УДК 517.929.4+519.21

Р. И. Кадиев

Устойчивость решений линейной системы функционально-разностных уравнений Ито

Целью статьи является описание идей Н.В. Азбелева, получившие развитие в его работах и в работах его учеников, применительно к исследованию вопросов устойчивости для линейной системы функционально-разностных уравнений Ито. Рассмотрены вопросы допустимости некоторых пар пространств для линейной системы функционально-разностных уравнений и моментной устойчивости решений для линейной системы разностных уравнений Ито с запаздыванием. Получены достаточные условия допустимости некоторых пар пространств и устойчивости относительно начальных данных для некоторых уравнений в терминах параметров этих уравнений.

Библиография: 12 названий.

The purpose of the article is the description of ideas of N.V. Azbelev that were developed in his works and in the works of his students with respect to research of questions of stability for the functional-linear systems of Ito difference equations. The questions of the permissibility of some pairs of spaces for linear systems of functional difference equations and moment stability of solutions to linear systems of difference Ito equations with delay were considered. Sufficient conditions for the permissibility of some pairs of spaces and stability with respect to initial data for some equations in terms of the parameters of these equations were obtained.

Bibliography: 12 items.

Ключевые слова: устойчивость решений, разностные уравнения Ито, допустимость пар пространств.

Keywords: stability of solutions, difference equations of Ito, permissibility of pairs of spaces.

Введение

Устойчивость решений стохастических разностных уравнений с последствием мало изучена. Стохастические разностные уравнения являются математической моделью финансовых процессов с дискретным временем. Некоторым вопросам устойчивости решений для функционально-разностных уравнений Ито посвящены работы [1] – [4]. Для детерминированных функционально-разностных уравнений исследование вопросов устойчивости проводится, в основном, на основе классического метода Ляпунова – Красовского – Разумихина. Этот метод предполагает существование подходящей функции Ляпунова (функционала Ляпунова – Красовского), которая обеспечивает желаемое

свойство устойчивости (асимптотического поведения) решений исследуемых уравнений. Однако в теории устойчивости решений для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений широкое применение и высокую эффективность показал метод вспомогательных или «модельных» уравнений – «W-метод» Н.В. Азбелева [5]. В работах [6, 7] этим методом исследованы вопросы устойчивости для детерминированных функционально-разностных уравнений. На случай стохастических функционально-дифференциальных уравнений этот метод распространен в работах [8] – [10]. Главной целью исследований этой работы было развитие метода вспомогательных или «модельных» уравнений применительно к исследованию вопросов устойчивости для систем линейных функционально-разностных уравнений Ито и получение достаточных условий моментной устойчивости решений для систем линейных разностных уравнений Ито с последствием относительно начальных данных. Отметим, что такой подход оказался более конструктивным, чем другие традиционные подходы.

1. Обозначения и объект исследования

Пусть: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ – стохастический базис, где Ω – множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ – σ -алгебра событий на Ω , $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ – непрерывный справа поток σ -алгебр на Ω , P – полная вероятностная мера на $\mathcal{F}$; k^n – линейное пространство n -мерных $\mathcal{F}_0$ -измеримых случайных величин; $B_i, i = 2, \dots, m$ – независимые стандартные винеровские процессы; E – символ математического ожидания; $|\cdot|$ – норма в R^n ; $\|\cdot\|$ – норма $n \times n$ -матрицы, согласованная с нормой в R^n ; N – множество натуральных чисел; $N_+ = \{0\} \cup N$; E – единичная $n \times n$ -матрица; $1 \leq p < \infty$.

Рассматривается система линейных функционально-разностных уравнений Ито вида

$$\begin{aligned} x(s+1) = x(s) + \sum_{j=0}^s [A_1(s, j)x(j) + f_1(s)]h + \\ \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^s [A_i(s, j)x(j) + f_i(s)](B_i((s+1)h) - B_i(sh))(s \in N_+), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина при $s \in N_+$, $f_i(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$, h – достаточно малое действительное число, $A_i(s, j)$ – $n \times n$ -матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$ -измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $j = 0, \dots, s$, $i = 1, \dots, m$.

Под решением уравнения (1.1) понимается последовательность случайных величин $x(s) (s \in N_+)$, где $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина, удовлетворяющая уравнению (1.1) P -почти всюду. Заметим, что решением уравнения (1.1) является прогрессивно измеримый случайный процесс $x : N_+ \times \Omega \rightarrow R^n$.

Уравнение (1.1) называют однородным, если $f_i(s) = 0$ P -почти всюду при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$.

Частными случаями уравнения (1.1) являются:

а) *Линейная система «обыкновенных» разностных уравнений Ито*

$$x(s+1) = x(s) + [A_1(s)x(s) + f_1^1(s)]h + \sum_{i=2}^m [A_i(s)x(s) + f_i^1(s)](\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))(s \in N_+), \quad (1.2)$$

где $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина при $s \in N_+$, $f_i^1(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$, h – достаточно малое действительное число, $A_i(s)$ – $n \times n$ -матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$ -измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$.

б) *Линейная система разностных уравнений Ито с запаздыванием*

$$x(s+1) = x(s) + \sum_{j=-\infty}^s [A_1^2(s, j)x(j) + f_1^2(s)]h + \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^s [A_i^2(s, j)x(j) + f_i^2(s)](\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))(s \in N_+), \quad (1.3)$$

$$x(j) = \varphi(j) \quad (j < 0),$$

где $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина при $s \in N_+$, $f_i^2(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$, h – достаточно малое действительное число, $A_i^2(s, j)$ – $n \times n$ -матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$ -измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $j = -\infty, \dots, s$, $i = 1, \dots, m$, $\varphi(j)$ – случайная величина, которая не зависит от винеровских процессов $\mathcal{B}_i$, $i = 2, \dots, m$ при $j < 0$.

Чтобы записать уравнение (1.3) в виде (1.1) в уравнении (1.1) надо положить $A_i(s, j) = A_i^2(s, j)$, $f_i(s) = f_i^2(s) + \sum_{j=-\infty}^0 A_i^2(s, j)\varphi(j)$ при $s \in N$, $j = 0, \dots, s$, $i = 1, \dots, m$.

Заметим, что уравнение (1.3) будет однородным, если $f_i^2(s) = 0$ P -почти всюду при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$ и $\varphi(j) = 0$ P -почти всюду при $j < 0$.

в) *Линейная система разностных уравнений Ито с ограниченным запаздыванием*

$$x(s+1) = x(s) + \sum_{j=s-d}^s [A_1^3(s, j)x(j) + f_1^3(s)]h + \sum_{i=2}^m \sum_{j=s-d}^s [A_i^3(s, j)x(j) + f_i^3(s)](\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))(s \in N_+), \quad (1.4)$$

$$x(j) = \varphi(j) \quad (-d \leq j < 0),$$

где $d \in N$, $x(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина при $s \in N_+$, $f_i^3(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримая n -мерная случайная величина при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$, h – достаточно малое действительное число, $A_i^3(s, j)$ – $n \times n$ -матрица, элементы которой $\mathcal{F}_s$ – измеримые случайные величины при $s \in N_+$, $j = s-d, \dots, s$, $i = 1, \dots, m$, $\varphi(j)$ – случайная величина, которая не зависит от винеровских процессов $\mathcal{B}_i$, $i = 2, \dots, m$ при $j = -d, \dots, -1$.

Чтобы записать уравнение (1.4) в виде (1.1) достаточно заметить, что уравнение (1.4) является частным случаем уравнения (1.3). Кроме того, уравнение (1.2) является частным случаем уравнений (1.3), (1.4).

Обозначим через d^n линейное пространство решений уравнения (1.1), а через l^n – линейное пространство последовательностей $m \times n$ -матриц $H(s)$ ($s \in N_+$), где элементы матрицы $H(s)$ – $\mathcal{F}_s$ -измеримые случайные величины. Пусть

$\gamma(s) (s \in N_+)$ – последовательность положительных действительных чисел. В дальнейшем используются следующие линейные нормированные подпространства пространств d^n и k^n :

$$m_p^\gamma = \{x : x \in d^n, \|x\|_{m_p^\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s \geq 0} (E|\gamma(s)x(s)|^p)^{1/p} < \infty\} (m_p^1 = m_p);$$

$$k_p^n = \{\alpha : \alpha \in k^n, \|\alpha\|_{k_p^n} \stackrel{\text{def}}{=} E|\alpha|^p < \infty\}.$$

2. Представление для решений (формула Коши) и устойчивость решений

Для уравнения (1.1) введем обозначения $f = \text{col}\{f_1, \dots, f_m\}$, через $x_f(s, x_0)$ ($s \in N_+$) будем обозначать решение уравнения (1.1) такое, что $x_f(0, x_0) = x_0$ для любого $x_0 \in k^n$, а через $x(s, x_0)$ ($s \in N_+$) обозначим решение однородного уравнения (1.1), проходящее через любое $x_0 \in k^n$, т. е. $x(s, x_0) = x_0(s, x_0)$ ($s \in N_+$).

В работе [10] доказана следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. *Для решения уравнения (1.1), проходящее через $x_0 \in k^n$, имеет место представление*

$$x_f(s, x_0) = X(s)x_0 + (Cf)(s) (s \in N_+), \quad (2.1)$$

где $X(s) (s \in N_+)$ ($X(0) = \bar{E}$ – единичная матрица) – $n \times n$ -матрица, столбцами которой являются решения однородного уравнения (1.1) (фундаментальная матрица), а $C : l^n \rightarrow d^n$ – линейный оператор (оператор Коши) такой, что $(Cf)(0) = 0$ и Cf – решение уравнения (1.1).

Представление (2.1) является центральным результатом в теории устойчивости решений уравнения (1.1). В силу этого представления асимптотические свойства решений уравнения (1.1) определяются фундаментальной матрицей и оператором Коши для этого уравнения. В дальнейшем остановимся на этих вопросах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тривиальное решение однородного уравнения (1.1) назовем:

- *p-устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что при $|x_0| < \eta$ будет выполнено неравенство $E|x(s, x_0)|^p \leq \varepsilon$ для любого $s \in N_+$;
- *асимптотически p-устойчивым*, если оно *p-устойчиво*, и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что при $|x_0| < \eta$ будет $\lim_{s \rightarrow +\infty} E|x(s, x_0)|^p = 0$;
- *экспоненциально p-устойчивым*, если найдутся такие числа $\bar{c} > 0$, $\beta > 0$, что выполнено неравенство $E|x(s, x_0)|^p \leq \bar{c}|x_0|^p \exp\{-\beta s\}$ ($s \in N_+$).

Аналогично даются определения устойчивости любого решения уравнения (1.1). Однако из формулы (2.1) видно, что устойчивость любого решения уравнения (1.1) по начальным данным не зависит от f и эквивалентна устойчивости тривиального решения однородного уравнения (1.1). Поэтому в дальнейшем

вместо термина «устойчивость тривиального решения однородного уравнения» будем употреблять термин «устойчивость уравнения».

Как мы отмечали ранее, уравнения (1.2)–(1.4) являются частными случаями уравнения (1.1). Следовательно, и для этих уравнений так же имеет место определение 1, т. е. для них можно изучать вопросы устойчивости этих уравнений.

Справедлива следующая теорема, доказанная в работе [10].

ТЕОРЕМА 1. а) *p -устойчивость уравнения (1.1) эквивалентна тому, что для любого $x_0 \in R^n$ решение $x(., x_0)$ однородного уравнения (1.1) принадлежит пространству m_p .*

б) *Асимптотически p -устойчивость уравнения (1.1) эквивалентна тому, что существует числовая последовательность $\gamma(s) (s \in N_+)$ такая, что $\gamma(s) \geq \delta > 0$ при $s \in N_+$ (δ – некоторое число), $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty$ и для любого $x_0 \in R^n$ решение $x(., x_0)$ однородного уравнения (1.1) принадлежит пространству m_p^γ .*

в) *Экспоненциально p -устойчивость уравнения (1.1) эквивалентна тому, что существует положительное число β такое, что для любого $x_0 \in R^n$ решение $x(., x_0)$ однородного уравнения (1.1) принадлежит пространству m_p^γ , где $\gamma(s) = \exp\{\beta s\}$ ($s \in N_+$).*

Теорема 1 устанавливает эквивалентность между наиболее распространенными типами устойчивости уравнения (1.1) и разрешимостью задачи Коши для однородного уравнения (1.1) в соответствующем функциональном пространстве.

На основе теоремы 1 удобно ввести новое общее понятие устойчивости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Уравнение (1.1) назовем *m_p^γ -устойчивым*, если для любого $x_0 \in k_p^n$ имеем $Xx_0 \in m_p^\gamma$.

Из теоремы 1 получим, что для уравнения (1.1) из m_p -устойчивости следует p -устойчивость, из m_p^γ -устойчивости (где $\gamma(t) = \exp\{\beta s\}$ ($s \in N_+$) при некотором $\beta > 0$) следует экспоненциальная p -устойчивость, а из m_p^γ -устойчивости (где $\gamma(s) \geq \delta > 0$ при $s \in N_+$ для некоторого числа δ и $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty$) следует асимптотическая p -устойчивость.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в третьей строчке уравнений (1.3), (1.4) написано $j < 0$, и поэтому (1.3), (1.4) называют уравнениями. Если в третьей строчке (1.3), (1.4) написать $j \leq 0$, то (1.3), (1.4) называют начальными задачами. Такой подход аналогичен подходу, принятому в работе [5], и позволяет рассматривать уравнение (1.3), (1.4) как обобщение обыкновенного разностного уравнения Ито (1.2).

Известно, что при сделанных предположениях через $\mathcal{F}_0$ -измеримую n -мерную случайную величину x_0 проходит единственное решение уравнений (1.3), (1.4). Обозначим через $x_\varphi(s, x_0)$ ($s \in N_+$) решение уравнений (1.3), (1.4) при $f_i^2(s) \equiv 0$ при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$ и $f_i^3(s) \equiv 0$ при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$ соответственно, проходящее через x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Тривиальное решение однородного уравнения (1.3) (соответственно однородного уравнения (1.4) назовем:

– *p -устойчивым* относительно начальных данных, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $\varphi(j)(j < 0)$, x_0 из неравенств $\sup_{j < 0} E|\varphi(j)|^p < \delta$, $E|x_0|^p < \delta$ следует оценка $E|x_\varphi(s, x_0)|^p \leq \varepsilon$ при $s \in N_+$;

– *асимптотически p -устойчивым* относительно начальных данных, если оно p -устойчиво, и, кроме того, для любых $\varphi(j)(j < 0)$, x_0 из неравенств $\sup_{j < 0} E|\varphi(j)|^p < \delta$, $E|x_0|^p < \delta$ следует $\lim_{s \rightarrow +\infty} E|x_\varphi(s, x_0)|^p = 0$;

– *экспоненциально p -устойчивым* относительно начальных данных, если при некоторых положительных постоянных $\bar{c}$, β справедливо неравенство $E|x_\varphi(s, x_0)|^p \leq \bar{c}(E|x_0|^p + \sup_{j < 0} E|\varphi(j)|^p) \exp\{-\beta s\}$ ($s \in N_+$).

Нетрудно заметить, что из p -устойчивости, асимптотической p -устойчивости, экспоненциальной p -устойчивости тривиального решения однородного уравнения (1.3) (соответственно однородного уравнения (1.4) относительно начальных данных, следует соответственно p -устойчивость, асимптотическая p -устойчивость, экспоненциальная p -устойчивость уравнения (1.3) (соответственно уравнения (1.4)). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно даже для детерминированного уравнения.

3. Допустимость пар пространств и устойчивость относительно начальных данных

Перейдем к рассмотрению вопроса допустимости некоторых пар пространств для уравнения (1.1). Подобные вопросы даже для стохастических функционально-дифференциальных уравнений, по-видимому, другими авторами не рассматривались. Отметим, что задача допустимости пар пространств тесно связана с задачей устойчивости относительно начальных данных для линейных систем разностных уравнений Ито с запаздыванием. В дальнейшем будет показано как они связаны.

Пусть b – линейное подпространство пространства l^n с нормой $\|\cdot\|_b$, $b^\gamma = \{f : f \in b, \gamma f \in b\}$ – пространство с нормой $\|f\|_{b^\gamma} = \|\gamma f\|_b$ ($\gamma(s)(s \in N_+)$ и $x_f(s, x_0)$ определены ранее в п. 1 и в п. 2 соответственно).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что для уравнения (1.1) *допустима пара* (m_p^γ, b^γ) , если существует такое $\bar{c} \in R_+^1$, при котором для любых $x_0 \in k_p^n$, $f \in b^\gamma$ имеем $x_f(\cdot, x_0) \in m_p^\gamma$, причем выполнено неравенство

$$\|x_f(\cdot, x_0)\|_{m_p^\gamma} \leq \bar{c}(\|x_0\|_{k_p^n} + \|f\|_{m_p^\gamma}). \quad (3.1)$$

Пусть для уравнений (1.3) имеем $f_i^2 \equiv 0$, $i = 1, \dots, m$ и при любой начальной функции φ такой, что $\sup_{\nu < 0} E|\varphi(\nu)|^p < \infty$ случайный процесс f для уравнения (1.3) принадлежит некоторому нормированному подпространству b пространства l^n , норма в котором удовлетворяет неравенству

$$\|f\|_b \leq K \sup_{j < 0} (E|\varphi(j)|^p)^{1/p},$$

где K – некоторое положительное число. Тогда справедлива следующая лемма, доказанная в работе [10].

ЛЕММА 3.1. *Если для уравнения (1.1), соответствующее уравнению (1.3) допустима пара (m_p, b) , то тривиальное решение уравнения (1.3) p -устойчиво относительно начальных данных.*

Разумеется, в лемме 3.1 пространство b можно заменить на пространство b^γ . Тогда из допустимости пары (m_p^γ, b^γ) для уравнения (1.1), соответствующее уравнению (1.3) будет следовать экспоненциальная p -устойчивость относительно начальных данных тривиального решения однородного уравнения (1.3), если $\gamma(s) = \exp\{\beta s\}$ ($s \in N_+$), $\beta > 0$ и асимптотическая p -устойчивость относительно начальных данных тривиального решения однородного уравнения (1.3), если $\gamma(s) \geq \delta > 0$ ($s \in M_+$) для некоторого числа δ и $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty$.

Отметим, что все утверждения, которые имеют место для уравнения (1.3) справедливы и для уравнения (1.4), так как, как отмечалось ранее, уравнение (1.4) можно записать в виде (1.3).

4. Метод вспомогательных уравнений или W -метод

Для установления допустимости пары (m_p^γ, b^γ) для уравнения (1.1) необходимо проверить принадлежность решения $x_f(., x_0)$ уравнения (1.1) пространству m_p^γ при любых $x_0 \in k_p^n$, $f \in b^\gamma$ и выполнимость для него неравенства (3.1). Будем проверять выполнимость этих условий, используя эквивалентное преобразование уравнения (1.1).

Начнем с « W -преобразования». Для описания W -преобразования уравнения (1.1) перепишем это уравнение в виде

$$x(s+1) = x(s) + [(Vx)(s) + f(s)]Z(s) \quad (s \in N_+), \quad (4.1)$$

где $(Vx)(s) = (\sum_{j=0}^s [A_1(s, j)x(j), \sum_{j=0}^s [A_2(s, j)x(j), \dots, \sum_{j=0}^s [A_m(s, j)x(j))](s \in N_+)$, $f(s) = (f_1(s), f_2(s), \dots, f_m(s))(s \in N_+)$, $Z(s) = (h, (\mathcal{B}_2((s+1)h) - \mathcal{B}_2(sh)), \dots, (\mathcal{B}_m((s+1)h) - \mathcal{B}_m(sh)))(s \in N_+)$ все остальные параметры определены в уравнении (1.1). Нетрудно убедиться в том, что V является линейным оператором действующим из пространства d^n в пространство l^n .

Рассмотрим «модельное» уравнение, асимптотические свойства решений которого известны. Пусть модельное уравнение имеет вид

$$x(s+1) = x(s) + [(Qx)(s) + g(s)]Z(s) \quad (s \in N_+), \quad (4.2)$$

где $Q: d^n \rightarrow l^n$ – линейный оператор, $g \in l^n$. Предполагается, что через любое $x_0 \in k^n$ проходит единственное (с точностью до P -эквивалентности) решение x уравнения (4.2). Тогда, в силу леммы 2.1, для этого решения x имеет место представление $x(s) = U(s)x_0 + (Wg)(s)$ ($s \in N_+$), где U – фундаментальная матрица, W – оператор Коши для уравнения (4.2).

Уравнение (4.1), используя модельное уравнение (4.2), перепишем в виде

$$x(s+1) = x(s) + [(Qx)(s) + ((V-Q)x)(s) + f(s)]Z(s) \quad (s \in N_+)$$

или

$$x(s+1) = x(s) + U(s)x_0 + (W(V-Q)x)(s) + (Wf)(s) \quad (s \in N_+).$$

Обозначив $W(V-Q) = \Theta_l$, получим $((I - \Theta_l)x)(s) = U(s)x_0 + (Wf)(s) \quad (s \in N_+)$.

Отметим, что здесь и в дальнейшем обратимость оператора $(I - \Theta_l) : m_p^\gamma \rightarrow m_p^\gamma$ будет означать, что оператор $I - \Theta_l$ взаимно однозначно переводит пространство m_p^γ на себя. Справедлива следующая теорема, доказанная в [10].

ТЕОРЕМА 2. Пусть для модельного уравнения (4.2) допустима пара (m_p^γ, b^γ) , а оператор Θ_l действует в пространстве m_p^γ . Тогда, если оператор $(I - \Theta_l) : m_p^\gamma \rightarrow m_p^\gamma$ непрерывно обратим, то для уравнения (1.1) допустима пара (m_p^γ, b^γ) .

Перейдем к « W -подстановке». Уравнение (4.1) используя модельное уравнение (4.2) перепишем в виде

$$[(QUx_0)(s) + (QWg)(s)]Z(s) = [(V(Ux_0 + Wg)(s) + f(s)]Z(s) \quad (s \in N_+).$$

Обозначив $(V - Q)W = \Theta_r$ мы приходим к операторному уравнению $(I - \Theta_r)g = (V - Q)Ux_0$. Имеет место следующая теорема, доказанная в работе [10].

ТЕОРЕМА 3. Пусть для модельного уравнения (4.2) допустима пара (m_p^γ, b^γ) , а операторы V, Q непрерывно действуют из пространства m_p^γ в пространство b^γ . Тогда, если оператор $(I - \Theta_r) : b^\gamma \rightarrow b^\gamma$ непрерывно обратим, то для уравнения (1.1) допустима пара (m_p^γ, b^γ) .

Заметим, что при произвольном, априорном выборе модельного уравнения (4.2), для которого допустима пара (m_p^γ, b^γ) , бывают случаи, когда оператор Θ_l (Θ_r) даже не действует в соответствующем функциональном пространстве, в то время как для уравнения (1.1) допустима пара (m_p^γ, b^γ) . Однако, если для уравнения (1.1) допустима пара (m_p^γ, b^γ) , то всегда найдется хотя бы одно модельное уравнение, для которого допустима пара (m_p^γ, b^γ) и оператор Θ_l (Θ_r) будет действовать в соответствующем функциональном пространстве, причем оператор $I - \Theta_l$ ($I - \Theta_r$) будет непрерывно обратим в этом же пространстве. В качестве такого модельного уравнения (4.2) можно взять само уравнение (1.1), что тоже самое уравнение (4.2).

При использовании теорем 2 и 3 наиболее трудным является вопрос нахождения условий непрерывной обратимости оператора $(I - \Theta_l) : m_p^\gamma \rightarrow m_p^\gamma$ ($(I - \Theta_r) : b^\gamma \rightarrow b^\gamma$). Непрерывная обратимость оператора $(I - \Theta_l) : m_p^\gamma \rightarrow m_p^\gamma$ ($(I - \Theta_r) : b^\gamma \rightarrow b^\gamma$) можно установить, оценивая норму оператора Θ_l (Θ_r) в пространстве m_p^γ (b^γ). Если она меньше 1, то непрерывная обратимость гарантирована.

Отметим, что буквы «l» и «r» в операторах Θ_l , Θ_r происходят от слов «left» и «right» соответственно. Это означает, что W -метод применяется к оператору V слева и справа соответственно.

Из результатов п. 2 и п. 3. следует, что устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1.3) (соответственно и уравнения (1.4)) относительно начальных данных можно проверять преобразованием уравнения (1.3),

с помощью вспомогательного (модельного) уравнения, в другое, более простое, уравнение, для которого непосредственно можно проверить условия, обеспечивающие устойчивость тривиального решения уравнения (1.3) относительно начальных данных. Наряду с уравнением (1.3) рассмотрим линейную систему функционально-разностных уравнений вида

$$x(s+1) = x(s) + \left[\sum_{j=0}^s B(s, j)x(j) + g(s) \right] h(s \in N_+), \quad (4.3)$$

где h – достаточно малое действительное число, $B(s, j)$ – $n \times n$ -матрица, элементы которой действительные числа при $s \in N_+$, $j = 0, \dots, s$ и $g(s)$ – n -мерная $\mathcal{F}_s$ -измеримая случайная величина при $s \in N_+$, т.е. $g \in l^n$.

Линейную систему функционально-разностных уравнений (4.3) в дальнейшем возьмем в качестве модельного уравнения.

Для уравнения (4.3) рассмотрим соответствующее линейное однородное уравнение вида

$$x(s+1) = x(s) + \sum_{j=0}^s B(s, j)x(j)h(s \geq l). \quad (4.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. $n \times n$ -матрица $U(s, l)$ ($s, l \in N_+$, $0 \leq l \leq s$), столбцы которой являются решениями уравнения (4.4) и $U(l, l) = \bar{E}$ назовем фундаментальной матрицей для уравнения (4.3).

Приведем следующую лемму, доказанную в работе [6].

ЛЕММА 4.1. Для решения уравнения (4.3), проходящего через x_0 , имеет место представление

$$x(s) = U(s, 0)x_0 + \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1)g(\tau)h(s \in N_+).$$

Используя уравнение (4.3) и лемму 4.1, уравнение (1.3) при $f_i^2(s) \equiv 0$ для $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$ можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$x(s) = U(s, 0)x_0 + (\Theta x)(s) + (C\varphi)(s) \quad (s \in N_+), \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} (\Theta x)(s) &= \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1) \left[\sum_{j=0}^{\tau} [A_1^2(\tau, j) - B(\tau, j)]x(j)h + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} A_i^2(\tau, j)x(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} dB_i(\zeta) \right], \\ (C\varphi)(s) &= \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1) \left[\sum_{j=-\infty}^{-1} A_1^2(\tau, j)\varphi(j)h + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^{-1} A_i^2(\tau, j)\varphi(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} dB_i(\zeta) \right]. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть для некоторой положительной последовательности $\gamma(s) (s \in N_+)$ и при любых $x, \varphi(j) (j < 0), x_0$ таких, что $x \in m_p^\gamma$, $\sup_{j < 0} E|\varphi(j)|^p < \infty$, $x_0 \in k_p^n$ для уравнения (4.5) имеем $U(., 0)x_0 \in m_p^\gamma$, $\Theta x \in m_p^\gamma$, $C\varphi \in m_p^\gamma$, $\|U(., 0)x_0\|_{m_p^\gamma} \leq c_1\|x_0\|_{k_p^n}$, $\|\Theta x\|_{m_p^\gamma} \leq c_2\|x\|_{m_p^\gamma}$, $\|C\varphi\|_{m_p^\gamma} \leq c_3 \sup_{j < 0} (E|\varphi(j)|^p)^{1/p}$, где c_1, c_2, c_3 – некоторые положительные числа и $c_2 < 1$. Тогда:

1) если $\gamma(s) = 1 (s \in N_+)$, то тривиальное решение однородного уравнения (1.3) p -устойчиво относительно начальных данных;

2) если $\gamma(s) \geq \delta (s \in N_+)$ для некоторого $\delta > 0$ и $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty$, то тривиальное решение однородного уравнения (1.3) асимптотически p -устойчиво относительно начальных данных;

3) если $\gamma(s) = \exp\{\beta s\} (s \in N_+)$ для некоторого $\beta > 0$, то тривиальное решение однородного уравнения (1.3) экспоненциально p -устойчиво относительно начальных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для уравнения (1.3) $f_i^2(s) \equiv 0$ при $s \in N_+$, $i = 1, \dots, m$. Нетрудно заметить, что решение уравнения (4.5) совпадает с решением уравнения (1.3) $x_\varphi(s, x_0) (s \in N_+)$ в силу того, что уравнение (4.5) получено из уравнения (1.3) эквивалентным преобразованием. При предположениях теоремы для любых $x, \varphi(j) (j < 0), x_0$ таких, что $x \in m_p^\gamma$, $\sup_{j < 0} E|\varphi(j)|^p < \infty$, $x_0 \in k_p^n$ имеем $x_\varphi(., x_0) \in m_p^\gamma$ и справедливо неравенство $\|x_\varphi(., x_0)\|_{m_p^\gamma} \leq K(\|x_0\|_{k_p^n} + \sup_{j < 0} (E|\varphi(j)|^p)^{1/p})$, где K – некоторое положительное число. Тогда нетрудно убедиться в том, что:

1) если $\gamma(s) = 1 (s \in N_+)$, то тривиальное решение однородного уравнения (1.3) p -устойчиво относительно начальных данных;

2) если $\gamma(s) \geq \delta (s \in N_+)$ для некоторого $\delta > 0$ и $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty$, то тривиальное решение однородного уравнения (1.3) асимптотически p -устойчиво относительно начальных данных;

3) если $\gamma(s) = \exp\{\beta s\} (s \in N_+)$ для некоторого $\beta > 0$, то тривиальное решение однородного уравнения (1.3) экспоненциально p -устойчиво относительно начальных данных.

Теорема доказана.

5. Достаточные условия устойчивости относительно начальных данных

В дальнейшем понадобится следующее неравенство

$$\left(E \left| \int_t^{t+h} \psi(\zeta) d\mathcal{B}_i(\zeta) \right|^{2p} \right)^{1/2p} \leq c_p \left(E \left| \int_t^{t+h} |\psi(\zeta)|^2 d\zeta \right|^p \right)^{1/2p}, \quad (5.1)$$

где $h > 0$, c_p – некоторое число, зависящее от p ($c_1 = 1$), справедливость которого следует из [11; с.65].

ТЕОРЕМА 5. Пусть для уравнения (1.3) выполнены условия:

1) $\|A_i^2(s, j)\| \leq a_i(s, j)$ P -почти всюду, где $a_i(s, j)$ – некоторое действительное число при $i = 1, \dots, m$, $s \in N_+$, $j = -\infty, \dots, s$;

$$2) \hat{c}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\tau} a_1(\tau, j)h + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} a_i(\tau, j)\sqrt{h} \right] < 1;$$

$$3) \hat{c}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau=0}^{\infty} \left[\sum_{j=-\infty}^{-1} a_1(\tau, j)h + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^{-1} a_i(\tau, j)\sqrt{h} \right] < \infty.$$

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (1.3) $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой 4. Пусть в уравнении (4.3) $B(s, j) = 0$ при $s \in N_+$, $j = 0, \dots, s$. Тогда фундаментальная матрица для уравнения (4.3) имеет вид $U(s, l) = \bar{E}$. Очевидно, что для любого $x_0 \in k_{2p}^n$ имеем $U(., 0)x_0 \in m_{2p}$ и $\|U(., 0)x_0\|_{m_{2p}} \leq \|x_0\|_{k_{2p}^n}$. Кроме того,

$$(\Theta x)(s) = \sum_{\tau=0}^{s-1} \left[\sum_{j=0}^{\tau} A_1^2(\tau, j)x(j)h + \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} A_i^2(\tau, j)x(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\zeta) \right],$$

$$(C\varphi)(s) = \sum_{\tau=0}^{s-1} \left[\sum_{j=-\infty}^{-1} A_1^2(\tau, j)\varphi(j)h + \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^{-1} A_i^2(\tau, j)\varphi(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\zeta) \right].$$

Используя неравенство (5.1), нетрудно непосредственно убедиться в том, что $\|\Theta x\|_{m_{2p}} \leq \hat{c}_1 \|x\|_{m_{2p}}$, $\|C\varphi\|_{m_{2p}} \leq \hat{c}_2 \sup_{j<0} (E|\varphi(j)|^p)^{1/p}$. Тогда, в силу теоремы 4, тривиальное решение однородного уравнения (1.3) $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены следующие условия:

1) в уравнении (1.3) элементы матрицы $A_1^2(s, j)$ равны нулю P -почти всюду при $s \in N_+$, $j < 0$ и действительные числа P -почти всюду при $s \in N_+$, $0 \leq j \leq s$;

2) для некоторого положительного числа $\hat{c}_1$ фундаментальная матрица для уравнения (4.3) $U(s, l)$ в случае, когда $B(s, j) = A_1^2(s, j)$ при $s \in N_+$, $0 \leq j \leq s$ удовлетворяет неравенству $\|U(s, l)\| \leq \hat{c}_1$ при $s \in N_+$, $0 \leq l \leq s$;

3) $\|A_i^2(s, j)\| \leq a_i(s, j)$ P -почти всюду, где $a_i(s, j)$ – некоторое действительное число при $i = 2, \dots, m$, $s \in N_+$, $j = -\infty, \dots, s$;

$$4) \hat{c}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{c}_1 c_p \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} a_i(\tau, j)\sqrt{h} < 1;$$

$$5) \hat{c}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{c}_1 c_p \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^{-1} a_i(\tau, j)\sqrt{h} < \infty.$$

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (1.3) $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой 4. Пусть в уравнении (4.3) $B(s, j) = A_1^2(s, j)$ при $s \in N_+$, $0 \leq j \leq s$. Тогда,

в силу условия 2) теоремы, для любого $x_0 \in k_{2p}^n$ имеем $U(., 0)x_0 \in m_{2p}$ и $\|U(., 0)x_0\|_{m_{2p}} \leq \hat{c}_1 \|x_0\|_{k_{2p}^n}$. Кроме того,

$$(\Theta x)(s) = \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1) \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} A_i(\tau, j)x(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\zeta),$$

$$(C\varphi)(s) = \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1) \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^{-1} A_i(\tau, j)\varphi(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\zeta).$$

Используя неравенство (5.1), нетрудно непосредственно убедиться в том, что $\|\Theta x\|_{m_{2p}} \leq \hat{c}_2 \|x\|_{m_{2p}}$, $\|C\varphi\|_{m_{2p}} \leq \hat{c}_3 \sup_{j < 0} (E|\varphi(j)|^p)^{1/p}$. Тогда, в силу теоремы 4, тривиальное решение однородного уравнения (1.3) $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены следующие условия:

1) в уравнении (1.3) элементы матрицы $A_1^2(s, j)$ равны нулю P -почти всюду при $s \in N_+$, $j < 0$ и действительные числа P -почти всюду при $s \in N_+$, $0 \leq j \leq s$;

2) фундаментальная матрица для уравнения (4.3) $U(s, l)$ в случае, когда $B(s, j) = A_1^2(s, j)$ при $s \in N_+$, $0 \leq j \leq s$ удовлетворяет неравенству $\|U(s, l)\| \leq \lambda^{s-l}$, где $0 < \lambda < 1$ при $s \in N_+$, $0 \leq l \leq s$;

3) $\|A_i^2(s, j)\| \leq a_i(s, j)$ P -почти всюду, где $a_i(s, j)$ – некоторое действительное число при $i = 2, \dots, m$, $s \in N_+$, $j = -\infty, \dots, s$;

$$4) \hat{c}_1 \stackrel{\text{def}}{=} c_p \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} a_i(\tau, j) \sqrt{h} < 1 - \lambda;$$

$$5) \hat{c}_2 \stackrel{\text{def}}{=} c_p \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^{-1} a_i(\tau, j) \sqrt{h} < \infty.$$

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (1.3) $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой 4. Пусть в уравнении (4.3) $B(s, j) = A_1^2(s, j)$ при $s \in N_+$, $0 \leq j \leq s$. Тогда, в силу условия 2) теоремы, для любого $x_0 \in k_{2p}^n$ имеем $U(., 0)x_0 \in m_{2p}$ и $\|U(., 0)x_0\|_{m_{2p}} \leq \|x_0\|_{k_{2p}^n}$. Кроме того,

$$(\Theta x)(s) = \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1) \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} A_i^2(\tau, j)x(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\zeta),$$

$$(C\varphi)(s) = \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1) \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^{-1} A_i^2(\tau, j)\varphi(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\zeta).$$

Используя неравенство (5.1), нетрудно непосредственно убедиться в том, что $\|\Theta x\|_{m_{2p}} \leq (\hat{c}_1/(1 - \lambda)) \|x\|_{m_{2p}}$, $\|C\varphi\|_{m_{2p}} \leq \hat{c}_2 \sup_{j < 0} (E|\varphi(j)|^p)^{1/p}$. Тогда, в силу теоремы 1.4, тривиальное решение однородного уравнения (1.3) $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

Теорема доказана.

6. Теорема типа Боля – Перрона

В теории устойчивости детерминированных линейных функционально-дифференциальных уравнений теоремами типа Боля – Перрона называют теоремы устанавливающие эквивалентность допустимости пространств без веса и весовых пространств. Аналогичные утверждения имеют место и в случае уравнения (1.1).

В дальнейшем вместо общего пространства l^n нам потребуются следующие примеры нормированных подпространств пространства l^n :

$$\begin{aligned}\lambda_{p,q}^n &= \{H : H \in l^n, (E|Ha|^p)^{1/p}, (E\|HAN^\top\|^{p/2})^{1/p} \in l_q, \\ &\|H\|_{\lambda_{p,q}^n} \stackrel{\text{def}}{=} \|(E|Ha|^p)^{1/p}\|_{l_q} + \|(E\|HAN^\top\|^{p/2})^{1/p}\|_{l_q}\}; \\ \lambda_{p,q}^{n+} &= \{H : H \in l^n, (E|H^+a|^p)^{1/p}, (E\|H^+A(H^+)^\top\|^{p/2})^{1/p} \in l_q, \\ &\|H\|_{\lambda_{p,q}^{n+}} \stackrel{\text{def}}{=} \|(E|H^+a|^p)^{1/p}\|_{l_q} + \|(E\|H^+A(H^+)^\top\|^{p/2})^{1/p}\|_{l_q}\}.\end{aligned}$$

В предыдущих пространствах использованы следующие обозначения:

- $a = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ – m -мерный вектор столбец;
- A – $m \times m$ -диагональная матрица, диагональные элементы которой начиная с второго элемента равны единице, а первый диагональный элемент равен нулю;
- l_q – линейное нормированное пространство бесконечных числовых последовательностей при $1 \leq q \leq \infty$ с обычной нормой.

Отметим, что эти пространства играют важную роль при изучении вопросов устойчивости по начальной функции для уравнений (1.3), (1.4).

В дальнейшем для заданного β положим $\gamma(s) = \exp\{\beta s\}$ ($s \in N_+$).

Ниже $\bar{m}_p$ обозначает пространство, совпадающее с пространством m_p в скалярном случае. Мы предполагаем, что линейный оператор V в уравнении (4.1) удовлетворяет условию: $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$. Мы также будем использовать следующие обозначения, связанные с оператором V :

- $Vx = (V_1x, \dots, V_mx)$;
- $(V_\beta x)(s) = \gamma(s)(V(x/\gamma))(s)$ ($s \in N_+$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что линейный оператор $\bar{V} : \bar{m}_p \rightarrow \lambda_{p,q}^{1+}$ является *мажорантой* линейного оператора $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$, если: 1) оператор $\bar{V}x$ положителен, т.е. $x \geq 0$ п.н. влечет $\bar{V}x \geq 0$ п. н.; 2) $(|V_1x|, \dots, |V_mx|) \leq \bar{V}|x|$ п. н. для любого $x \in m_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем говорить, что линейный оператор $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$ удовлетворяет Δ -условию, если оператор V допускает линейную мажоранту $\bar{V} : \bar{m}_p \rightarrow \lambda_{p,q}^{n+}$, удовлетворяющую следующему дополнительному условию: существует число $\beta_0 > 0$, для которого оператор $\bar{V}_{\beta_0}$ непрерывно действует из пространства $\bar{m}_p$ в пространство $\lambda_{p,q}^{1+}$.

В дальнейшем нам нужны будут более конкретные ограничения на модельное уравнение (4.2).

УСЛОВИЕ 1. Фундаментальная матрица для модельного уравнения (4.2) удовлетворяет оценке $\|\gamma(s)U(s)\| \leq \hat{c}(s \geq N_+)$, где $\hat{c} \in R_+$.

УСЛОВИЕ 2. Оператор Коши для модельного уравнения (4.2) имеет «интегральную» форму

$$(Wg)(s) = \sum_{\tau=0}^s C(s, \tau)g(\tau)Z(\tau) (s \in N_+),$$

где $C(s, \tau)$ – $n \times n$ -матричная функция, заданная на $G := \{(s, \tau) : s, \tau \in N_+, 0 \leq \tau \leq s\}$ и удовлетворяющая оценке $\|C(s, \tau)\| \leq \bar{c} \exp\{-\alpha(s - \tau)\}$ на G , где $\bar{c} > 0$ для некоторого $\alpha > 0$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6.1. Пусть для модельного уравнения (4.2) выполняются условия 1 и 2.

Тогда для всех β таких, что $0 < \beta < \alpha$ для уравнения (4.2) допустима пара $(m_{2p}^\gamma, (\lambda_{2p,q}^n)^\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для модельного уравнения (4.2) выполнено условие 1, будем иметь $Ux_0 \in m_{2p}^\gamma$ при любом $x_0 \in k_{2p}^n$. Лемма будет доказана, если покажем, что для любого $g \in (\lambda_{2p,q}^n)^\gamma$ имеем $Wg \in m_{2p}^\gamma$ и $\|Wg\|_{m_{2p}^\gamma} \leq \hat{c}\|g\|_{(\lambda_{2p,q}^n)^\gamma}$, где $\hat{c}$ – некоторое положительное число.

Имеем

$$\begin{aligned} lg &:= \|Wg\|_{m_{2p}^\gamma} = \|\gamma Wg\|_{m_{2p}} = \|\gamma \sum_{\tau=0}^s C(\cdot, \tau)g(\tau)Z(\tau)\|_{m_{2p}} = \\ &= \sup_{s \geq 0} (E|\gamma(s) \sum_{\tau=0}^s C(s, \tau)g(\tau)Z(\tau)|^{2p})^{1/1p} \leq \\ &\leq c_1 \sup_{s \geq 0} (E(\sum_{\tau=0}^s \hat{c} \exp\{-(\alpha - \beta)(s - \tau)\} |\gamma(\tau)g(\tau)Z(\tau)|^{2p})^{1/1p} \leq \\ &\leq \hat{c}_1 \sup_{s \geq 0} (\sum_{\tau=0}^s \exp\{-(\alpha - \beta)(s - \tau)\} (E|\gamma(\tau)g(\tau)Z(\tau)|^{2p})^{1/1p}), \end{aligned}$$

где $\hat{c}$, c_1 , $\hat{c}_1$ – некоторые положительные числа.

Для дальнейших оценок воспользуемся обозначением

$$Z(\tau) = \left(\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\varsigma, \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} \mathcal{B}_2(\varsigma), \dots, \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} \mathcal{B}_m(\varsigma) \right)^\top = \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\hat{Z}(\varsigma),$$

где

$$\hat{Z}(\varsigma) = (\varsigma, \mathcal{B}_2(\varsigma), \dots, \mathcal{B}_m(\varsigma))^\top, \varsigma \in [\tau h, (\tau + 1)h], \tau \in N_+.$$

Отсюда в силу неравенства

$$(E| \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} \gamma(\tau)g(\tau)d\hat{Z}(\varsigma)|^{2p})^{1/2p} \leq (E(\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} |\gamma(\tau)g(\tau)a|d\varsigma)^{2p})^{1/2p} +$$

$$+c_p(E(\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} \|\gamma(\tau)g(\tau)A(\gamma(\tau)g(\tau))^\top\|d\varsigma)^p)^{1/2p},$$

справедливость которого следует в силу [11; с. 65] получим

$$\begin{aligned} (E|\gamma(\tau)g(\tau)Z(\tau)|^{2p})^{1/2p} &= (E|\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} \gamma(\varsigma)g(\varsigma)d\hat{Z}(\varsigma)|^{2p})^{1/2p} \leq \\ &\leq (E(\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} |\gamma(\varsigma)g(\varsigma)a|d\varsigma)^{2p})^{1/2p} + c_p(E(\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} \|\gamma(\varsigma)g(\varsigma)A(\gamma(\varsigma)g(\varsigma))^\top\|d\varsigma)^p)^{1/2p} \leq \\ &\leq c_2[(E(|\gamma(\tau)g(\tau)a|^{2p})^{1/2p} + c_p(E\|\gamma(\tau)g(\tau)A(\gamma(\tau)g(\tau))^\top\|^p)^{1/2p}], \end{aligned}$$

где c_2 – некоторое положительное число. Используя полученную оценку, имеем

$$\begin{aligned} lg &\leq c_3 \sup_{s \geq 0} (\sum_{\tau=0}^s \exp\{-(\alpha - \beta)(s - \tau)\} [(E(|\gamma(\tau)g(\tau)a|^{2p})^{1/2p} + \\ &+ c_p(E\|\gamma(\tau)g(\tau)A(\gamma(\tau)g(\tau))^\top\|^p)^{1/2p}]), \end{aligned}$$

где c_3 – некоторое положительное число.

При $q = 1$ в силу того, что $\exp\{-(\alpha - \beta)(s - \tau)\} \leq 1$ получим $lg := \|Wg\|_{m_{2p}^\gamma} \leq c_3 \|g\|_{(\lambda_{2p,q}^n)^\gamma}$, т.е. для любого $g \in (\lambda_{2p,q}^n)^\gamma$ имеем $Wg \in m_{2p}^\gamma$ и $\|Wg\|_{m_{2p}^\gamma} \leq c_3 \|g\|_{(\lambda_{2p,q}^n)^\gamma}$.

Так как для любого положительного $\hat{\alpha}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^s \exp\{-\hat{\alpha}(s - \tau)\} &= 1 + \exp\{-\hat{\alpha}\} + \dots + \exp\{-\hat{\alpha}s\} = \\ &= (1 - \exp\{-\hat{\alpha}(s + 1)\}) / (1 - \exp\{-\hat{\alpha}\}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

при $q = \infty$ справедливость леммы становится очевидным.

При $1 < q < \infty$ получим

$$\begin{aligned} lg &\leq c_3 \sup_{s \geq 0} [(\sum_{\tau=0}^s \exp\{-\hat{q}(\alpha - \beta)(s - \tau)\})^{1/\hat{q}} \{(\sum_{\tau=0}^s (E|\gamma(\tau)g(\tau)a|^{2p})^{q/2p})^{1/q} + \\ &+ (\sum_{\tau=0}^s c_p(E\|\gamma(\tau)g(\tau)A(\gamma(\tau)g(\tau))^\top\|^p)^{q/2p})^{1/q}\}], \end{aligned}$$

где $\hat{q} = q/(1 - q)$. Учитывая равенство (6.1) будем иметь $Wg \in m_{2p}^\gamma$ для любого $g \in (\lambda_{2p,q}^n)^\gamma$ и $\|Wg\|_{m_{2p}^\gamma} \leq \hat{c} \|g\|_{(\lambda_{2p,q}^n)^\gamma}$, где $\hat{c}$ – некоторое положительное число при $1 < q < \infty$.

Лемма доказана.

Следующий результат дает достаточные условия допустимости пар пространств с весом. Эта теорема можно назвать некоторым распространением теоремы Боля – Перрона на случай уравнения (1.1).

ТЕОРЕМА 8. Пусть уравнение (1.1) и модельное уравнение (4.2) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) операторы V, Q непрерывно действуют из m_{2p} в $\lambda_{2p,q}^n$, $1 \leq q \leq \infty$;
- 2) модельное уравнение (4.2) удовлетворяет условиям 1 и 2;
- 3) оператор V удовлетворяет Δ -условию;

Тогда, если оператор $(I - \Theta_l) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$ непрерывно обратим, то для уравнения (1.1) допустима пара $(m_{2p}^\gamma, (\lambda_{2p,q}^n)^\gamma)$ при некотором $\beta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства допустимости пары $(m_{2p}^\gamma, (\lambda_{2p,q}^n)^\gamma)$ для уравнения (1.1) (соответственно уравнения (4.1)) при некотором $\beta > 0$ достаточно показать допустимость пары $(m_{2p}, \lambda_{2p,q}^n)$ для уравнения

$$y(s+1) = \exp\{\beta\}[y(s) + [\gamma(s)(V(y/\gamma)(s) + \hat{f}(s))Z(s)](s \in N_+), \quad (6.2)$$

где $\hat{f}(s) = \gamma(s)f(s)$ ($s \in N_+$) при некотором $\beta > 0$ в силу того, что уравнение (6.2) получено из уравнения (4.1) заменой $x(t) = y(s)/\gamma(s)$ ($s \in N_+$). Уравнение (6.2) используя модельное уравнение (4.2) перепишем в виде

$$y(s+1) = \exp\{\beta\}y(s + U(s)y_0 + (\Theta_l^\beta y)(s) + \exp\{\beta\}(W\hat{f})(s)(s \in N_+),$$

где $\Theta_l^\beta y = W(\exp\{\beta\}\gamma V(y/\gamma)) - Qy$.

Ввиду того, что оператор V удовлетворяет Δ -условию (по условиям теоремы), существует такое число $\beta_0 > 0$, что оператор Θ_l^β непрерывно действует в пространстве m_{2p} при всех $0 \leq \beta \leq \beta_0$. Это следует из того, что если оператор V удовлетворяет Δ -условию, то оператор $\bar{V}_\beta$ действует из пространства m_{2p} в пространство $\lambda_{2p,q}^{1+}$ и ограничен при всех $0 \leq \beta \leq \beta_0$ и из леммы 6.1. Отсюда, в силу условий теоремы, непрерывное продолжение оператора $(I - \Theta_l) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$ на пополнение пространства m_{2p} обратимо. Если теперь мы докажем, что $\|\Theta_l^\beta - \Theta_l\| \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$, то тогда оператор $(I - \Theta_l^\beta) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$ также будет непрерывно обратим при некотором $\beta > 0$ [12]. Отметим, что в этом случае непрерывное продолжение оператора $(I - \Theta_l^\beta) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$ на пополнение пространства m_{2p} обратимо. Обратимость оператора $(I - \Theta_l^\beta) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$ следует из того, что решение уравнения $(I - \Theta_l^\beta)y = g$ при $g \in m_{2p}$ принадлежит пространству d^n и пересечение пространства d^n с пополнением пространства m_{2p} совпадает с пространством m_{2p} .

Заметим, что оператор $(\Theta_l^\beta - \Theta_l)$ определяется выражением

$$((\Theta_l^\beta - \Theta_l)y)(s) = \sum_{\tau=0}^s C(s, \tau) \exp\{\beta\}(V(\exp\{\beta(\tau - \cdot)\} - 1)y)(\tau)Z(\tau).$$

Тогда, рассуждая аналогично, как при доказательстве леммы 4, получим

$$\begin{aligned} & \|(\Theta_l^\beta - \Theta_l)y\|_{m_{2p}} \leq \\ & \leq \sup_{s \geq 0} (E(\sum_{\tau=0}^s \hat{c} \exp\{-\alpha(s - \tau)\} |V(\exp\{\beta(\tau - \cdot)\} - 1)y)(\tau)Z(\tau)|^{2p})^{1/2p} \leq \\ & \leq c_1 \sup_{s \geq 0} (\sum_{\tau=0}^s \exp\{-\alpha(s - \tau)\} (E|V(\exp\{\beta(\tau - \cdot)\} - 1)y)(\tau)Z(\tau)|^{2p})^{1/2p} \leq \end{aligned}$$

$$\leq c_2 \sup_{s \geq 0} \left(\sum_{\tau=0}^s c \exp\{-\alpha(s-\tau)\} [(E|(V(\exp\{\beta(\tau-\cdot)\} - 1)y)(\tau)a|^{2p})^{1/2p} + \right. \\ \left. + c_p(E|(V(\exp\{\beta(s-\cdot)\} - 1)y)(s)A((V(\exp\{\beta(s-\cdot)\} - 1)y)(s))^\top ||^p)^{1/2p} \right].$$

где $\hat{c}, c_1, c_2$ – некоторые положительные числа.

Далее, если воспользоваться неравенством

$$\exp\{\beta(t-\zeta)\} - 1 \leq (\beta/\beta_0) \exp\{\beta_0(t-\zeta)\}, \\ \zeta \in [0, t], 0 \leq \beta \leq \beta_0,$$

следующее из оценки

$$\beta\nu + \beta^2\nu^2/2! + \beta^3\nu^3/3! + \dots \leq \beta/\beta_0 + \beta\nu + \\ + \beta^2\nu^2/2! + \dots \leq (\beta/\beta_0)(1 + \beta_0\nu + \beta_0^2\nu^2/2! + \dots), \nu > 0,$$

а также тем, что оператор V удовлетворяет Δ -условию, то получим

$$||(\Theta^\beta - \Theta)x||_{M_{2p}} \leq \\ \leq c_2 \sup_{s \geq 0} \left(\sum_{\tau=0}^s \exp\{-\alpha(s-\tau)\} [(E|(\hat{V}|\exp\{\beta(\tau-\cdot)\} - 1||y|)(\tau)a|^{2p})^{1/2p} + \right. \\ \left. + c_p(E|(\hat{V}|\exp\{\beta(s-\cdot)\} - 1||y|)(s)A((\hat{V}|\exp\{\beta(s-\cdot)\} - 1||y|)(s))^\top ||^p)^{1/2p} \right] \leq \\ \leq c_2 \sup_{s \geq 0} \left(\sum_{\tau=0}^s \exp\{-\alpha(s-\tau)\} (\beta/\beta_0) [(E|(\hat{V}_{\beta_0}|y|)(\tau)a|^{2p})^{1/2p} + \right. \\ \left. + c_p(E|(\hat{V}_{\beta_0}0|y|)(s)A((\hat{V}_{\beta_0}0|y|)(s))^\top ||^p)^{1/2p} \right].$$

Для дальнейших оценок, как и при доказательстве леммы, необходимо воспользоваться равенством (6.2) и рассмотреть три случая: 1) $q = 1$; 2) $q = \infty$; 3) $1 < q < \infty$. Отдельно рассматривая каждый случай, как и при доказательстве леммы 4.1, из предыдущей оценки получим, что

$$||(\Theta_l^\beta - \Theta_l)y||_{m_{2p}} \leq \beta c_3 ||\bar{V}_{\beta_0}|y|||_{\lambda_{2p,q}^{1+}}$$

для некоторого положительного числа c_3 . Поэтому, в силу ограниченности оператора $\bar{V}_{\beta_0} : m_{2p} \rightarrow \lambda_{2p,q}^{1+}$, получим

$$||(\Theta_l^\beta - \Theta_l)x||_{m_{2p}} \leq \beta c_4 ||y||_{m_{2p}},$$

где c_4 – некоторое положительное число. Отсюда имеем $||\Theta_l^\beta - \Theta_l|| \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$. А как отмечено выше, этого достаточно для доказательства теоремы.

Теорема доказана.

ЛЕММА 6.2. Пусть для уравнения (1.2) выполнены условия $||A_i(s)|| \leq a_i(s)$ ($s \in N_+$), $i = 1, \dots, m$ P -почти всюду, где $a_i \in l_q$ при $i = 1, \dots, m$. Тогда оператор V для соответствующего уравнению (1.2) уравнения (4.1) является отображением вида $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$ и удовлетворяет Δ -условию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в предположениях леммы оператор V для уравнения (4.1), соответствующего уравнению (1.2), действует из пространства m_p в пространство $\lambda_{p,q}^n$, а линейный оператор $\hat{V}$, определяемый равенством $(\hat{V}x)(s) = (a_1(s)x(s), \dots, a_m(s)x(s))$ действует из пространства m_p в пространство $\lambda_{p,q}^{1+}$ и является мажорантой оператора $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$. В силу того, что для любого $\beta > 0$ оператор $\hat{V}_\beta$ непрерывно действует из пространства m_p в пространство $\lambda_{p,q}^{1+}$ получим, что оператор $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$ удовлетворяет Δ -условию.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. Пусть для уравнения (1.4) выполнены условия $\|A_i^3(s, j)\| \leq a_i^3(s)(s \in N_+)$, $j = s - d, \dots, s$, $i = 1, \dots, m$ P -почти всюду, где $a_i^3 \in l_q$ при $i = 1, \dots, m$. Тогда оператор V для уравнения (4.1) соответствующее уравнению (1.4) $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$ и удовлетворяет Δ -условию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в предположениях леммы оператор V для уравнения (4.1) соответствующее уравнению (1.4) действует из пространства m_p в пространство $\lambda_{p,q}^n$, а линейный оператор $\hat{V}$, определяемый равенством $(\hat{V}x)(s) = (a_1^3(s)x(s), \dots, a_m^3(s)x(s))$ действует из пространства m_p в пространство $\lambda_{p,q}^{1+}$ и является мажорантой оператора $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$. В силу того, что для любого $\beta > 0$ оператор $\hat{V}_\beta$ непрерывно действует из пространства m_p в пространство $\lambda_{p,q}^{1+}$ получим, что оператор $V : m_p \rightarrow \lambda_{p,q}^n$ удовлетворяет Δ -условию. То, что для любого $\beta > 0$ оператор $\hat{V}_\beta$ непрерывно действует из пространства m_p в пространство $\lambda_{p,q}^{1+}$, проверяется непосредственно.

Лемма доказана.

7. Экспоненциальная устойчивость относительно начальных данных

Перейдем к исследованию экспоненциальной p -устойчивости тривиального решения однородного уравнения (1.3) относительно начальных данных. Результаты этого пункта можно доказать, используя теорему 4 или теорему 8. Мы ограничимся доказательством этих результатов, используя теорему 4. При этом будем пользоваться следующими известными фактами:

- 1) из результатов работы [2] следует, что экспоненциальная p -устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1.3) относительно начальных данных возможно в случае ограниченного запаздывания;
- 2) присутствие слагаемых с винеровскими процессами в уравнении (1.3) не может улучшить устойчивость тривиального решения этого же однородного уравнения без этих слагаемых относительно начальных данных.

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) в уравнении (1.3) элементы матрицы $A_i^2(s, j)$ равны нулю P -почти всюду при $s \in N_+$, $j = -\infty, \dots, s - d_i - 1$, где d_i — некоторое натуральное число при $i = 1, \dots, m$, а элементы матрицы $A_1^2(s, j)$ действительные числа P -почти всюду при $s \in N_+$, $j = s - d_1, \dots, s$;
- 2) для уравнения (4.3) элементы матрицы $B(s, j)$ равны нулю, если $0 \leq s \leq d_1$ при $0 \leq j \leq s$ и, если $s > d_1$ при $0 \leq j \leq s - d_1$, а фундаментальная

матрица $U(s, l)$ удовлетворяет неравенству $\|U(s, l)\| \leq \lambda^{s-l}$, где $0 < \lambda < 1$ при $s \in N_+$, $0 \leq l \leq s$;

3) $\|A_i^2(s, j)\| \leq a_i(s, j)$ P -почти всюду, где $a_i(s, j)$ — некоторое действительное число при $i = 2, \dots, m$, $s \in N_+$, $0 \leq j \leq s$;

4) $\hat{c} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\tau \geq 0} \left[\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \|A_1^2(\tau, j) - B(\tau, j)\| h + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} a_i(\tau, j) \sqrt{h} \right] < 1 - \lambda$, где $\nu_i(\tau) = 0$ при $0 \leq \tau \leq d_i$ и $\nu_i(\tau) = \tau - d_i$ при $\tau > d_i$ для $i = 1, \dots, m$.

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (1.1) экспоненциально $2p$ -устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой 4. Пусть $\gamma(s) = \exp\{\beta s\}$ ($s \in N_+$), где β — некоторое положительное число. Тогда, в силу условия 2) теоремы, для любого $x_0 \in k_{2p}^n$ имеем $U(\cdot, 0)x_0 \in m_{2p}^\gamma$ и $\|U(\cdot, 0)x_0\|_{m_{2p}^\gamma} \leq \|x_0\|_{k_{2p}^n}$ для любого $0 < \beta < -\ln \lambda$. Кроме того,

$$(\Theta x)(s) = \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1) \left[\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} [A_1(\tau, j) - B(\tau, j)] x(j) h + \sum_{i=2}^m \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} A_i(\tau, j) x(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\zeta) \right],$$

$$(C\varphi)(s) = \sum_{\tau=0}^{s-1} U(s, \tau+1) \left[\sum_{j=-d_1}^{-1} \chi_1(\tau) A_1(\tau, j) \varphi(j) h + \sum_{i=2}^m \sum_{j=-d_i}^{-1} \chi_i(\tau) A_i(\tau, j) \varphi(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\zeta) \right],$$

где $\nu_i(\tau) = 0$ при $0 \leq \tau \leq d_i$ и $\nu_i(\tau) = \tau - d_i$ при $\tau > d_i$, $\chi_i(\tau)$ — характеристическая функция множества $0 \leq \tau \leq d_i$ при $\tau \in N_+$ для $i = 1, \dots, m$.

Если β такое, что $\lambda \exp\{\beta\} < 1$, используя неравенство (5.1), получим

$$\begin{aligned} \|\Theta x\|_{m_{2p}^\gamma} &\leq \sup_{s \geq 0} \left[(\lambda \exp\{\beta\})^s \sum_{\tau=0}^s \lambda^{-\tau-1} \left[\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \|A_1^2(\tau, j) - B(\tau, j)\| h \exp\{-\beta j\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} a_i(\tau, j) \exp\{-\beta j\} \sqrt{h} \right] \right] \|x\|_{m_{2p}^\gamma} \leq \\ &\leq \sup_{s \geq 0} \left[(\lambda \exp\{\beta\})^s \sum_{\tau=0}^s (\lambda \exp\{\beta\})^{-\tau-1} \left[\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \|A_1^2(\tau, j) - B(\tau, j)\| h \exp\{\beta(\tau+1-j)\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} a_i(\tau, j) \exp\{\beta(\tau+1-j)\} \sqrt{h} \right] \right] \|x\|_{m_{2p}^\gamma} \leq \\ &\leq \sup_{\tau \geq 0} \left[\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \|A_1^2(\tau, j) - B(\tau, j)\| h \exp\{\beta(\tau+1-j)\} + \right. \\ &\quad \left. + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} a_i(\tau, j) \exp\{\beta(\tau+1-j)\} \sqrt{h} \right] \times \\ &\times \sup_{s \geq 0} [(\lambda \exp\{\beta\})^s \{(\lambda \exp\{\beta\})^{-1} + (\lambda \exp\{\beta\})^{-2} + \dots + (\lambda \exp\{\beta\})^{-s}\}] \|x\|_{m_{2p}^\gamma} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\tau \geq 0} \left[\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \|A_1^2(\tau, j) - B(\tau, j)\| h \exp\{\beta(\tau + 1 - j)\} + \right. \\ \left. + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} a_i(\tau, j) \exp\{\beta(\tau + 1 - j)\} \sqrt{h} \right] / (1 - \lambda \exp\{\beta\}) \|x\|_{m_{2p}^\gamma} = \hat{c}(\beta) \|x\|_{m_{2p}^\gamma},$$

где

$$\hat{c}(\beta) = \sup_{\tau \geq 0} \left[\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \|A_1^2(\tau, j) - B(\tau, j)\| h \exp\{\beta(\tau + 1 - j)\} + \right. \\ \left. + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} a_i(\tau, j) \exp\{\beta(\tau + 1 - j)\} \sqrt{h} \right] / (1 - \lambda \exp\{\beta\})$$

и, аналогичными оценками, нетрудно показать, что

$$\|C\varphi\|_{m_{2p}^\gamma} \leq \hat{c}_1 \sup_{j < 0} (E|\varphi(j)|^{2p})^{1/2p},$$

где $\hat{c}_1$ — некоторое положительное число. Тогда, в силу того, что по условию теоремы $\hat{c}(0) < 1$ и $\hat{c}(\beta)$ непрерывна по β , существует β_0 такое, что $\hat{c}(\beta_0) < 1$. Следовательно, в силу теоремы 4, тривиальное решение однородного уравнения (1.3) экспоненциально $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для получения конкретных условий экспоненциальной p -устойчивости тривиального решения для однородных уравнений вида (1.3) относительно начальных данных очень важно знать конкретные значения λ .

8. Примеры

ПРИМЕР 1. Пусть далее уравнение (1.2) скалярное уравнение и $A_i(s) = a_i (s \in N_+)$, $i = 1, \dots, m$, где a_i , $i = 1, \dots, m$ — некоторые действительные числа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть для уравнения (1.2) выполнены неравенства

$$-1 < a_1 h < 0, c_p \sum_{i=2}^m |a_i| < -a_1 h^{1/2}.$$

Тогда для уравнения (1.2) допустима пара $(m_{2p}^\gamma, (\lambda_{2p, \infty}^1)^\gamma)$, где $\gamma(s) = \exp\{\beta s\}$ ($s \in N_+$) при некотором $\beta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения воспользуемся теоремой 9. В качестве модельного уравнения возьмем уравнение (4.3), где $(Qx)(s) = ((1 + a_1 h)x(s), 0, \dots, 0)(s \in N_+)$ для любого $x \in d^n$. Тогда для модельного уравнения (4.3) выполняются условия теоремы 9, т. е. оператор Q непрерывно действуют из m_{2p} в $\lambda_{2p, \infty}^n$ и удовлетворяет условиям 1 и 2. В силу того, что оператор V непрерывно действуют из m_{2p} в $\lambda_{2p, \infty}^n$ теорема будет

доказана, если при выполнении условий теоремы оператор $(I - \Theta_l) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$ непрерывно обратим, где

$$(\Theta_l x)(s) = \lambda^s \sum_{\tau=0}^{s-1} \lambda^{-\tau-1} (Kx)(\tau) (s \in N_+),$$

$$\lambda = 1 + a_1 h, \quad (Kx)(\tau) = \sum_{i=2}^m a_i x(\tau) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\varsigma).$$

Непосредственно нетрудно убедиться в том, что $\|\Theta_l x\|_{m_{2p}} \leq \hat{c} \|x\|_{m_{2p}}$, где $\hat{c} = (c_p h^{1/2} \sum_{i=2}^m |a_i|) / (1 - \lambda)$. В силу того, что $\hat{c} < 1$ при предположении теоремы получим непрерывную обратимость оператора $(I - \Theta_l) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$.

Утверждение доказано.

ПРИМЕР 2. Пусть далее уравнение (1.4) скалярное уравнение и $A_1^3(s, j) = 0$ ($s \in N_+$) при $j = s - d, \dots, s - 1$, $A_1^3(s, s) = a_1^3$, $A_i^2(s, j) = a_i^3$ ($s \in N_+$), $j = s - d, \dots, s$, $i = 2, \dots, m$, где a_i^3 , $i = 1, \dots, m$ — некоторые действительные числа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть для уравнения (1.4) выполнены неравенства

$$-1 < a_1^3 h < 0, \quad c_p d \sum_{i=2}^m |a_i^3| < -a_1^3 h^{1/2}.$$

Тогда для функционально-разностного уравнения, соответствующего уравнению (1.4), допустима пара $(m_{2p}^\gamma, (\lambda_{2p, \infty}^1)^\gamma)$, где $\gamma(s) = \exp\{\beta s\}$ ($s \in N_+$) при некотором $\beta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения воспользуемся теоремой 9. В качестве модельного уравнения возьмем уравнение (4.3), где $(Qx)(s) = ((1 + a_1^2 h)x(s), 0, \dots, 0)$ ($s \in N_+$) для любого $x \in d^n$. Тогда для модельного уравнения (4.3) выполняются условия теоремы 9, т. е. оператор Q непрерывно действуют из m_{2p} в $\lambda_{2p, \infty}^n$ и удовлетворяет условиям 1 и 2. В силу того, что оператор V для функционально-разностного уравнения, соответствующего уравнению (1.4) непрерывно действуют из m_{2p} в $\lambda_{2p, \infty}^n$ теорема будет доказана, если при выполнении условий теоремы оператор $(I - \Theta_l) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$ непрерывно обратим, где $(\Theta_l x)(s) = \lambda^s \sum_{\tau=0}^{s-1} \lambda^{-\tau-1} (Kx)(\tau)$ ($s \in N_+$), $\lambda = 1 + a_1^2 h$,

$$(Kx)(\tau) = \sum_{i=2}^m \sum_{j=\tau-d}^{\tau} a_i^2 x(j) \int_{\tau h}^{(\tau+1)h} d\mathcal{B}_i(\varsigma).$$

Непосредственно нетрудно убедиться в том, что $\|\Theta_l x\|_{m_{2p}} \leq \hat{c} \|x\|_{m_{2p}}$, где $\hat{c} = (c_p h^{1/2} d \sum_{i=2}^m |a_i^2|) / (1 - \lambda)$. В силу того, что $\hat{c} < 1$ при предположении теоремы получим непрерывную обратимость оператора $(I - \Theta_l) : m_{2p} \rightarrow m_{2p}$.

Утверждение доказано.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим скалярное обыкновенное разностное уравнение Ито

$$x(s+1) = x(s) + a_1(s)x(s)h + \sum_{i=2}^m a_i(s)x(s)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))(s \in N_+), \quad (8.1)$$

где h – достаточно малое действительное число, $a_i(s)$ – некоторые действительные числа при $i = 1, \dots, m$, $s \in N_+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть для уравнения (8.1) выполнено неравенство

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[|a_1(s)|h + c_p \sum_{i=2}^m |a_i(s)|\sqrt{h} \right] < 1.$$

Тогда тривиальное решение уравнения (8.1) 2р-устойчиво.

Справедливость утверждения 3 следует из теоремы 5, в случае, когда уравнение (1.3) совпадает с уравнением (8.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть для уравнения (8.1) $a_i(s) = a_i$ для всех $s \in N_+$, где a_i – некоторое действительное число при $i = 1, \dots, m$ и выполнены неравенства

$$-1 < a_1 h < 0, c_p \sum_{i=2}^m |a_i| < -a_1 \sqrt{h}.$$

Тогда тривиальное решение уравнения (8.1) экспоненциально 2р-устойчиво.

Чтобы убедиться в справедливости утверждения 4 воспользуемся теоремой 9, в случае когда уравнение (1.3) совпадает с уравнением (8.1). При этом в качестве однородного уравнения (4.3) необходимо взять уравнение (8.1) без слагаемых с винеровскими процессами. В этом случае $\lambda = 1 + a_1 h$.

ПРИМЕР 4. Перейдем к рассмотрению скалярного разностного уравнения Ито с последствием

$$\begin{aligned} x(s+1) &= x(s) + \sum_{j=-\infty}^s a_1(s, j)x(j)h + \\ &\sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^s a_i(s, j)x(j)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh))(s \in N_+), \\ x(j) &= \varphi(j) \quad (j < 0), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где h – достаточно малое действительное число, $a_i(s, j)$ – действительное число при $i = 1, \dots, m$, $s \in N_+$, $j = -\infty, \dots, s$ и $\varphi(j)$ – $\mathcal{F}_0$ -измеримая скалярная случайная величина при $j < 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть для уравнения (8.2) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\tau} |a_1(\tau, j)|h + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} |a_i(\tau, j)|\sqrt{h} \right] &< 1, \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} \left[\sum_{j=-\infty}^{-1} |a_1(\tau, j)|h + c_p \sum_{i=2}^m \sum_{j=-\infty}^{-1} |a_i(\tau, j)|\sqrt{h} \right] &< \infty. \end{aligned}$$

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (8.2) 2р-устойчиво относительно начальных данных.

Справедливость утверждения 5 следует из теоремы 5, в случае, когда уравнение (1.3) совпадает с уравнением (8.2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть для уравнения (8.2) $a_1(s, j) = 0$ при $s \in N_+$, $0 \leq j \leq s$, а $a_1(s, s) = a_1$ при всех $s \in N_+$, где a_1 – некоторое действительное число и выполнены неравенства

$$-1 < a_1 h < 0, c_p \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{\tau} |a_i(\tau, j)| \sqrt{h} < -a_1 h, \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-1} |a_i(\tau, j)| < \infty, i = 2, \dots, m.$$

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (8.2) $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

Чтобы убедиться в справедливости утверждения 6, воспользуемся теоремой 7 в случае, когда уравнение (1.3) совпадает с уравнением (8.2). При этом в качестве однородного уравнения (4.3) необходимо взять уравнение (8.2) без слагаемых с винеровскими процессами. В этом случае $\lambda = 1 + a_1 h$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть для уравнения (8.2) $a_i(s, j) = 0$ при $i = 1, \dots, m$, $s \in N_+$, $j = -\infty, \dots, s - d_i - 1$, где $d_1 = 0$, d_i – некоторое натуральное число при $i = 2, \dots, m$, а $a_1(s, s) = a_1$ при всех $s \in N_+$, $a_i(s, j) = a_i$ при всех $s \in N_+$, $j = s - d_i, \dots, s$, где a_i – некоторое действительное число при $i = 1, \dots, m$ и выполнены неравенства

$$-1 < a_1 h < 0, c_p \sum_{i=2}^m |a_i| d_i < -a_1 h^{1/2}.$$

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (8.2) экспоненциально $2p$ -устойчиво относительно начальных данных.

Чтобы убедиться в справедливости утверждения 7, воспользуемся теоремой 9 в случае, когда уравнение (1.3) совпадает с уравнением (8.2). При этом в качестве однородного уравнения (4.3) необходимо взять уравнение (8.2) без слагаемых с винеровскими процессами. В этом случае $\lambda = 1 + a_1 h$.

Список литературы

- [1] Кадиев Р.И. Устойчивость решений линейных разностных уравнений Ито с последствием // Дифференц. уравнения. Минск. 2015. Т. 51, вып. 3. С. 293–301.
- [2] Кадиев Р.И. Устойчивость решений систем линейных разностных уравнений Ито с последствием относительно начальных данных // Дифференц. уравнения. Минск. 2015. Т.51, вып. 7. С. 842–850.
- [3] Kadiev R., Ponomov A. Exponential stability of Ito-type linear functional difference equations // Computers and Mathematics with Applications. 2013. Vol. 66. N 11. Pp. 2295–2306.
- [4] Кадиев Р.И., Шахбанова З.И. Устойчивость решений линейных функционально-разностных уравнений Ито относительно начальных данных // Вестник ДГУ, Естеств. науки. 2012. Вып. 6. С. 141–146.
- [5] Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1991. 280 с.

- [6] Berezansky L., Braverman E. On exponential dichotomy, Bohl Perron type theorems and stability of difference equations // J. Math. Anal. Appl. 2005. N 304. Pp. 511–530.
- [7] Braverman E., Karabach I.M. Boh-Perron-type stability theorems for linear difference equations with infinite delay // J. of Difference Eqs. and Appl. 2012. Vol 5. N 5. Pp. 909–939.
- [8] Кадиев Р.И. Достаточные условия устойчивости стохастических систем с последствием // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, вып. 2. С. 555–564.
- [9] Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость стохастических функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, вып. 2. С. 198–207.
- [10] R. Kadiev, A. Ponosov. The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Mathem. Analysis and Appl. 2012. Vol. 389. N 2. Pp. 1239–1250.
- [11] Липцер Р.Ш., Ширяев Ф.Н. Теория мартингалов. М. 1986. 512 с.
- [12] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1984. 752 с.

Р. И. Кадиев (R. I. Kadiev)

Дагестанский научный центр РАН

E-mail: kadiev_r@mail.ru

Поступила в редакцию

16.05.2016