alpha-r}(t)dt$$

$$= (-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{x^\nu}{\nu!}\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)}. \tag{9.5}$$

Далее

$$\{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}^{(\nu)} = (-1)^\nu L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(t), \tag{9.6}$$

а в силу (8.2)

$$L_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(0) = \binom{k+\alpha}{k+r-\nu} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \tag{9.7}$$

Сопоставляя (9.6) и (9.7), имеем

$$B_{k,\nu}^\alpha = \{L_{k+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)} = (-1)^\nu\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!}. \tag{9.8}$$

Из (9.5) и (9.8) находим

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}L_k^\alpha(t)dt =$$

$$(-1)^r L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - (-1)^r\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{B_{k,\nu}^\alpha x^\nu}{\nu!}. \tag{9.9}$$

Из (9.1), (9.3) и (9.9) получаем $(k=0,1,\ldots)$

$$l^\alpha_{r,r+k}(x) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{h_k^\alpha}}\left[L_{k+r}^{\alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{B_{k,\nu}^\alpha x^\nu}{\nu!}\right]. \tag{9.10}$$

Из (9.8) следует, что если $\alpha=0$, то $B_{k,\nu}^\alpha = 0$ для всех $\nu = 0,1,\ldots,r-1$ и, как следствие, в этом случае равенство (9.10) принимает вид

$$l^0_{r,r+k}(x) = (-1)^r L_{k+r}^{-r}(x), \quad k=0,1,\ldots \tag{9.11}$$

Поскольку в силу равенства (8.7) $L_{k+r}^{-r}(t) = \frac{(-t)^r}{(k+r)^{[r]}} L_k^r(t)$, то (9.11) можно переписать еще в следующем виде

$$l_{r,r+k}^0(x) = \frac{x^r}{(k+r)^{[r]}} L_k^r(x), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{9.12}$$

Ряд Фурье по полиномам $l_{r,k}^\alpha(x)$, ортогональным по Соболеву и порожденным общими полиномами Лагерра $L_k^\alpha(x)$ согласно (0.7) имеет следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k}^\alpha l_{r,k}^\alpha(x), \tag{9.13}$$

где

$$f_{r,k}^\alpha = \int_0^\infty f^{(r)}(t) l_{k-r}^\alpha(t) e^{-t} t^\alpha dt. \tag{9.14}$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$ ряд (9.13) принимает, в силу (9.12), следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + x^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k+r}^0 \frac{L_k^r(x)}{(k+r)^{[r]}}. \tag{9.15}$$

10. Некоторые сведения о полиномах Эрмита

Полиномы Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{10.1}$$

обладают следующим свойством ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \pi^{\frac{1}{2}} 2^n n! \delta_{nm}, \tag{10.2}$$

из которого, полагая

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{(\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!)^{\frac{1}{2}}}, \tag{10.3}$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} h_n(x) h_m(x)\, dx = \delta_{nm}. \tag{10.4}$$

Дифференциальное свойство полиномов Эрмита, в частности, выражается следующим равенством:

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x) \tag{10.5}$$

и, как следствие,

$$H_n(x) = \frac{H_{n+r}^{(r)}(x)}{2^r (n+r)^{[r]}}. \tag{10.6}$$

Отметим также следующие равенства [23]:

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{\nu=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{(2x)^{n-2\nu}}{(n-2\nu)!}, \tag{10.7}$$

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}, \quad H_{2m+1}(0) = 0. \tag{10.8}$$

Из (10.5) и (10.8) имеем

$$z_n^\nu = H_n^{(\nu)}(0) = 2^\nu n^{[\nu]} H_{n-\nu}(0) = \begin{cases} (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}, & \text{если } n-\nu = 2m, \\ 0, & \text{если } n-\nu = 2m+1. \end{cases} \tag{10.9}$$

11. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные полиномами Эрмита

Положим $\rho = \rho(x) = e^{-x^2}$ и рассмотрим пространство $L^2_\rho(\mathbb{R})$. Полиномы Эрмита $h_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, определенные равенством (10.3), образуют [23] полную в $L^2_\rho(\mathbb{R})$ ортонормированную систему. Эта система порождает на $\mathbb{R}$ новую систему полиномов $h_{r,k}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, определенных равенствами

$$h_{r,k}(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1 \tag{11.1}$$

и

$$h_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} h_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{11.2}$$

Теорема 7. *Система полиномов $\{h_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой ортонормированных полиномов Эрмита (10.3) посредством равенств (11.1) и (11.2), полна в $W^r_{L^2_\rho(\mathbb{R})}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) \rho(t) dt. \tag{11.3}$$

Доказательство этой теоремы, совершенно аналогичное доказательству теоремы 1, мы опускаем.

Найдем явное представление для полиномов $h_{r,r+k}(x)$, свободное от интеграла с переменным верхним пределом. С этой целью обратимся к свойству (10.6) и запишем

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} H_k(t) dt =$$

$$\frac{1}{2^r (k+r)^{[r]} (r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} H_{k+r}(t) dt$$

$$= H_{k+r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \{H_{k+r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)}. \tag{11.4}$$

Далее в силу (10.9)

$$\{H_{k+r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)} = z_{k+r}^{\nu}. \tag{11.5}$$

Сопоставляя (11.5) с (11.4), имеем

$$\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}H_k(t)dt = H_{k+r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} z_{k+r}^{\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!}. \tag{11.6}$$

Из (11.2), (10.3) и (11.6) получаем ($k = 0, 1, \ldots$)

$$h_{r,r+k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{\frac{1}{2}}2^k k!}}\left[H_{k+r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} z_{k+r}^{\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!}\right]. \tag{11.7}$$

Ряд Фурье по полиномам $h_{r,k}(x)$, ортогональным по Соболеву и порожденным полиномами Эрмита $h_k(x)$ согласно (11.1) и (11.2) имеет следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_{r,k}h_{r,k}(x), \tag{11.8}$$

где

$$\hat{f}_{r,k} = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)h_{k-r}(t)e^{-t^2}dt. \tag{11.9}$$

Список литературы

[1] Шарапудинов И.И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Матем. сборник. 2000. Т. 191, вып. 5. С. 143–160.

[2] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 765–795.

[3] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала. Издательство Дагестанского научного центра. 2004. 176 с.

[4] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Матем. сборник. 2006. Т. 197, вып. 3. С. 135–154.

[5] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Матем. заметки. 2008. Т. 84, вып. 3. С. 452–471.

[6] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сборник. 2003. Т. 194, вып. 3. С. 115–148.

[7] Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Матем. заметки. 2010. Т. 88, вып. 1. С. 116–147.

[8] Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.

[9] Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P. and Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65. Pp. 151–175.

[10] Marcellan F., Alfaro M. and Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1993. Vol. 48. North-Holland. Pp. 113–131.

[11] Meijer H.G. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.

[12] Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Iss. 2. Pp. 289–303.

[13] Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. Pp. 547–594.

[14] Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015. Vol. 33. Iss. 3. Pp. 308–352.

[15] Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 310–321.

[16] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Матем. заметки. 2016. (Принята к печати).

[17] Шарапудинов И.И. Ортогональные по Соболеву системы функций, ассоциированные с ортогональной системой функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. (Принята к печати).

[18] Шарапудинов И.И., Магомед-Касумов М.Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференциальные уравнения. 2016. (Принята к печати).

[19] Шарапудинов И.И. Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сиб. матем. журн. 2016. (Принята к печати).

[20] Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. 2016. (Принята к печати).

[21] Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Разностные уравнения и полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Владикавказский математический журнал. 2016. (Принята к печати).

[22] Гаджимирзаев Р.М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 388–395.

[23] Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962. 500 с.

[24] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва. АФЦ. 1999. 561 с.

[25] Muckenhoupt B. Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 23. Iss. 2. Pp. 306–310.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН,
Дагестанский государственный педагогический университет
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию
29.07.2016

З. Д. Гаджиева (Z. D. Gadzhieva)
Дагестанский научный центр РАН,
Дагестанский государственный педагогический университет
E-mail: zula-1976@bk.ru

Р. М. Гаджимирзаев (R. M. Gadzhimirzaev)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: ramis3004@gmail.com