УДК 517.5

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

О наилучших приближениях непрерывно дифференцируемых функций сплайнами по двухточечным рациональным интерполянтам

Для непрерывно дифференцируемых на отрезке функций получены оценки наилучшей по порядку скорости сходимости сплайнов по двухточечным рациональным интерполянтам.

Библиография: 8 названий.

Estimates of degree of the best spline-approximation by means of two-points rational interpolant for continuously differentiable functions on a given segment are obtained.

Bibliography: 8 items.

Ключевые слова: интерполяционные сплайны, рациональные сплайны, наилучшие сплайн-приближения.

Keywords: interpolation splines, rational splines, best spline-approximation.

Введение

Задача об изучении наилучших полиномиальных сплайн-приближений для классов функций была поставлена С.Б. Стечкиным. По-видимому, первые существенные результаты по исследованию этой задачи в случае нефиксированных узлов и классов дифференцируемых функций с производными данного порядка из классов Лебега или конечной вариации получили Ю.Н. Субботин и Н.И. Черных [1]. С дальнейшей историей этого вопроса можно ознакомиться, например, в [2], [3] и цитированных в них источниках.

В данной работе для непрерывно дифференцируемых функций изучается вопрос построения сеток узлов, которые обеспечивают наилучшую по порядку скорость сходимости соответствующих сплайнов по двухточечным рациональным интерполянтам. Вопрос о построении и скорости сходимости таких сплайнов в случае произвольных сеток узлов рассмотрен в [4].

1. Вспомогательные результаты

В работе речь идет об интерполяционных рациональных сплайнах $Q_N(x, g)$, определяемых для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $g(x)$ на сетке с попарно различными узлами $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 1)$; при этом на частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ сплайн $Q_N(x, g)$ совпадает с рациональной функцией

$$q_k(x) = q_k(x, g, H) = a_k + \frac{A_k}{x - u_k}, \tag{1.1}$$

где для произвольного $H > b - a$ положено $u_k = x_k + H$ и через разделенную разность $g(x_{k-1}, x_k)$ определены коэффициенты

$$\begin{aligned} a_k &= g(x_k) + g(x_{k-1}, x_k)(x_{k-1} - u_k), \\ A_k &= -g(x_{k-1}, x_k)(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Всюду ниже через $\Omega(f, [a, b])$ обозначим колебание функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$, через $V(f) = V(f, [a, b])$ – вариацию ее на этом отрезке.

Модуль изменения порядка n $(n = 1, 2, \dots)$ функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, определим равенством (см. [5])

$$\varkappa_n(f) = \varkappa_n(f, [a, b]) = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

где супремум берется по всем разбиениям $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ (близкие определения см. [6]–[7]).

Ниже нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Если $f(x)$ непрерывна и конечной вариации на отрезке $[a, b]$, то при любом m $(m = 1, 2, \dots)$ существует разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ такое, что при $k = 1, 2, \dots, m$ выполняется неравенство*

$$\Omega(f, [t_{k-1}, t_k]) \leqslant \frac{1}{m} V(f). \tag{1.3}$$

Доказательство. Возьмем $t_0 = a$ и допустим, что $t_0 < t_1 < \dots < t_i$ уже построены. Тогда считаем

$$t_{i+1} = \min\{t | t > t_i, V(f, [t_i, t]) = \frac{1}{m} V(f)\}.$$

Тогда на отрезке $[a, b]$ получим не более m частичных отрезков $[t_i, t_{i+1}]$, для которых выполняется равенство

$$V(f, [t_i, t_{i+1}]) = \frac{1}{m} V(f). \tag{1.4}$$

Если получим меньше m отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \dots, j; j + 1 < m)$, для которых выполняется равенство (1.4), то отрезок $[t_{j+1}, b]$ можем дополнить точками $t_{j+1} < t_{j+2} < \dots < t_m = b$, для которых выполняется неравенство (1.3) при $k = j + 2, j + 3, \dots, m$, что возможно в силу непрерывности функции $f(x)$.

Лемма 1.1 доказана.

Для уточнения оценок используется

Лемма 1.2. *Если $f(x)$ непрерывна и конечной вариации на отрезке $[a,b]$, то при любом n $(n=1,2,\dots)$ существует разбиение $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ такое, что при $k=1,2,\dots,n$ выполняется неравенство*

$$(x_k-x_{k-1})\Omega(f,[x_{k-1},x_k])\leqslant\frac{b-a}{n^2}V(f).$$

Доказательство. Достаточно считать $[a,b]=[0,1]$ и $V(f)=1$ при данном натуральном n (случай постоянной функции очевиден). Для краткости положим также $V_k=V(f,[x_{k-1},x_k])$ $(k=1,2,\dots,n)$.

Если $x_0=0<x_1<\dots<x_{k-1}<1$ уже построены, то возьмем

$$x_k=\min\left\{x|x>x_{k-1},(x-x_{k-1})V(f,[x_{k-1},x])=\frac{1}{n^2}\right\}.$$

Указанный минимум существует ввиду возрастания и непрерывности при $x\geqslant x_{k-1}$ функции $(x-x_{k-1})V(f,[x_{k-1},x])$. В результате получим не более n отрезков $[x_{k-1},x_k]$ таких, что выполняется равенство $(x_k-x_{k-1})V_k=\dfrac{1}{n^2}$.

Действительно, если допустить, что получим m таких отрезков $[x_{k-1},x_k]$ и $m>n$, то ввиду неравенств

$$\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_{k-1})\leqslant 1,\quad \sum_{k=1}^{m}V_k\leqslant 1$$

придем к противоречию:

$$1<\frac{m}{n}=\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_{k-1})^{\frac12}V_k^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_{k-1})\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=1}^{m}V_k\right)^{\frac12}\leqslant 1.$$

Далее, если получим m отрезков с $(x_k-x_{k-1})V_k=\dfrac{1}{n^2}$ и $m<n$, то отрезок $[x_m,1]$ дополним точками $x_m<x_{m+1}<\dots<x_n=1$, для которых при $k=m+1,m+2,\dots,n$ выполняется неравенство $(x_k-x_{k-1})V_k\leqslant\dfrac{1}{n^2}$.

Лемма 1.2 доказана.

Пусть функция $\Phi(u)$ является непрерывной, возрастающей и выпуклой вниз на полуоси $[0,+\infty)$, причем $\Phi(0)=0$.

Тогда Φ-вариация по Л. Юнг ([8]) функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ определяется равенством

$$V_\Phi(f,[a,b])=\sup\sum_{i=1}^{n}\Phi(|f(x_i)-f(x_{i-1})|),$$

где супремум берется по всем конечным разбиениям $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, $n=1,2,\dots$.

При $\Phi(u) = u$ величина $V_\Phi(f,[a,b])$ равна жордановой вариации $V(f,[a,b])$ функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Непосредственно из определений модуля изменения $\varkappa_n(f) = \varkappa_n(f,[a,b])$ порядка n $(n = 1,2,\dots)$ непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и ее жордановой вариации $V(f,[a,b])$ вытекает неравенство

$$\varkappa_n(f,[a,b]) \leqslant V(f,[a,b]).$$

Это неравенство легко распространяется на функции с конечной Φ-вариацией.

Действительно, пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $(n = 1,2,\dots)$ – произвольное разбиение. Тогда при каждом $k = 1,2,\dots,n$ найдется пара точек $\alpha_k < \beta_k$ из отрезка $[x_{k-1},x_k]$, для которых выполняется равенство

$$\Omega(f,[x_{k-1},x_k]) = |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|.$$

Точки $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\dots,\alpha_n,\beta_n$ переобозначим в порядке их следования $a = y_0 \leqslant y_1 < y_2 \dots < y_{2n} \leqslant y_{2n+1} = b$. Тогда, используя, в частности, неравенство Йенсена для выпуклых вниз функций, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\Omega(f,[x_{k-1},x_k]) = \sum_{k=1}^{n}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant$$

$$\leqslant n\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi(|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|)\right) \leqslant$$

$$\leqslant n\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n+1}\Phi(|f(y_i) - f(y_{i-1})|)\right) \leqslant$$

$$\leqslant n\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}V_\Phi(f,[a,b])\right);$$

здесь $\Phi^{-1}(u)$ означает функцию, обратную к функции $\Phi(u)$.

Значит, при любом натуральном n выполняется неравенство

$$\varkappa_n(f,[a,b]) \leqslant n\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}V_\Phi(f,[a,b])\right). \tag{1.5}$$

2. Основные результаты

Отметим, что в приводимой ниже теореме получены оценки для произвольных непрерывно дифференцируемых на отрезке функций (без дополнительных ограничений на производную).

Теорема 1. *Пусть функция $g'(x)$ непрерывна и конечной вариации на отрезке $[a,b]$ и пусть m – натуральное число.*

Тогда существуют натуральное $N \leqslant 2m-1$ и сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ такие, что для функции $g(x)$ и ее интерполяционного сплайна $Q_N(x,g)$, совпадающего на частичных отрезках $[x_{k-1},x_k]$ $(k =$

$1, 2, \dots, N)$ *с соответствующими рациональными функциями* $q_k(x) = q_k(x, g, H)$ *из* (1.1) *с коэффициентами* (1.2), *при* $x \in [a, b]$ *выполняется неравенство*

$$|Q_N(x, g) - g(x)| \leqslant \frac{b-a}{2m^2} \left(V(g', [a, b]) + \frac{b-a}{H} \|g'\|_{[a,b]} \right).$$

Доказательство. Пусть функция $g(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. Тогда к производной $g'(x)$ с конечной вариацией на отрезке $[a, b]$ применима приведенная выше лемма, согласно которой при любом m ($m = 1, 2, \dots$) существует разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ такое, что при $k = 1, 2, \dots, m$ выполняется неравенство

$$\Omega(g', [t_{k-1}, t_k]) \leqslant \frac{1}{m} V(g').$$

На интервале (a, b) возьмем также точки $\tau_k = k\dfrac{b-a}{m}$ $(k = 1, \dots, m-1)$. Объединив точки $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ и $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}\}$, получим некоторое разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ со свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ N \leqslant 2m - 1; \\ &2)\ x_k - x_{k-1} \leqslant \frac{b-a}{m} \quad (k = 1, 2, \dots, N); \\ &3)\ \Omega(g', [x_{k-1}, x_k]) \leqslant \frac{1}{m} V(g') \quad (k = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Это разбиение $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ возьмем в качестве сетки узлов интерполяционного сплайна $Q_N(x, g)$, определяемого на частичных отрезках $[x_{k-1}, x_k]$ соответствующими рациональными функциями $q_k(x) = q_k(x, g, H)$ из (1.1) с коэффициентами (1.2).

Ясно, что при каждом $k = 1, 2, \dots, N$ найдется точка $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, для которой

$$g(x_{k-1}, x_k) = \frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = g'(\xi_k).$$

Поэтому для $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ получим

$$q_k'(x) - g'(x) = g'(\xi_k) \frac{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)}{(x - u_k)^2} - g'(x) =$$

$$= g'(\xi_k) \left(\frac{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)}{(x - u_k)^2} - 1 \right) + g'(\xi_k) - g'(x);$$

при этом по построению узлов из свойств (2.1) имеем

$$\left| \frac{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)}{(x - u_k)^2} - 1 \right| \leqslant \max \left\{ \frac{u_k - x_{k-1}}{u_k - x_k} - 1, 1 - \frac{u_k - x_k}{u_k - x_{k-1}} \right\} =$$

$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{u_k - x_k} \leqslant \frac{b-a}{mH};$$

$$|g'(\xi_k) - g'(x)| \leqslant \Omega(g', [x_{k-1}, x_k]) \leqslant \frac{1}{m} V(g').$$

Значит, при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ получим

$$|q_k'(x) - g'(x)| \leqslant \|g'\|_{[x_{k-1},x_k]} \frac{b-a}{mH} + \frac{1}{m} V(g'), \tag{2.2}$$

где

$$\|g'\|_{[x_{k-1},x_k]} = \max\{|g'(x)| : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Пусть теперь $y_k(x)$ является ближайшей из точек x_{k-1} и x_k для $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда, так как $q_k(x_j) = g(x_j)$ при $j = k-1$ и $j = k$, найдется точка $c(x)$ между точками x и $y_k(x)$ такая, что

$$|q_k(x) - g(x)| = |q_k'(c(x)) - g'(c(x))|\,|x - y_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |q_k'(c(x)) - g'(c(x))| \frac{x_k - x_{k-1}}{2}.$$

Отсюда и из (2.1), применив к точке $c(x)$ неравенство (2.2), получим

$$|q_k(x) - g(x)| \leqslant \|g'\|_{[a,b]} \frac{(b-a)^2}{2m^2 H} + \frac{b-a}{2m^2} V(g')$$

при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$.

Так как из $x \in [a, b]$ следует, что $x \in [x_{k-1}, x_k]$ при некотором $k = 1, 2, \dots, N$ и тогда $q_k(x) = Q_N(x, g)$, теорема 1 доказана.

Из неравенства (1.5) и доказанной теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $\Phi(u)$ – произвольная непрерывная, возрастающая и выпуклая вниз на $[0, +\infty)$ функция с $\Phi(0) = 0$ и пусть функция $g(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную с конечной Φ-вариацией.*

Тогда для каждого натурального m существует сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ с $N \leqslant 2m - 1$, интерполяционный рациональный сплайн $Q_N(x, g)$ по которой удовлетворяет неравенству

$$|Q_N(x, g) - g(x)| \leqslant \frac{b-a}{2m} \left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{m} V_\Phi(g', [a, b])\right) + \frac{b-a}{mH} \|g'\|_{[a,b]} \right),$$

в частности, при $\Phi(u) = u$ – неравенству

$$|Q_N(x, g) - g(x)| \leqslant \frac{b-a}{2m^2} \left(V(g', [a, b]) + \frac{b-a}{H} \|g'\|_{[a,b]} \right). \tag{2.3}$$

Для данной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и натурального n через $\mathcal{R}_{f,n}$ обозначим множество всех кусочно рациональных функций $Q_n(x) = Q_n(x, f)$, построеннных для $f(x)$ по всевозможным сеткам попарно различных узлов $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и двухточечным рациональным интерполянтам $q_k(x, f, H)$ вида (1.1) с $H > b - a$.

При $n = 1, 2, \dots$ обозначим также

$$RS_n(f, [a, b]) = \inf\left\{ \|Q_n(\cdot, f) - f\|_{[a,b]} : Q_n \in \mathcal{R}_{f,n} \right\}.$$

Следующее утверждение дает некоторое уточнение оценки, полученной в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда при $n=1,2,\ldots$ имеет место неравенство*

$$RS_n(f,[a,b]) \leqslant \frac{b-a}{2n^2} V(f',[a,b]).$$

Доказательство. Сначала по аналогии с доказательством теоремы 1, но используя лемму 1.2 вместо леммы 1.1, при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ и произвольном натуральном n с учетом равенства $Q_n(x,f) = q_k(x,f,H)$ получим неравенство

$$|Q_n(x,f) - f(x)| \leqslant \frac{b-a}{2n^2} V(f',[a,b]) + \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2H} \|f'\|_{[a,b]}.$$

Отсюда легко следует, что

$$RS_n(f,[a,b]) \leqslant \frac{b-a}{2n^2} V(f',[a,b]) + \frac{(b-a)^2}{2H} \|f'\|_{[a,b]}.$$

Остается учесть, что положительное число $H > b-a$ можно считать сколь угодно большим.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций // Матем. заметки. 1970. Т. 7, вып. 1. С. 31–42.

[2] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука. 1984.

[3] Субботин Ю.Н. Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3, вып. 4. С. 1043–1058.

[4] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестанские Электронные Математические Известия. 2015. Т. 4. С. 22–31.

[5] Lagrange R. Sur oscillations d'order superior d'une functions numerique // Ann. sci. Escole norm. super. Paris. 1965. Vol. 82. N 2. Pp. 101–130.

[6] Севастьянов Е.А. Кусочно-монотонная аппроксимация и Ф-вариации // Analysis Math. 1975. Vol. 1. N 2. Pp. 141–164.

[7] Чантурия З.А. О равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сборник. 1976. Т. 100, вып. 4. С. 534–534.

[8] Young L.C. General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series // Mathem. Ann. London. 1938. V. 115. Pp. 581–612.

Поступила в редакцию
24.05.2016

А.-Р. К. Рамазанов (A.-R. K. Ramazanov)
Дагестанский научный центр РАН,
Дагестанский государственный университет
E-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

В. Г. Магомедова (V. G. Magomedova)
Дагестанский государственный университет
E-mail: vazipat@rambler.ru