УДК 517.929.4+519.21

Р. И. Кадиев

Асимптотическая устойчивость линейной импульсной системы дифференциальных уравнений Ито с линейными запаздываниями

Исследуются вопросы асимптотической p-устойчивости ($2 \leqslant p < \infty$) тривиального решения относительно начальных данных для линейной однородной импульсной системы дифференциальных уравнений Ито с линейными запаздываниями. Исследование проводится методом вспомогательных или модельных уравнений. Получены достаточные условия устойчивости в терминах параметров исследуемой системы.

Библиография: 15 названий.

Questions are investigated asymptotic p-stability ($2 \leqslant p < \infty$) trivial solutions of rather initial data for the linear uniform pulse system of the differential equations of Ito with the linear delays. Research is conducted by method auxiliary or model equations. Sufficient stability conditions are received in terms of parameters of the studied system.

Bibliography: 15 items.

Ключевые слова: устойчивость решений, дифференциальные уравнения Ито с импульсными воздействиями, линейные запаздывания.

Keywords: stability of decisions, differential Ito's equations with pulse influences, linear delays.

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения описывают многие реальные, практически важные задачи современной физики, биологии, экономики, кибернетики и т.д. Импульсные дифференциальные уравнения Ито с последействием являются хорошей математической моделью для финансовых процессов (см. [1]). Среди различных вопросов, возникающих при решении таких задач, один из важнейших – вопрос об устойчивости решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений.

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных математиков. В этой области фундаментальные исследования быстро находят приложения, которые в свою очередь постоянно выдвигают перед теорией новые проблемы.

Исследования устойчивости систем со случайными параметрами приобрели широкий размах после появления 1960 г. работы И.Я. Каца и Н.Н. Красовского, в которой даны основополагающие определения стохастической устойчивости и впервые применены функции Ляпунова в исследованиях вопросов устойчивости для таких систем. Теория устойчивости стохастических систем функционально-дифференциальных уравнений получила дальнейшее развитие в работах И.И. Гихмана, А.Я. Дороговцева, И.Я. Каца, В.Б. Колмановского, Д.Г. Кореневского, Г.Н. Мильштейна, В.Р. Носова, А.Е. Родкиной, Р.З. Хасьминского, Д.Я. Хусаинова, Е.Ф. Царькова, J. Appleby, H.J. Kushner, S.—E. Mohammed, X. Mao, R. Wu, E. Pardoux, M. Pignol (см. также библиографию в монографиях [2, 3, 4, 5]). В этих работах обычно применялся традиционный метод исследования стохастической устойчивости, основанный на функционалах Ляпунова – Красовского – Разумихина. Однако применение этих методов во многих случаях встречало серьёзные трудности. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удавалось доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических функционально-дифференциальных уравнений. С другой стороны, связь между устойчивостью по Ляпунову и принадлежностью решений определенным функциональным пространствам, т.е. допустимостью пар пространств, которая является определяющим в теории устойчивости детерминированных функционально-дифференциальных уравнений, практически не изучалась в стохастическом анализе другими авторами. В детерминированном случае при исследовании вопросов устойчивости высокую эффективность показал метод вспомогательных или «модельных» уравнений – «W-метод» Н.В. Азбелева. Этот метод применительно к стохастическим функционально-дифференциальным уравнениям развит авторами данной статьи. Он является, в принципе, универсальным методом. Это не означает, конечно, что он всегда дает наилучшие результаты. Однако, по крайней мере, этот метод может помочь во многих «безнадежных» ситуациях, где трудно использовать более традиционный «инструментарий». Этот метод позволяет обойти некоторые трудности традиционных схем, возникающие при изучении вопросов устойчивости для уравнений с неограниченными запаздываниями, со случайными коэффициентами и запаздываниями, импульсными воздействиями.

Для импульсных дифференциальных уравнений Ито с последействием вопросы устойчивости решений ранее, по-видимому, другими авторами не рассматривались. В работах [6, 7] изучалась экспоненциальная p-устойчивость ($2 \leqslant p < \infty$) тривиального решения по начальной функции для линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием. Исследования проведены методом вспомогательных или «модельных» уравнений, изложенным подробно для более общего уравнения в работах [8, 9, 10].

В настоящей работе исследуются вопросы асимптотической p-устойчивости ($2 \leqslant p < \infty$) тривиального решения относительно начальных данных для линейной однородной импульсной системы дифференциальных уравнений Ито с линейными запаздываниями. Исследование проводится также методом вспомогательных уравнений. Конкретный вид уравнения и применяемый метод позволяют исследовать на устойчивость решение исходного уравнения и получать конструктивные достаточные признаки в терминах параметров исследуемого уравнения. Для этого изучается устойчивость для уравнения, полученного из исходного, заменой полуоси $[0,\infty)$ на полуось $[T,\infty)$, где T произвольное положительное число. Условия устойчивости сформулированы в терминах коэффициентов, запаздываний и импульсов исходного уравнения, и должны выполняться начиная с некоторого момента времени из полуоси $[0,\infty)$.

1. Объект и задача исследования

Пусть: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, P)$ – стохастический базис; $k^n(T)$ – линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_T$ – измеримых случайных величин ($k^n(0) = k^n$); $\mathcal{B}_i, i = 2,...,m$ – скалярные независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leqslant p < \infty$; L^T_∞ – линейное нормированное пространство скалярных, в существенном ограниченных функций на $[T,\infty)$ с обычной нормой ($L^0_\infty = L_\infty$); $\bar{L}^n_q(T)$ – линейное пространство n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[T,\infty)$, траектории которых почти наверно (п. н.) локально суммируемы со степенью q при $1 \leqslant q < \infty$ и п. н. локально в существенном ограничены при $q = \infty$ ($\bar{L}^n_q(0) = \bar{L}^n_q$); E – символ математического ожидания; $|.|$ – норма в R^n; $||.||$ – норма $n\times n$-матрицы, согласованная с нормой в R^n; N – множество натуральных чисел; μ – мера Лебега на $[0,\infty)$.

Из неравенства (3.1) монографии [11] (с. 117) для момента мартингалов следует, что для заданного $1 \leqslant p < \infty$ и скалярного винеровского процесса $\mathcal{B}$ существует положительное число c_p зависящее от p такое, что имеет место неравенство

$$E\left|\int_a^b \zeta(t)d\mathcal{B}_i(t)\right|^{2p} \leqslant c_p E\left(\int_a^b |\zeta(t)|^2(t)dt\right)^p$$

для любых положительных чисел a, b и $\zeta \in \bar{L}^n_2$. Заметим, что $c_1 = 1$, а в общем случае выражение для c_p также известно (см. например, монографии [5] и [11]). Этим неравенством будем пользоваться в дальнейшем при оценках нормы оператора, а также при других оценках.

Объектом исследования является линейная импульсная система дифференциальных уравнений Ито вида

$$dx(t) = \sum_{j=0}^{m_1}(A_{1j}(t)x(t/h_{1j}) + f_1(t))dt+$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}(A_{ij}(t)x(t/h_{ij}) + f_i(t))d\mathcal{B}_i(t)\ (t \geqslant 0, t \neq \mu_j, j = 1,2,3,...), \tag{1.1}$$

$$x(\mu_j) = A_j x(\mu_j - 0), j = 1,2,3,... \text{ п. н.}, \tag{1.2}$$

где $\mu_j, A_j, j = 1,2,3,...$ – действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < ...,\ \lim\limits_{j\to\infty}\mu_j = \infty$; $A_{ij}, i = 1,...,m, j = 0,...,m_i$ – $n\times n$-матрицы, элементы матриц A_{1j}, $j = 0,...,m_1$ из пространства $\bar{L}^1_1$, а элементы матриц A_{ij}, $i = 2,...,m, j = 0,...,m_i$ из пространства $\bar{L}^1_2$; h_{ij}, $i = 1,...,m, j =$

$0, ..., m_i$ – действительные числа такие, что $h_{ij} \geqslant 1$ при $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$; $f_1 \in \bar{L}_1^n$, $f_i \in \bar{L}_2^n$ при $i = 2, ..., m$. Отметим, что уравнение (1.1) – (1.2) называют однородным, если $f_i \equiv 0$ при $i = 1, ..., m$.

Замечание 1. Уравнение (1.1) – (1.2) можно записать в другой форме, используя дельта-функции, задающие моменты действия импульсов, в следующем виде

$$dx(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(1 - A_j)\delta(t - \mu_j)x(t)dt + \sum_{j=0}^{m_1}(A_{1j}(t)x(t/h_{1j}) + f_1(t))dt+$$
$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}(A_{ij}(t)x(t/h_{ij}) + f_i(t))d\mathcal{B}_i(t) \ (t \geqslant 0).$$

Если в (1.2) $A_j = 1$ при $j = 1, 2, 3, ...$, то уравнение (1.1) – (1.2) называют дифференциальным уравнением Ито с последействием и при этом условие (1.2) отбрасывают. Если, кроме того, в (1.1) $h_{ij} = 1$ при $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$, то уравнение (1.1) называют «обыкновенным» дифференциальным уравнением Ито.

В дальнейшем мы также будем пользоваться следующей записью уравнения (1.1) – (1.2):

$$dx(t) = ((Vx)(t) + f(t))dZ(t)\,(t \geqslant 0),$$

где

$$(Vx)(t) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}(1 - A_j)\delta(t - \mu_j)x(t) + \sum_{j=0}^{m_1} A_{1j}(t)x(t/h_{1j}), \sum_{j=0}^{m_2} A_{2j}(t)x(t/h_{2j}), ..., \right.$$
$$\left. \sum_{j=0}^{m_m} A_{mj}(t)x(t/h_{mj})\right),$$

$f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t))$, $Z(t) = col(t, \mathcal{B}_2(t), ..., \mathcal{B}_m(t))$.

Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что A_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 0, ..., m_i$ удовлетворяют условиям:

1) $\|A_{1j}(t)\| \leqslant a_{1j}(t)$ $P \times \mu$-п.в., где a_{1j} – локально суммируемая функция при $j = 0, ..., m_1$;

2) $\|A_{ij}(t)\| \leqslant a_{ij}(t)$ $P \times \mu$-п.в., где a_{ij} – локально суммируемая с квадратом функция при $i = 2, ..., m, j = 0, ..., m_i$.

Пусть D_T^n состоит из n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[T, +\infty)$, траектории которых п.н. непрерывно справа и имеют пределы слева ($D_0^n = D^n$); $\gamma : [0, +\infty) \to R^1$ – положительная непрерывная функция.

Введем следующие обозначения линейных нормированных пространств:

$$M_p^{\gamma}(T) = \left\{x : x \in D_T^n, ||x||_{M_p^{\gamma}(T)} \overset{def}{=} \sup_{t \geqslant T} (E|\gamma(t)x(t)|^p)^{1/p} < \infty\right\}$$
$$(M_p^{\gamma}(0) = M_p^{\gamma}, M_p^1(T) = M_p(T));$$

$$k_p^n(T) = \left\{\alpha : \alpha \in k^n(T), ||\alpha||_{k_p^n(T)} \overset{def}{=} (E|\alpha|^p)^{1/p} < \infty\right\} (k_p^n(0) = k_p^n).$$

Из результатов работы [12] следует, что через любое начальное условие $x(0) \in k^n$ проходит единственное решение уравнения (1.1) – (1.2) (с точностью до P-эквивалентности). Обозначим это решение через $x_f(t, x(0))$, а решение однородного уравнения (1.1) – (1.2), проходящее через начальное условие $x(0) \in k^n$ обозначим через $x(t, x(0))$, т. е. $x_0(t, x(0)) = x(t, x(0))$.

Справедлива следующая

Лемма 1.1. *Для решения $x_f(t, x(0))$ уравнения (1.1) – (1.2), где $x(0) \in k^n$ задает начальное условие для этого решения, имеет место представление*

$$x_f(t, x_0) = X(t)x(0) + (Cf)(t)(t \geqslant 0) \tag{1.3}$$

где $X(t)(X(0) = \bar{E}$ – единичная матрица) – $n \times n$-матрица, столбцами которой являются решения однородного уравнения (1.1) – (1.2) (фундаментальная матрица), а $C : \bar{L}_1^n \times \bar{L}_2^n \times ... \times \bar{L}_2^n \to D^n$ – линейный оператор (оператор Коши) такой, что Cf – решение уравнения (1.1) – (1.2), удовлетворяющее условию $(Cf)(0) = 0$.

Представление (1.3) является центральным результатом в теории устойчивости решений уравнения (1.1) – (1.2). В силу этого представления асимптотические свойства решений уравнения (1.1) – (1.2) определяются фундаментальной матрицей и оператором Коши для этого уравнения.

Определение 1. Тривиальное решение $x_0(t, 0) \equiv 0$ однородного уравнения (1.1) – (1.2) называют:

– *p-устойчивым*, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\eta(\epsilon) > 0$, что при любом $x_0 \in R^n$ и $|x_0| < \eta(\epsilon)$ будет выполнено неравенство $E|x(t, x_0)|^p \leqslant \epsilon$ для любого $t \geqslant 0$;

– *асимптотически p-устойчивым*, если оно p-устойчиво, и, кроме того, для любого $x_0 \in R^n$ и $|x_0| < \eta(\epsilon)$ будет $\lim\limits_{t\to+\infty} E|x(t, x_0)|^p = 0$.

Заметим, что в предыдущих определениях величина x_0 – неслучайная. В противном случае вместо $|x_0| < \eta(\epsilon)$ надо писать $E|x_0|^p < \eta(\epsilon)$.

Замечание 2. Аналогично дается определение устойчивости любого решения уравнения (1.1) – (1.2). В силу формулы (1.3) устойчивость любого решения уравнения (1.1) – (1.2) эквивалентна устойчивости тривиального решения этого же уравнения. Поэтому в дальнейшем вместо термина «устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1.1) – (1.2)» будем использовать термин «устойчивость уравнения (1.1) – (1.2)». Кроме того, если уравнение (1.1) – (1.2) асимптотически p-устойчиво, то при любом $x_0 \in R^n$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} E|x(t, x_0)|^p = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.

А) Уравнение (1.1) – (1.2) p-устойчиво тогда и только тогда, когда $x(., x_0) \in M_p$ для всех $x_0 \in R^n$.

Б) Уравнение (1.1) – (1.2) асимптотически p-устойчиво тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $\gamma(t)$, $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$ $(t \geqslant 0)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty$ такая, что $x(., x_0) \in M_p^\gamma$ для всех $x_0 \in R^n$.

Доказательство теоремы является дословным повторением доказательства теоремы 1 работы [9] в силу того, что для решений уравнения (1.1) – (1.2) имеет место представление (1.3).

Теорема 1 устанавливает эквивалентность между различными видами p-устойчивости уравнения (1.1) – (1.2) и принадлежности решения $x(.,x_0)$ однороднго уравнения (1.1) – (1.2) соответствующему функциональному пространству при любом $x_0 \in R^n$. На основе этой теоремы удобно ввести новое общее понятие устойчивости уравнения (1.1) – (1.2).

Определение 2. Уравнение (1.1) – (1.2) назовем M_p^γ-устойчивым, если для любого начального условия $x_0 \in k_p^n$ имеем $x(.,x_0) \in M_p^\gamma$.

Из теоремы 1 для уравнения (1.1) – (1.2) имеем:

– из M_p-устойчивости следует p-устойчивость;

– из M_p^γ-устойчивости (где $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$ $(t \geqslant 0)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty$) следует асимптотическая p-устойчивость.

Для установления M_p^γ-устойчивости уравнения (1.1) – (1.2) необходимо проверить принадлежность решения $x(.,x_0)$ однородного уравнения (1.1) – (1.2) пространству M_p^γ при любом начальном условии $x_0 \in k_p^n$. Будем проверять это условие, используя метод вспомогательных уравнений, известный также как W-метод [8, 9, 10].

2. Метод исследования

Как уже отмечалось ранее, для исследования асимптотической p-устойчивости уравнения (1.1) – (1.2) применяется метод вспомогательных или модельных уравнений. Этот метод может быть схематически описан следующим образом. Прежде всего, мы устанавливаем эквивалентность между асимптотическим поведением решений и принадлежностью решений исследуемого уравнения некоторым функциональным пространствам на полуоси. В нашем случае эту эквивалентность устанавливает теорема 1. Затем мы проверяем свойство принадлежности решений исследуемого уравнения функциональным пространствам на полуоси, выбирая более простое уравнение (называемое вспомогательным или модельным уравнением), которое уже обладает требуемым свойством. С помощью этого вспомогательного уравнения исходное уравнение преобразовывается к «интегральному» уравнению. Если последнее разрешимо в соответствующем пространстве, то исследуемая устойчивость доказана. Разрешимость полученного уравнения проверяется методами функционального анализа.

W-метод, в его настоящем виде, был предложен Н.В. Азбелевым, но согласно его же комментариям, этот метод восходит к Г. Фубини и Ф. Трикоми. Первоначально этот метод описывал способ регуляризации краевых задач для детерминированных дифференциальных уравнений. Позже он был развит, обобщен и применен в теории устойчивости детерминированных функционально-дифференциальных уравнений.

Для установления принадлежности решения $x(.,x_0)$ однородного уравнения (1.1) – (1.2) пространству M_p^γ при любом начальном условии $x_0 \in k_p^n$ воспользуемся «W-преобразованием», т. е. эквивалентным преобразованием уравнения

(1.1) – (1.2). Для описания W-преобразования уравнения (1.1) – (1.2) рассмотрим модельное уравнение, асимптотические свойства решений которого известны. Пусть модельное уравнение имеет вид

$$dx(t) = [(Qx)(t) + g(t)]dZ(t)(t \geqslant 0),$$

где $Q : D^n \to \bar{L}_1^n \times \bar{L}_2^n \times ... \times \bar{L}_2^n$-линейный оператор (такого же вида как и V), $g \in \bar{L}_1^n \times \bar{L}_2^n \times ... \times \bar{L}_2^n$. Предполагается, что для любого начального условия $x_0 \in k^n$ существует единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение x выбранного модельного уравнения. Тогда, в силу леммы, для этого решения x имеет место представление $x(t) = U(t)x_0 + (Wg)(t)(t \geqslant 0)$, где U – фундаментальная матрица, а W – оператор Коши для этого же модельного уравнения.

Уравнение (1.1) – (1.2), используя модельное уравнение, перепишем в виде

$$dx(t) = [(Qx)(t) + ((V - Q)x)(t) + f(t)]dZ(t)(t \geqslant 0)$$

или

$$x(t) = U(t)x_0 + (W(V - Q)x)(t) + (Wf)(t)(t \geqslant 0).$$

Обозначив $W(V - Q) = \Theta$, получим $((I - \Theta)x)(t) = U(t)x_0 + (Wf)(t)\ (t \geqslant 0)$.

Пусть модельное уравнение M_p^γ-устойчиво, а оператор Θ действует в пространстве M_p^γ. Тогда известно [10, 11], *если оператор $(I - \Theta) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ непрерывно обратим, то уравнения* (1.1) – (1.2) *M_p^γ-устойчиво.*

Заметим, что при произвольном, априорном выборе M_p^γ-устойчивого модельного уравнения бывают случаи, когда оператор Θ даже не действует в соответствующем функциональном пространстве, в то время как уравнение (1.1) – (1.2) M_p^γ-устойчиво. Однако, если уравнение (1.1) – (1.2) M_p^γ-устойчиво, то всегда найдется хотя бы одно M_p^γ-устойчивое модельное уравнение такое, что оператор Θ будет действовать в соответствующем функциональном пространстве, причем оператор $I - \Theta$ будет непрерывно обратим в этом же пространстве. В качестве такого модельного уравнения можно взять само уравнение (1.1) – (1.2).

Наиболее трудным является вопрос нахождения условий непрерывной обратимости оператора $(I - \Theta) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$. Непрерывную обратимость оператора $(I - \Theta) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ можно установить, оценивая норму оператора Θ в пространстве M_p^γ. Если она меньше 1, то непрерывная обратимость гарантирована.

В заключение этого пункта приведем следующий известный результат: *пусть существует M_p^γ-устойчивое модельное уравнение, оператор Коши которого удовлетворяет дополнительным условиям (например, условия* **R2** *работы* [13]*), причем оператор Θ действует в пространстве M_p, а оператор $(I - \Theta) : M_p \to M_p$ непрерывно обратим. Тогда уравнение* (1.1) – (1.2) *M_p^γ-устойчиво, если оператор V для уравнения* (1.1) – (1.2) *удовлетворяет некоторым дополнительным условиям (Δ-условиям, см. работы* [10, 13]*).* Более точно этот результат, в случае более общего функционально-дифференциального уравнения по семимартингалу, изложен в работе [13]. Этот результат также справедлив и в случае уравнения (1.1) – (1.2), его доказательство является дословным повтором доказательства из работы [13]. Этот результат будет применен для получения достаточных условий асимптотической p-устойчивости уравнения (1.1) – (1.2).

3. Основные результаты

Из теории устойчивости линейных обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что при изменении коэффициентов на конечном промежутке времени устойчивость или неустойчивость решений сохраняется. В случае линейных детерминированных функционально-дифференциальных уравнений аналогичные исследования также проводились. Теорема 4 этого пункта является, в некотором смысле, аналогом таких результатов для уравнения (1.1) – (1.2). Эта теорема использована при получении основного результата работы (теорема 5) – достаточных условий асимптотической p-устойчивости уравнения (1.1) – (1.2). Эти условия сформулированы в терминах коэффициентов, запаздываний и импульсов уравнения (1.1) – (1.2) и должны выполняться начиная с некоторого момента времени из полуоси $[0,\infty)$.

Следующее предложение будет использовано при доказательстве теоремы 4.

Теорема 2. *При любом фиксированном $s \in [0,\infty)$ и любом начальном условии $x_0 \in k_{2p}^n$ для решения однородного уравнения* (1.1) – (1.2) $x(t,x_0)$ *имеет место неравенство* $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant s} E|x(t,x_0)|^{2p} < \infty$.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) *имеют место неравенства* $\prod\limits_{j=1}^{\infty} |A_j| < \infty$, $\int\limits_0^{\infty} a_{1j}(\tau)d\tau < \infty$ *при* $j = 0,...,m_1$, $\int\limits_0^{\infty}(a_{ij}(\tau))^2 d\tau < \infty$ *при* $i = 2,...,m$, $j = 0,...,m_i$. *Тогда система* (1.1) – (1.2) M_{2p}*-устойчива.*

Пусть $T \in [0,\infty)$, $k_T = min\{j : j \in N, \mu_j > T\}$. Наряду с уравнением (1.1) – (1.2) рассмотрим следующее уравнение:

$$dy(t) = \sum_{j=0}^{m_1} A_{1j}(t)y(t/h_{1j})dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} A_{ij}(t)y(t/h_{ij})d\mathcal{B}_i(t) \ (t \geqslant T), \tag{3.1}$$

$$y(\nu) = \psi(\nu) \quad (\nu < T), \tag{3.2}$$

$$y(\mu_j) = A_j y(\mu_j - 0), j = k_T, k_T + 1, ... \text{ п. н.}, \tag{3.3}$$

где $\psi(\nu)$ $(\nu < T)$ – случайный процесс, который не зависит от винеровских процессов $\mathcal{B}_i(t)$ $(t \geqslant T), i = 2,...,m$ и имеет п. н. в существенном ограниченные траектории, а остальные параметры определены в уравнении (1.1) – (1.2). Обозначим через $y(t,y_0,\psi)$ – решение уравнения (3.1) – (3.3) такое, что $y(T,y_0,\psi) = y_0$. Уравнение (3.1) – (3.3) называют однородным, если $\psi \equiv 0$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Уравнение* (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво, если при некотором* $T \geqslant 0$ *и любых* $y_0 \in k^n(T)$, ψ *таких, что* $\underset{\nu<T}{vrai\, sup}\, E\,|\psi(\nu)|^{2p} < \infty$, $E\,|y_0|^{2p} < \infty$ *для решения* $y(t, y_0, \psi)$ *уравнения* (3.1) – (3.3) *имеет место неравенство*

$$E\,|\gamma(t)y(t, y_0, \psi)|^{2p} \leqslant \hat{c}\left(E\,|y_0|^{2p} + \underset{\nu<T}{vrai\, sup}\, E\,|\psi(\nu)|^{2p}\right)\ (t \geqslant T),$$

где $\hat{c}$ *– некоторое положительное число.*

Замечание 3. Если воспользоваться определением $M_{2p}^{\gamma}(T)$-устойчивости тривиального решения однородного уравнения (3.1) – (3.3) относительно начальной функции (см. определение 4 работы [9]), то теорему 4 можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 4′. *Уравнение* (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво, если тривиальное решение однородного уравнения* (3.1) – (3.3) $M_{2p}^{\gamma}(T)$*-устойчиво относительно начальной функции.*

Пусть в дальнейшем $\gamma(t) = t^{\beta}$, где β – некоторое положительное число, $\hat{h}_{ij}(t) = t/h_{ij}$ при $i = 1, .., m$, $j = 0, ..., m_i$, $h^T(t)$, $\chi_h^T(t)$ – функции на $[T, \infty)$, определяемые по функции $h(t)\quad (t \in [T, \infty))$ равенствами

$$h^T(t) = \begin{cases} h(t), \text{ если } h(t) \geqslant T, \\ T, \text{ если } h(t) < T, \end{cases} \quad \chi_h^T(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } h(t) \geqslant T, \\ 0, \text{ если } h(t) < T, \end{cases}$$

$\hat{A}_{ij}(t) = A_{ij}(t)\chi_{\hat{h}_{ij}}^T(t)$ при $i = 1, ..., m$, $j = 0, ..., m_i$, $\xi(t) = 1/t(t \geqslant T)$.

Теорема 5. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) *существуют индексы* $I \subset \{0, ..., m_1\}$, *положительные числа* A, ρ, σ, α, $\gamma_i, i = 1, 2$ *и* $T \in [0, \infty)$ *такие, что* $a_{1j}/\xi \in L_{\infty}^T$ *при* $j = 0, ..., m_1$, $a_{ij}/\sqrt{\xi} \in L_{\infty}^T$ *при* $i = 2, ..., m$, $j = 0, ..., m_i$, $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T + 1, ...$, *элементы матриц* $A_{1k}, k \in I$ *детерминированные функции и*

$$\left\| \exp\left\{ \int_s^t \sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(\tau)d\tau \right\} \right\| \leqslant \exp\{-\alpha \ln(t/s)\},\ \ A\exp\{-\alpha\rho\} < 1,$$

$$\sum_{k\in I} ta_{1k}(t)\left(\sum_{j=0}^{m_1}\int_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^t a_{1j}(s)ds + c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\left(\int_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^t a_{ij}(s))^2 ds\right)^{0.5}\right) +$$

$$\sum_{k\bar{\in} I} ta_{1k}(t) \leqslant \gamma_1$$

при $t \geqslant T$ μ*-п.в.*, $\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} \underset{t\geqslant T}{vrai\, sup}\, (\sqrt{t}a_{ij}(t)) = \gamma_2$, *а также выполнено неравенство*

$$\frac{\max\{1, A\}(1 - \exp\{-\alpha\sigma\})}{\alpha(1 - \exp\{-\alpha\rho\}A)}\gamma_1 + c_p\gamma_2\left(\frac{\max\{1, A^2\}(1 - \exp\{-2\alpha\sigma\})}{2\alpha(1 - \exp\{-2\alpha\rho\}A)}\right)^{1/2} < 1. \qquad (3.4)$$

Тогда уравнение (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

Замечание 4. Пуст выполнены условия теоремы 5. Тогда уравнение (1.1) – (1.2) асимптотически $2p$-устойчиво.

4. Следствия теоремы 5

Отметим, что в этом пункте мы будем придерживаться обозначений предыдущего пункта.

Следствие 1. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) $h_{10} = 1$*и существуют положительные числа* $A, \rho, \sigma, \alpha,\ \gamma_i, i = 1, 2$ *и* $T \in [0, \infty)$ *такие, что* , $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T + 1, ...,$ *элементы матрицы* A_{10} *являются детерминированные функции и*

$$\left\| \exp\left\{ \int\limits_s^t \hat{A}_{10}(\tau)d\tau \right\} \right\| \leqslant \exp\{-\alpha \ln(t/s)\},\ A\exp\{-\alpha\rho\} < 1,$$

$\sum\limits_{k=1}^{m_1} ta_{1k}(t) \leqslant \gamma_1$ *при* $t \geqslant T$ μ*-п.в.*, $\sum\limits_{i=2}^{m}\sum\limits_{j=0}^{m_i} \underset{t\geqslant T}{vrai\,sup}\,(\sqrt{t}a_{ij}(t)) = \gamma_2$. *Пусть также выполнено неравенство* (3.4). *Тогда уравнение* (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 5 при $I = \{0\}$.

Следствие 2. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) *существуют положительные числа* $A, \rho, \sigma, \alpha,\ \gamma_i, i = 1, 2$ *и* $T \in [0, \infty)$ *такие, что* $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T + 1, ...,$ *элементы матриц* $A_{1k}, k = 0, ..., m_1$ *детерминированные функции и*

$$\left\| \exp\left\{ \int\limits_s^t \sum_{k=0}^{m_1} \hat{A}_{1k}(\tau)d\tau \right\} \right\| \leqslant \exp\{-\alpha \ln(t/s)\},\ A\exp\{-\alpha\rho\} < 1,$$

$$\sum_{k=0}^{m_1} ta_{1k}(t) \left(\sum_{j=0}^{m_1} \int\limits_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^{t} a_{1j}(s)ds + c_p \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} \left(\int\limits_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^{t} (a_{ij}(s))^2 ds \right)^{0.5} \right) \leqslant \gamma_1$$

при $t \geqslant T$ μ*-п.в.*, $\sum\limits_{i=2}^{m}\sum\limits_{j=0}^{m_i} \underset{t\geqslant T}{vrai\,sup}\,(\sqrt{t}a_{ij}(t)) = \gamma_2$, *а также выполнено неравенство* (3.4). *Тогда уравнение* (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 5 при $I = \{0, ..., m_1\}$.

Пусть в дальнейшем уравнение (1.1) – (1.2) будет скалярным, т. е. $n = 1$. Кроме того, предположим, что $A_{ij}, i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$ – измеримые по Лебегу функции, $A_{1j}, j = 0, ..., m_1$ – локально суммируемы, $A_{ij}, i = 2, ..., m$, $j = 0, ..., m_i$ – локально суммируемы с квадратом. Тогда из теоремы 3 непосредственно получаем

Следствие 3. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) *существуют индексы* $I \subset \{0, ..., m_1\}$, *положительные числа* $A, \rho, \sigma, \alpha,\ \gamma_i, i = 1, 2$ *и* $T \in [0, \infty)$ *такие, что* $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln \mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T + 1, ...,$ $A\exp\{-\alpha\rho\} < 1$,

$\sum\limits_{k\in I} A_{1k}(t) \leqslant -\alpha/t,$

$$\sum_{k\in I} |\hat{A}_{1k}(t)t| \left(\sum_{j=0}^{m_1} \int\limits_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^{t} |A_{1j}(s)|ds + c_p \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=0}^{m_i} \left(\int\limits_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^{t} (A_{ij}(s))^2 ds \right)^{0.5} \right)$$

$$+ \sum_{k\bar{\in} I} |\hat{A}_{1k}(t)| \leqslant \gamma_1$$

при $t \geqslant T$ *μ-п.в.*, $\sum\limits_{i=2}^{m} \sum\limits_{j=0}^{m_i} \underset{t\geqslant T}{vrai\,sup}\, (\sqrt{t}|A_{ij}(t)|) = \gamma_2$, *а также выполнено неравенство* (3.4). *Тогда уравнение* (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

Из следствий 1 и 3 вытекает

Следствие 4. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) *существуют положительные числа* A, ρ, σ, α, $\gamma_i, i = 1, 2$ *и* $T \in [0, \infty)$ *такие, что* $h_{10} = 1$ *для* $t \in [T, \infty)$, $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T + 1, ...,$ $A_{10}(t) \leqslant -\alpha/t$, $\sum\limits_{k=1}^{m_1} |t\hat{A}_{1k}(t)| \leqslant \gamma_1$ *при* $t \geqslant T$ *μ-п.в.*, $A\exp\{-\alpha\rho\} < 1$, $\sum\limits_{i=2}^{m} \sum\limits_{j=0}^{m_i} \underset{t\geqslant T}{vrai\,sup}\, (\sqrt{t}|A_{ij}(t)|) = \gamma_2$, *а также выполнено неравенство* (3.4). *Тогда уравнение* (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

Из следствий 2 и 3 также вытекает

Следствие 5. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) *существуют положительные числа* A, ρ, σ, α, $\gamma_i, i = 1, 2$ *и* $T \in [0, \infty)$ *такие, что* $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T + 1, ...,$ $\sum\limits_{k=0}^{m_1} \hat{A}_{1k}(t) \leqslant -\alpha/t$, $A\exp\{-\alpha\rho\} < 1$,

$$\sum_{k=0}^{m_1} t|\hat{A}_{1k}(t)| \left(\sum_{j=0}^{m_1} \int\limits_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^{t} |A_{1j}(s)|ds + c_p \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=0}^{m_i} \left(\int\limits_{\hat{h}_{1k}^T(t)}^{t} (A_{ij}(s))^2 ds \right)^{0.5} \right) \leqslant \gamma_1$$

при

$t \geqslant T$ *μ-п.в.*, $\sum\limits_{i=2}^{m} \sum\limits_{j=0}^{m_i} \underset{t\geqslant T}{vrai\,sup}\, (\sqrt{t}|A_{ij}(t)|) = \gamma_2$, *а также выполнено неравенство* (3.4). *Тогда уравнение* (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

В дальнейшем предположим, что для некоторого $T \in [0, \infty)$ и чисел $a_{ij} > 0, i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$ коэффициенты и запаздывания в уравнении (1.1) – (1.2) задаются равенствами: $A_{1j}(t) = a_{1j}/t$ при $j = 0, ..., m_1$, $A_{ij}(t) = a_{ij}/\sqrt{t}$ при $i = 2, ..., m, j = 0, ..., m_i$ $(t \in [T, \infty))$ μ-п.в.

Следствие 6. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) *существуют индексы* $I \subset \{0, ..., m_1\}$, *положительные числа* A, ρ, σ, α *такие, что* $|A_j| \leqslant A$,

$\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T+1, ...,$ $\sum\limits_{k\in I} \hat{A}_{1k} \leqslant -\alpha/t$, $A\exp\{-\alpha\rho\} < 1$, *а также выполнено неравенство* (3.4), *где*

$$\gamma_1 = \sum_{k\in I} |a_{1k}| \left(\ln(h_{1k}) \sum_{j=0}^{m_1} |a_{1j}| + c_p\sqrt{\ln(h_{1k})} \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} |a_{ij}| \right) + \sum_{k\bar{\in} I} |a_{1k}|,$$

$$\gamma_2 = \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} |a_{ij}|.$$

Тогда уравнение (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ} – *устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

Справедливость следствия 6 вытекает непосредственно из теоремы 5 и следствия 3 с учетом того, что коэффициенты и запаздывания постоянны, начиная с некоторого $T \in [0,\infty)$.

Следствие 7. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) $h_{10} = 1$ *и существуют положительные числа* A, ρ, σ, α *такие, что* $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T+1, ...,$ $\alpha = -a_{10}$, $A\exp\{-\alpha\rho\} < 1$. *Пусть также выполнено неравенство* (3.4) *при* $\gamma_1 = \sum\limits_{k=1}^{m_1} |a_{1k}|$, $\gamma_2 = \sum\limits_{i=2}^{m}\sum\limits_{j=0}^{m_i} |a_{ij}|$. *Тогда уравнение* (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

Следствие 7 вытекает из следствий 4 и 6.

Следствие 8. *Пусть для уравнения* (1.1) – (1.2) *существуют положительные числа* A, ρ, σ, α *такие, что* $|A_j| \leqslant A$, $\rho \leqslant \ln(\mu_{j+1}/\mu_j) \leqslant \sigma$ *при* $j = k_T, k_T+1, ...,$ $\sum\limits_{k=0}^{m_1} \hat{A}_{1k}(t) \leqslant -\alpha/t$, $A\exp\{-\alpha\rho\} < 1$, *а также выполнено неравенство* (3.4) *при*

$$\gamma_1 = \sum_{k=0}^{m_1} |a_{1k}| \left(\ln(h_{1k}) \sum_{j=0}^{m_1} |a_{1j}| + c_p\sqrt{\ln(h_{1k})} \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} |a_{ij}| \right), \ \gamma_2 = \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} a_{ij}^2.$$

Тогда уравнение (1.1) – (1.2) M_{2p}^{γ}*-устойчиво при некотором* $\beta > 0$.

В справедливости следствия 8 легко убедиться, если учесть следствия 5 и 6.

Замечание 5. В заключение отметим, что в случае, когда уравнение (1.1) – (1.2) является детерминированным дифференциальным уравнением, результаты, полученные в работе также являются новыми.

5. Доказательство основных результатов

Доказательство (Теорема 2). Пусть s любое фиксированное число из $[0,\infty)$ и x_0 произвольная случайная величина из пространства k_{2p}^n. Далее, через $G(t)$ обозначим функцию на $[0,\infty)$, определенную равенством

$$G(t) = \begin{cases} \prod\limits_{0<\mu_j\leqslant t} A_j, \text{ если } t \leqslant s, \\ \prod\limits_{0<\mu_j\leqslant s} A_j, \text{ если } t > s. \end{cases}$$

Очевидно, что $\sup\limits_{t\geqslant 0}|G(t)|<\infty$ и $\sup\limits_{t\geqslant 0}|1/G(t)|<\infty$. Кроме того, для натурального k положим

$$s_k=\inf\left\{\zeta: K\left(\sum_{j=0}^{m_1}\int_0^{\zeta}a_{1j}(\tau)d\tau+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}c_p\left(\int_0^{\zeta}(a_{ij}(\tau))^2d\tau\right)^{0.5}\right)\geqslant k/2\right\},$$

где $K=\sup\limits_{t\geqslant 0}|G(t)|\sup\limits_{t\geqslant 0}|1/G(t)|$. В силу предположений теоремы имеем $s_l\geqslant s$, где

$$l=2K\left[\sum_{j=0}^{m_1}\int_0^{s}a_{1j}(\tau)d\tau+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}c_p\left(\int_0^{s}(a_{ij}(\tau))^2d\tau\right)^{0.5}\right]+1,$$

а квадратные скобки означают целую часть числа.

Рассмотрим конечную последовательность уравнений

$$x_k(t)=x_{k-1}(t)+\sum_{j=0}^{m_1}\int_0^{t}I_k(\tau)(G(t)/G(\tau))A_{1j}(\tau)x_k(\tau/h_{1j})d\tau+$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\int_0^{t}I_k(\tau)(G(t)/G(\tau))A_{ij}(\tau)x_k(\tau/h_{ij})d\mathcal{B}_i(\tau)\ (t\geqslant 0), k=1,...,l, \tag{5.1}$$

где $I_k(\tau)$ – характеристическая функция отрезка $[s_{k-1},s_k]$, определенная на $[0,\infty)$, $x_0(t)=G(t)x_0$, $x_{k-1}(t)$ – решение $(k-1)$-го уравнения последовательности (5.1), а остальные параметры определены в уравнении (1.1) – (1.2).

Тогда, нетрудно видеть, решение k-го уравнения последовательности (5.1) $x_k(t)$ совпадает на отрезке $[0,s_k]$ с решением однородного уравнения (1.1) – (1.2) $x(t,x_0)$ при $k=1,...,l-1$ и $x_l(t)=x(t,x_0)$ при $0\leqslant t\leqslant s$. Для этого достаточно заметить, что однородное уравнение (1.1) – (1.2) эквивалентно следующему интегральному уравнению

$$x(t)=\prod_{0<\mu_j\leqslant t}A_jx(0)+\sum_{j=0}^{m_1}\int_0^{t}\left(\prod_{\tau<\mu_j\leqslant t}A_j\right)A_{1j}(\tau)x(\tau/h_{1j})d\tau+$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\int_0^{t}\left(\prod_{\tau<\mu_j\leqslant t}A_j\right)A_{ij}(\tau)x(\tau/h_{ij})d\mathcal{B}_i(\tau)\ (t\geqslant 0) \tag{5.2}$$

и $G(t)/G(\tau)=\prod\limits_{\tau<\mu_j\leqslant t}A_j$ при $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant s$.

Если мы теперь покажем, что для любого $x_0\in k_{2p}^n$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t\geqslant 0}(E|x_k(t)|^{2p})^{1/2p}<\infty$ для $k=1,...,l$, то отсюда будет следовать, что $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant s}E|x(t,x_0)|^{2p}<\infty$ при любом начальном условии $x_0\in k_{2p}^n$. Заметим, что при предположениях теоремы имеем $\sup\limits_{t\geqslant 0}(E|x_0(t)|^{2p})^{1/2p}<\infty$

Из равенства (5.1) вытекает

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_k(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p}\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_{k-1}(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p}+$$

$$\sum_{j=0}^{m_1}\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|\int_0^t I_k(\tau)(G(t)/G(\tau))A_{1j}(\tau)x_k(\tau/h_{1j})d\tau\right|^{2p}\right)^{1/2p}+$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|\int_0^t I_k(\tau)(G(t)/G(\tau))A_{ij}(\tau)x_k(\tau/h_{ij})d\mathcal{B}_i(\tau)\right|^{2p}\right)^{1/2p}\leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_{k-1}(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p}+$$

$$\sum_{j=0}^{m_1}\sup_{t\geqslant 0}\left(\left(\int_0^t \|I_k(\tau)(G(t)/G(\tau))A_{1j}(\tau)\|d\tau\right)^{(2p-1)/2p}\times\right.$$

$$\left.\left(E\int_0^t \|I_k(\tau)(G(t)/G(\tau))A_{1j}(\tau)\||x_k(\tau/h_{1j})|^{2p}d\tau\right)^{1/2p}\right)+$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}c_p\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left(\int_0^t |I_k(\tau)(G(t)/G(\tau))A_{ij}(\tau)x_k(\tau/h_{ij})|^2d\tau\right)^p\right)^{1/2p}\leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_{k-1}(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p}+$$

$$\sum_{j=0}^{m_1}\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t I_k(\tau)|G(t)/G(\tau)|a_{1j}(\tau)d\tau\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_k(t/h_{1j})\right|^{2p}\right)^{1/2p}+$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}c_p\sup_{t\geqslant 0}\left(\left(\int_0^t I_k(\tau)|G(t)/G(\tau)|^2(a_{ij}(\tau))^2d\tau\right)^{(p-1)/2p}\times\right.$$

$$\left.\left(E\int_0^t I_k(\tau)|G(t)/G(\tau)|(a_{ij}(\tau))^2|x_k(\tau/h_{ij})|^{2p}d\tau\right)^{1/2p}\right)\leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_{k-1}(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p}+$$

$$K\left(\sum_{j=0}^{m_1}\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t I_k(\tau)a_{1j}(\tau)d\tau+\right.$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} c_p \sup_{t\geqslant 0}\left(\left(\int_0^t I_k(\tau)(a_{ij}(\tau))^2 d\tau\right)^{0.5}\right)\sup_{t\geqslant 0}(E|x_k(t)|^{2p})^{1/2p} \leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_{k-1}(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p} + \rho\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_k(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p},$$

где $\rho < 1$, ввиду выбора s_k для $k = 1, ..., l$.

Отсюда следует, что для любого $x_0 \in k_{2p}^n$ имеет место неравенство $\sup\limits_{t\geqslant 0}\left(E\left|x_k(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p} < \infty$ для $k = 1, ..., l$.

Теорема доказана.

Доказательство (Теорема 3). Теорема доказывается как и теорема 2. Для натурального k положим

$$s_k = inf\left\{\zeta : K\left(\sum_{j=0}^{m_1}\int_0^{\zeta} a_{1j}(\tau)d\tau + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} c_p\left(\int_0^{\zeta}(a_{ij}(\tau))^2 d\tau\right)^{0.5}\right) \geqslant k/2\right\},$$

где $K = \prod\limits_{j=1}^{\infty}|A_j| < \infty$. В силу предположений теоремы имеем $s_l = \infty$, где

$$l = 2K\left[\sum_{j=0}^{m_1}\int_0^{s} a_{1j}(\tau)d\tau + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} c_p\left(\int_0^{s}(a_{ij}(\tau))^2 d\tau\right)^{0.5}\right] + 1,$$

а квадратные скобки по-прежнему обозначают целую часть числа.

Рассмотрим конечную последовательность уравнений

$$x_k(t) = x_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{m_1}\int_0^t I_k(\tau)\left(\prod_{\tau<\mu_j\leqslant t} A_j\right) A_{1j}(\tau)x_k(\tau/h_{1j})d\tau +$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\int_0^t I_k(\tau)\left(\prod_{\tau<\mu_j\leqslant t} A_j\right) A_{ij}(\tau)x_k(\tau/h_{ij})d\mathcal{B}_i(\tau)\ (t\geqslant 0), k = 1, ..., l, \tag{5.3}$$

где $I_k(\tau)$ – характеристическая функция отрезка $[s_{k-1}, s_k]$, определенная на $[0,\infty)$, $x_0(t) = \prod\limits_{0<\mu_j\leqslant t} A_j x_0$, $x_{k-1}(t)$ – решение $(k-1)$-го уравнения последовательности (5.3), а остальные параметры определены в уравнении (1.1) – (1.2).

Тогда, нетрудно заметить, решение k-го уравнения последовательности (5.3) $x_k(t)$ совпадает на отрезке $[0, s_k]$ с решением однородного уравнения (1.1) – (1.2) $x(t, x_0)$ при $k = 1, ..., l-1$ и $x_l(t) = x(t, x_0)$ при $t \in [0,\infty)$. Для этого достаточно заметить, что однородное уравнение (1.1) – (1.2) эквивалентно интегральному уравнению (5.2).

Если мы теперь покажем, что для любого $x_0 \in k_{2p}^n$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t\geqslant 0}(E|x_k(t)|^{2p})^{1/2p} < \infty$ для $k = 1, ..., l$, то отсюда будет следовать, что

$\sup\limits_{t\geqslant 0}(E|x(t,x_0)|^{2p})^{1/2p} < \infty$ при любом начальном условии $x_0 \in k_{2p}^n$ и это будет означать M_{2p}-устойчивость системы (1.1) – (1.2). Заметим, что при предположениях теоремы имеет место оценка $\sup\limits_{t\geqslant 0}(E|x_0(t)|^{2p})^{1/2p} < \infty$. Для доказательства того, что для любого $x_0 \in k_{2p}^n$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t\geqslant 0}(E|x_k(t)|^{2p})^{1/2p} < \infty$ при $k = 1, ..., l$ надо повторить выкладки, проведенные при доказательстве теоремы 2, заменив $(G(t)/G(\tau))$ на $\prod\limits_{\tau<\mu_j\leqslant t} A_j$.

Теорема доказана.

Доказательство (Теорема 4). Пусть при некотором $T \geqslant 0$ и любых $y_0 \in k^n(T)$, ψ таких, что $\underset{\nu<T}{vrai\, sup}\ E\,|\psi(\nu)|^{2p} < \infty$, $E\,|y_0|^{2p} < \infty$ для решения уравнения (3.1) – (3.3) $y(t, y_0, \psi)$ имеет место неравенство

$$E\,|\gamma(t)y(t,y_0,\psi)|^{2p} \leqslant \hat{c}\left(E\,|y_0|^{2p} + vrai\sup_{\nu<T} E\,|\psi(\nu)|^{2p}\right)\ (t \geqslant T),$$

где $\hat{c}$ – некоторое положительное число. Необходимо показать при этом, что для любого начального условия $x_0 \in k_{2p}^n$ для решения $x(t, x_0)$ однородной системы (1.1) – (1.2) выполняется $x(., x_0) \in M_{2p}^{\gamma}$. В уравнении (1.1) – (1.2) в качестве $\psi(\nu)$ возьмем случайный процесс, совпадающий с с $x(\nu, x_0)$ при $0 \leqslant \nu < T$. Тогда, если $y_0 = x(T, x_0)$, то $x(t, x_0) = y(t, y_0, \psi)$ при $t \geqslant T$. В силу теоремы 2 имеем $E\,|y_0|^{2p} < \infty$, $\underset{\nu<T}{vrai\, sup}\ E\,|\psi(\nu)|^{2p} < \infty$ для любого $x_0 \in k_{2p}^n$. Отсюда и в силу предположений теоремы получим M_{2p}^{γ}-устойчивость системы (1.1) – (1.2).

Теорема доказана.

Доказательство (Теорема 5). В силу теоремы $4'$ для доказательства теоремы 5 достаточно показать, что в предположениях теоремы тривиальное решение однородного уравнения (3.1) – (3.3) $M_{2p}^{\gamma}(T)$-устойчиво относительно начальной функции.

Для доказательства $M_{2p}^{\gamma}(T)$-устойчивости тривиального решения однородного уравнения (3.1) – (3.3) относительно начальной функции воспользуемся следствием 4.2 из работы [13]. Сначала заметим, что результаты работы [13] остаются в силе, если в уравнениях и соответственно в других местах выражение «$t \geqslant 0$» заменить на «$t \geqslant T$», а уравнение (29) из этой работы заменить уравнением (3.1) – (3.3).

В качестве модельного уравнения возьмем уравнение вида

$$dy(t) = \left(\sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(t)y(t) + f_0(t)\right)dt+$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(t)d\mathcal{B}_i(t)\ (t \geqslant T, t \neq \mu_j, j = k_T, k_T+1, ...),$$

$$y(\mu_j) = A_j y(\mu_j - 0), j = k_T, k_T+1, ... \text{ п. н.},$$

где $f_0 \in \bar{L}_1^n(T)$, $f_i \in \bar{L}_2^n(T)$ при $i = 2, ..., m$, а остальные параметры определены в уравнении (1.1) – (1.2).

Заметим, что из результатов работы [12] следует, что через любую $\mathcal{F}_T$-измеримую случайную величину $y(T)$ (начальное условие) проходит единственное решение модельного уравнения (с точностью до P-эквивалентности).

Непосредственной проверкой легко убедиться, что для этого решения имеет место представление

$$y(t) = \exp\left\{\int_T^t \sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(s))ds\right\}\left(\prod_{T<\mu_j\leqslant t} A_j\right) y(T)+$$

$$\int_T^t \exp\left\{\int_s^t \sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(\tau)d\tau\right\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t} A_j\right)\bar{f}_0(s)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^m \int_T^t \exp\left\{\int_s^t \sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(\tau)d\tau\right\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t} A_j\right)\bar{f}_i(s)d\mathcal{B}_i(s)(t \geqslant T).$$

Отметим, что в детерминированном случае справедливость аналогичной формулы показана в [14].

Проверим, что при предположениях теоремы модельное уравнение удовлетворяет условиям следствия 4.2 работы [13]. Для этого заметим, что в нашем случае $U(t) = \exp\left\{\int_T^t \sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(s))ds\right\} \prod_{T<\mu_j\leqslant t} A_j$, $C(t,s) = \exp\left\{\int_s^t \sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(\tau))d\tau\right\} \prod_{s<\mu_j\leqslant t} A_j$, и выполнимость условий $\mathbf{R1} - \mathbf{R2}$ работы [13] для выбранного модельного уравнения при предположениях теоремы проверяются непосредственно. Кроме того, выполняются все остальные условия этого следствия, если в уравнении (29) из работы [13] положить $\xi(t) = 1/t$ $(t \geqslant T)$, так что это уравнение совпадет с уравнением (3.1) – (3.3).

Из сказанного выше, а также из следствия 4.2 работы [13] следует, что теорема будет доказана, если будет показана обратимость оператора $(I - \Theta) : M_{2p}(T) \to M_{2p}(T)$, где оператор Θ определяется равенством

$$(\Theta y)(t) = \int_T^t \exp\left\{\int_s^t \sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(\tau)d\tau\right\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t} A_j\right)\left\{\left(\sum_{k\in I} \hat{A}_{1k}(s)\right.\right.$$

$$\int_{h_{1k}^T(s)}^s \left(\sum_{j=0}^{m_1} \hat{A}_{1j}(\tau)(S^T_{\hat{h}_{1j}}y)(\tau)d\tau + \sum_{i=2}^m\sum_{j=0}^{m_i} \hat{A}_{ij}(\tau)(S^T_{\hat{h}_{ij}}y)(\tau)d\mathcal{B}_i(\tau)\right)+$$

$$\left.\sum_{k\bar{\in}I} \hat{A}_{1k}(s)(S^T_{\hat{h}_{1k}}y)(s)\right)ds + \left.\sum_{i=2}^m\sum_{j=0}^{m_i} \hat{A}_{ij}(s)(S^T_{\hat{h}_{ij}}y)(s)d\mathcal{B}_i(s)\right\},$$

$$(S_h^T x)(t) = \begin{cases} x(h(t)), \text{если}\, h(t) \geqslant T, \\ 0, \text{если}\, h(t) < T. \end{cases}$$

.

Оценим норму оператора Θ в пространстве $M_{2p}(T)$.

$$||\Theta y||_{M_{2p}(T)} \leqslant \sup_{t\geqslant T}\left(E\left|\int_T^t \exp\left\{\int_s^t \sum_{k\in I}\hat{A}_{1k}(\tau)d\tau\right\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j\right)\left(\sum_{k\in I}\hat{A}_{1k}(s)\times\right.\right.\right.$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m_1}\int_{h_{1k}^T(s)}^{s}\hat{A}_{1j}(\tau)(S^T_{\hat{h}_{1j}}y)(\tau)d\tau+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\int_{\hat{h}_{1k}^T(s)}^{s}\hat{A}_{ij}(\tau)(S^T_{\hat{h}_{ij}}y)(\tau)d\mathcal{B}_i(\tau)\right)+$$

$$\left.\left.\left.\sum_{k\bar{\in} I}\hat{A}_{1k}(s)(S^T_{\hat{h}_{1k}}y)(s)\right)ds\right|^{2p}\right)^{1/2p}+$$

$$c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\sup_{t\geqslant T}\left(E\left(\int_T^t\left\|\exp\left\{\int_s^t\sum_{k\in I}\hat{A}_{1k}(\tau)d\tau\right\}\right\|^2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j^2\right)|\hat{A}_{ij}(s)(S^T_{\hat{h}_{ij}}y)(s)|^2ds\right)^p\right)^{1/2p}\leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant T}\left(E\left|\sum_{k\in I}\sum_{j=0}^{m_1}\int_T^t\exp\left\{\int_s^t\sum_{k\in I}\hat{A}_{1k}(\tau)d\tau\right\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j\right)\hat{A}_{1k}(s)\times\right.\right.$$

$$\int_{\hat{h}_{1k}^T(s)}^{s}\hat{A}_{1j}(\tau)(S^T_{\hat{h}_{1j}}y)(\tau)d\tau ds\ +\sum_{k\in I}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\int_T^t\exp\left\{\int_s^t\sum_{k\in I}\hat{A}_{1k}(\tau)d\tau\right\}\times$$

$$\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j\right)\hat{A}_{1k}(s)\int_{\hat{h}_{1k}^T(s)}^{s}\hat{A}_{ij}(\tau)(S^T_{\hat{h}_{ij}}y)(\tau)d\mathcal{B}_i(\tau)ds+$$

$$\left.\left.\sum_{k\bar{\in} I}\int_T^t\exp\left\{\int_s^t\sum_{k\in I}\hat{A}_{1k}(\tau)d\tau\right\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j\right)\hat{A}_{1k}(s)(S^T_{\hat{h}_{1k}}y)(s)ds\right|^{2p}\right)^{1/2p}+$$

$$c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\sup_{t\geqslant T}\left(\int_T^t\exp\{-2\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j^2\right)(a_{ij}(s)\sqrt{s})^2d\ln s\right)^{(p-1)/2p}\times$$

$$\left(E\int_T^t\exp\{-2\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j^2\right)(a_{ij}(s)\sqrt{s})^2|(S^T_{\hat{h}_{ij}}y)(s)|^{2p}d\ln s\right)^{1/2p}\right)\leqslant$$

$$\sum_{k\in I}\sum_{j=0}^{m_1}\sup_{t\geqslant T}\left(\left(\int_T^t\exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}|A_j|\right)a_{1k}(s)s\times\right.\right.$$

$$\left.\int\limits_{\hat h^T_{1k}(s)}^{s} a_{1j}(\tau)d\tau d\ln s\right)^{(2p-1)/2p} \times \left(E\int\limits_T^t \exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}|A_j|\right)a_{1k}(s)s\times\right.$$

$$\left.\left.\left(\int\limits_{\hat h^T_{1k}(s)}^{s} a_{1j}(\tau)d\tau\right)^{1-2p}\left|\int\limits_{\hat h^T_{1k}(s)}^{s} A_{1j}(\tau)(S_{\hat h_{1j}}y)(\tau)d\tau\right|^{2p} d\ln s\right)^{1/2p}\right)+$$

$$\sum_{k\in I}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\sup_{t\geqslant T}\left(\left(\int\limits_T^t \exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}|A_j|\right)a_{1k}(s)s\times\right.\right.$$

$$\left.\left(\int\limits_{\hat h^T_{1k}(s)}^{s}(a_{ij}(\tau))^2d\tau\right)^{0.5} d\ln s\right)^{(2p-1)/2p}\times$$

$$\left(E\int\limits_T^t \exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}|A_j|\right)a_{1k}(s)s\left(\int\limits_{\hat h^T_{1k}(s)}^{s}(a_{ij}(\tau))^2d\tau\right)^{0.5-p}\times\right.$$

$$\left.\left.\left|\int\limits_{\hat h^T_{1k}(s)}^{s} A_{ij}(\tau)(S^T_{\hat h_{ij}}y)(\tau)d\mathcal{B}_i(\tau)\right|^{2p} d\ln s\right)^{1/2p}\right)+$$

$$\sum_{k\bar\in I}\sup_{t\geqslant T}\left(\left(\int\limits_T^t \exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}|A_j|\right)a_{1k}(s)sd\ln s\right)^{(2p-1)/2p}\times\right.$$

$$\left.\left(E\int\limits_T^t \exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}|A_j|\right)a_{1k}(s)s|(S^T_{\hat h_{1k}}y)(s)|^{2p}d\ln s\right)^{1/2p}\right)+$$

$$c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\sup_{t\geqslant T}\left(\left(\int\limits_T^t \exp\{-2\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j^2\right)(a_{ij}(s)\sqrt{s})^2d\ln s\right)^{(p-1)/2p}\times\right.$$

$$\left.\left(E\int\limits_T^t \exp\{-2\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j^2\right)(a_{ik}(s)\sqrt{s})^2|(S^T_{\hat h_{ij}}y)(s)|^{2p}d\ln s\right)^{1/2p}\right).$$

Учитывая, что

$$E\left|\int\limits_{\hat h^T_{1k}(s)}^{s} A_{1j}(\tau)(S^T_{h_{1j}}y)(\tau)d\tau\right|^{2p}\leqslant\left(\int\limits_{\hat h^T_{1k}(s)}^{s} a_{1j}(\tau)d\tau\right)^{2p-1}\times$$

$$E\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s} a_{1j}(\tau)|(S^T_{\hat h_{1j}}y)(\tau)|^{2p}d\tau \leqslant \left(\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s} a_{1j}(\tau)d\tau\right)^{2p}\left(||y||_{M_{2p}(T)}\right)^{2p}$$

при $k\in I,\ j=0,...,m_1$,

$$E\left|\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s} A_{ij}(\tau)(S^T_{\hat h_{ij}}y)(\tau)d\mathcal{B}_i(\tau)\right|^{2p} \leqslant c_pE\left(\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s}(a_{ij}(\tau)|S^T_{\hat h_{ij}}y)(\tau)|)^2d\tau\right)^p \leqslant$$

$$c_p\left(\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s}(a_{ij}(\tau))^2d\tau\right)^{p-1} E\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s}(a_{ij}(\tau))^2|(S^T_{\hat h_{ij}}y)(\tau)|^{2p}d\tau \leqslant$$

$$\left(\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s}(a_{ij}(\tau))^2d\tau\right)^p\left(||y||_{M_{2p}(T)}\right)^{2p}$$

при $k\in I,\ i=2,...,m,\ j=0,...,m_i$, получим

$$||\Theta y||_{M_{2p}(T)} \leqslant \left(\sup_{t\geqslant T}\int\limits_T^t \exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}|A_j|\right)\times\right.$$

$$\left(\sum_{k\in I}a_{1k}(s)s\left(\sum_{j=0}^{m_1}\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s} a_{1j}(\tau)d\tau + c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i}\left(\int\limits_{\hat h_{1k}^T(s)}^{s}(a_{ij}(\tau))^2d\tau\right)^{0.5}\right)+\right.$$

$$\left.\sum_{k\bar\in I}a_{1k}(s)s\right)d\ln s + c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{k=0}^{m_i}\sup_{t\geqslant T}\left(\int\limits_T^t\exp\{-2\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{s<\mu_j\leqslant t}A_j^2\right)\times\right.$$

$$\left.\left.(a_{ik}(s)\sqrt{s})^2d\ln s\right)^{0.5}\right)||y||_{M_{2p}(T)} \leqslant$$

$$\left(\sup_{t\geqslant T}\int\limits_T^t\exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\gamma_1\left(\prod_{\ln s<\ln\mu_j\leqslant\ln t}|A_j|\right)d\ln s+\right.$$

$$\left.c_p\gamma_2\sup_{t\geqslant T}\left(\int\limits_T^t\exp\{-2\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{\ln s<\ln\mu_j\leqslant\ln t}A_j^2\right)d\ln s\right)^{0.5}\right)||y||_{M_{2p}(T)}.$$

Используя оценку

$$\sup_{t\geqslant T}\int\limits_T^t\exp\{-\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{\ln s<\ln\mu_j\leqslant\ln t}|A_j|\right)d\ln s \leqslant \frac{\max\{1,A\}(1-\exp\{-\alpha\sigma\})}{\alpha(1-\exp\{-\alpha\rho\}A)},$$

которая следует из результатов работы [15], и неравенство

$$\sup_{t\geqslant T}\int\limits_T^t \exp\{-2\alpha\ln(t/s)\}\left(\prod_{\ln s<\ln\mu_j\leqslant \ln t} A_j^2\right) d\ln s \leqslant \frac{\max\{1,A^2\}(1-\exp\{-2\alpha\sigma\})}{2\alpha(1-\exp\{-2\alpha\rho\}A^2)},$$

которое следует из предыдущей оценки, получим

$$||\Theta y||_{M_{2p}(T)} \leqslant \left(\frac{\max\{1,A\}(1-\exp\{-\alpha\sigma\})}{\alpha(1-\exp\{-\alpha\rho\}A)}\gamma_1+\right.$$

$$\left. c_p\gamma_2\left(\frac{\max\{1,A^2\}(1-\exp\{-2\alpha\sigma\})}{2\alpha(1-\exp\{-2\alpha\rho\}A)}\right)^{1/2}\right)||y||_{M_{2p}(T)}.$$

Учитывая условия теоремы, имеем $||\Theta||_{M_{2p}(T)}<1$. Отсюда и в силу работы [13] следует обратимость оператора $(I-\Theta):M_{2p}(T)\to M_{2p}(T)$.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС. 1998.

[2] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука. 1969.

[3] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы систем с последействием. М.: Наука. 1981.

[4] Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне. 1989.

[5] Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. Horwood Publishing ltd. Chichester. 1997.

[6] Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 7. С. 879–885.

[7] Кадиев Р.И. Поносов А.В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Дифференц. уравнения. Минск. Т. 46, № 4. 2010. С. 486–498.

[8] Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость линейных функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 2. С. 198–207.

[9] Кадиев Р.И. Достаточные условия устойчивости стохастических систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 4. С. 555–564.

[10] Кадиев Р.И. Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений. Дис. ... д-р физ.-мат. наук. Махачкала. 2000.

[11] Ватанабэ С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М. 1981.

[12] Кадиев Р.И. Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Известие вузов. Математика. 1995. № 10. С. 35–40.

[13] R.Kadiev, A.Ponosov Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Electron J. Diff. Eqns. 2004. Vol. 2004. N 92. Pp. 1–36.

[14] Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations // World Scientific. Singapore. 1989.

[15] Berezanski L., Idels L. On Integrable Solutions of Impulsive Delay Differential Equations // Communications of Appl. Math. Analysis. 1998. Vol. 2. Pp. 301–309.

Р. И. Кадиев (R. I. Kadiev)
Дагестанский научный центр РАН,
Дагестанский государственный университет
E-mail: kadiev_r@mail.ru

Поступила в редакцию
01.08.2016