УДК 681.142.1

А. М. Магомедов

Элиминация перебора двудольных графов на 15 вершинах

В множестве M всех связных двудольных графов на 15 вершинах выделено подмножество малой мощности M_0 , такое, что для каждого графа из M подмножество M_0 содержит изоморфный граф.

Библиография: 4 названия.

The set M of all connected bipartite graphs on 15 vertices selected subset of the low-power M_0 , such that for each graph of M is a subset of M_0 contains an isomorphic graph.

Bibliography: 4 items.

Ключевые слова: двудольный граф, изоморфизм, алгоритм, раскраска.

Keywords: bipartite graph, isomorphism, algorithm, colors.

Введение

Пусть предписано обработать множество заданий $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ в системе процессоров $Y = \{y_0, \dots, y_{m-1}\}$. Для каждого задания x_i определен набор процессоров, каждый из которых должен выполнить одну операцию обработки x_i , длительность операции равна единице, одновременное участие объекта (задания, процессора) в двух и более операциях запрещено, условия предшествования отсутствуют. Требуется выяснить, существует ли беспростойное расписание обработки (расписание без простоев объектов).

Рассмотрим двудольный граф $G = (X, Y, E)$, где ребро $(x_i, y_j) \in E$ если и только если существует предписание обработать задание x_i процессором y_j . Составить расписание обработки – значит указать для каждого $(x_i, y_j) \in E$ некоторое целое положительное число $c(x_i, y_j)$ – номер дискретного момента времени, в течение которого y_j выполняет операцию над x_i . Рассмотрение $c(x_i, y_j)$ в качестве цвета ребра (x_i, y_j) сводит задачу составления расписания к эквивалентной задаче реберной раскраски двудольного графа. Запрет на одновременное участие объекта в двух и более операциях в терминологии теории графов означает требование, что раскраска должна быть *правильной*, т.е. в каждой вершине все представленные в ней цвета должны быть различны.

Работа выполнена при поддержке проекта №1.6395.2017/БЧ «Теоретико-графовые и компьютерные аспекты исследования расписаний и устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений» в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.

А требование беспростойности означает, что раскраска должна быть не только правильной, но и *интервальной*, т.е. в каждой вершине графа все представленные в ней цвета должны образовать целочисленный интервал. Интервальную раскраску в дальнейшем будем кратко обозначать «и.р.».

Поясним на примерах.

- 1) Простой цикл K нечетной длины N не имеет интервальной раскраски. В самом деле, при любой и.р. простого цикла каждой из N вершин инцидентно точно одно «четное» ребро (ребро, цвет которого представлен четным значением цвета), поэтому «четных» ребер вдвое меньше, чем N , что противоречит свойству нечетности N .
- 2) Простой цикл нечетной длины обладает и.р.: достаточно выполнить обход цикла, попеременно раскрашивая ребра в цвета $1, 2, 1, 2, \dots$
- 3) Если некоторый граф $G=(V,E)$ обладает и.р., то граф, полученный добавлением к G висячего ребра, также обладает и.р. В самом деле, пусть граф G обладает и.р., $[a, b]$ – интервал цветов, представленных в вершине $u \in E$, G' – граф, полученный добавлением к G висячего ребра (u, v) . Раскрасив ребро (u, v) в цвет $b + 1$, получим искомую и.р. графа G' .

В 1997г. К. Giaco показал [1], что при $n + m \leq 14$ все двудольные графы $G = (X, Y, E)$, заданные на множествах вершин X и Y мощности n и m соответственно, обладают и.р. Но до сих пор неизвестно, справедливо ли соответствующее утверждение для $n + m = 15$. Один из подходов к решению приведен в следующем разделе.

1. Характеристическое множество. Два вычислительных аспекта переборного решения

Отсутствие прогресса по данной проблеме за столь длительное время объясняется двумя причинами.

Причина 1: множество M всех графов даже в «модельном случае» $n = 4, m = 11, X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{10}\}$ слишком велико: список смежности каждой из вершин множества X может быть любым из 2^{11} подмножеств множества Y , поэтому, абстрагируясь от соображений связности и недопустимости изолированных вершин, получим количество таких графов «близким» к $2^{44} = 17592186044416$ и, если проверка и.р. каждого из графов занимает 10 мс, то компьютерные расчеты потребуют 5578 лет.

Причина 2: задача о существовании и.р. двудольного графа NP-полна [2] (Севастьянов С.В., 1990 г.), что делает бесперспективным поиск эффективного алгоритма проверки существования и.р. заданного графа.

Мы приведем способ устранения первой из двух приведенных причин. Более точно, путем отсеивания значительного количества изоморфных графов задача сведена к проверке столь малой части графов из M , что, например, в «модельном случае» алгоритм завершается в течение одного часа – 366956 графов вместо 17592186044416.

По поводу второй причины: эвристический алгоритм поиска и.р. приведен в [4]. Всюду далее рассматривается модельный случай.

Отношение изоморфизма разбивает множество M на классы эквивалентности и естественно представляется ограничиться подмножеством M' , включающим точно одного представителя из каждого класса эквивалентности. Однако такое построение затруднительно: задача об изоморфизме графов была опубликована [3] в 1972 г. как «открытая» задача, относительно которой неизвестно, является ли она НР-полной. Поэтому вместо построения M' зададимся целью построить такое множество M_0 двудольных графов, заданных на множествах вершин X и Y , что:

- 1) для каждого графа из множества M найдется изоморфный ему граф в множестве M_0 (*условие изоморфизма*);
- 2) множество M_0 обладает мощностью, приемлемой для реальных компьютерных экспериментов, однако допускается присутствие в M_0 изоморфных графов (*условие слабой избыточности*).

Такое множество M_0 будем называть *характеристическим*.

2. Алгоритм построения характеристического множества

1. Количество смежных x_i вершин из Y обозначим a_i и без ограничения общности примем неравенство:

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3, \quad (2.1)$$

откуда и из $m = 11$ следует $a_0 \geq 3$.

В качестве списка смежных x_0 вершин выберем $\{y_0, \dots, y_{a_0-1}\}$.

Рис. 1. Вершины, смежные x_{i+1} , выбираются в начале участков, на которые Y разбивается набором участков, образованных списком смежности x_i .

Двудольные графы, включаемые в M_0 , представлены списками смежности для вершин x_i , $i = 0 \dots, n - 1$; мощности этих списков обозначены через a_i , области изменения значений слагаемых $a_{i0}, a_{i1}, \dots$, составляющих a_i , наглядно представлены на рис. 1. Список смежности вершины x_i представляет набор сплошных «полей» вершин множества Y мощности $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{i,2^i-1}$, которые разбивают последовательность вершин Y на 2^{i+1} участков. В начале каждого из этих участков выбираются соответственно $a_{i+1,0}, a_{i+1,1}, \dots, a_{i+1,2^{i+1}-1}$ вершин, составляющих список смежности вершины x_{i+1} .

$$2. \quad a_1 = a_{10} + a_{11}.$$

В список смежных x_1 вершин выберем начальные a_{10} вершин из $\{y_0, \dots, y_{a_0-1}\}$ и начальные a_{11} вершин из $\{y_{a_0}, \dots, y_{m-1}\}$; $a_{10} + a_{11} \leq a_0$; $a_{11} \leq m - a_0$.

В дальнейшем, указывая смежные x_i вершины, ограничимся указанием индексов соответствующих вершин из Y .

3. $a_2 = a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23}$.

В список смежных x_2 вершин выберем (каждый раз – начальные вершины указанного списка):

a_{20} вершин из $0, \dots, a_{10} - 1$; a_{21} вершин из $a_{10}, \dots, a_0 - 1$; a_{22} вершин из $a_0, \dots, a_0 + a_{11} - 1$; a_{23} вершин из $a_0 + a_{11}, \dots, m - 1$.

4. $a_3 = a_{30} + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35} + a_{36} + a_{37}$.

В список смежных x_3 вершин выберем (каждый раз – начальные вершины указанного списка): a_{30} вершин из $0, \dots, a_{20} - 1$; a_{31} вершин из $a_{20}, \dots, a_{10} - 1$; a_{32} вершин из $a_{10}, \dots, a_{10} + a_{21} - 1$; a_{33} вершин из $a_{10} + a_{21}, \dots, a_0 - 1$; a_{34} вершин из $a_0, \dots, a_0 + a_{22} - 1$; a_{35} вершин из $a_0 + a_{22}, \dots, a_0 + a_{11} - 1$; a_{36} вершин из $a_0 + a_{11}, \dots, a_0 + a_{11} + a_{23} - 1$; a_{37} вершин из $a_0 + a_{11} + a_{23}, \dots, m - 1$.

Приведенные диапазоны изменения переменных $a_0, a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, a_{36}, a_{37}$, дополненные неравенством (2.1), условиями связности графа и отсутствия изолированных вершин, задают схему построения множества M_0 двудольных графов $G = (X, Y, E)$.

ЛЕММА 1. *Достаточно доказать существование и.р. лишь тех графов характеристического множества, наименьшая степень вершин которых больше единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно сослаться на пример 3 и результат К. Giaro [1] (см. конец введения).

3. Верификация алгоритма

ТЕОРЕМА 1. *Алгоритм раздела 2 вычисляет характеристическое множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = (X, Y, E)$ – произвольно выбранный двудольный граф из множества M_0 (для модельного случая). Докажем, что среди графов – элементов характеристического множества M_0 найдется граф, изоморфный $G = (X, Y, E)$. Изменив в случае надобности нумерацию вершин множества X , будем считать, что вершины x_i в графе G располагаются по невозрастанию числа a_i элементов из списка смежности вершин x_i .

Изменив в случае надобности нумерацию вершин Y , можно считать, что списком смежности вершины x_0 является $Y_0 = \{y_0, \dots, y_{a_0-1}\}$. В списке смежности (мощности a_1) вершины x_1 обозначим мощность подмножества Y_{10} вершин из множества Y_0 через a_{10} , а мощность подмножества Y_{11} вершин из множества $Y \setminus Y_0$ – через a_{11} ; переупорядочим в случае необходимости элементы Y_0 так, чтобы элементы Y_{10} располагались в начале Y_0 , а элементы $Y \setminus Y_0$ – так, чтобы элементы Y_{11} располагались в начале $Y \setminus Y_0$. Продолжая процесс, получим граф из характеристического множества M_0 , изоморфный графу $G = (X, Y, E)$. Теорема доказана.

Компьютерные вычисления показали, что мощность множества M_0 не превышает 366956, что при гипотетическом (см. выше) времени 10 мс проверки каждого графа потребует лишь около одного часа компьютерных расчетов.

Список литературы

- [1] Giaro K. Compact task scheduling on dedicated processors with no waiting period (in Polish) // PhD thesis, Technical University of Gdansk, IETI Faculty, Gdansk. 1999.
- [2] Севастьянов С.В. Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа // Методы дискретного анализа. 1990. Т. 50. С. 61–72.
- [3] Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems // in R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.), Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York. 1972. Pp. 85–103.
- [4] Магомедов А.М. Цепочечные структуры в задачах о расписаниях // Прикладная дискретная математика. 2016. Т. 3 (33). С. 67–77.

А. М. Магомедов (A. M. Magomedov)

Дагестанский научный центр РАН

E-mail: magomedtagirl1@yandex.ru

Поступила в редакцию

05.05.2016