УДК 517.538

И. И. Шарапудинов, М. Г. Магомед-Касумов, С. Р. Магомедов

Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода

Отправляясь от многочленов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($n = 0, 1, \dots$) и натурального r , построена новая система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированная относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\kappa(t)dt,$$

где $\kappa(t) = \frac{2}{\pi}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$. Исследованы вопросы сходимости ряда Фурье по системе $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрены важные частные случаи систем такого типа. Для них получены явные представления, которые могут быть использованы при исследовании асимптотических свойств функций $T_{r,k}(x)$ при $k \rightarrow \infty$ и исследовании аппроксимативных свойств сумм Фурье по системе $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Библиография: 18 названий.

Using Chebyshev polynomials $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($n = 0, 1, \dots$), for any natural r we build a new system of polynomials $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, orthonormal with respect to the Sobolev type inner product of the following form

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\kappa(t)dt,$$

where $\kappa(t) = \frac{2}{\pi}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$. The convergence of the Fourier series by the system $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ is investigated. We consider the important special cases of systems of this type. For these instances we obtain explicit representations, that can be used in the study of asymptotic properties of functions $T_{r,k}(x)$ when $k \rightarrow \infty$ and study of the approximative properties of Fourier sums by the system $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Bibliography: 18 items.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, ортогональные по Соболеву полиномы, полиномы Чебышева первого рода.

Keywords: orthogonal polynomials, Sobolev orthogonal polynomials, Chebyshev polynomials of the first kind.

Введение

В ряде наших работ [1] – [7] были введены так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со значениями исходной функции. Общая идея, которая лежит в основе построения смешанных рядов, заключается в следующем. Предположим, что система функций $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормирована на (a, b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad (0.1)$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Через $L_\rho^p(a, b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a, b) , для которых

$$\int_a^b |f(x)|^p \rho(x) dx < \infty. \quad (0.2)$$

Если $\rho(x) \equiv 1$, то будем писать $L_\rho^p(a, b) = L^p(a, b)$ и $L(a, b) = L^1(a, b)$. Из (0.1) следует, что $\varphi_k(x) \in L_\rho^2(a, b)$ ($k = 0, 1, \dots$). Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a, b)$ ($k = 0, 1, \dots$). Тогда мы можем определить следующие функции

$$\varphi_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (0.3)$$

Кроме того определим конечный набор функций

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1. \quad (0.4)$$

Из (0.3) и (0.4) следует, что

$$(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \leq \nu \leq r-1, r \leq k, \\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \leq k, \\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \leq k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leq r. \end{cases} \quad (0.5)$$

Через $W_{L_\rho^p(a,b)}^r$ обозначим пространство Соболева $W_{L_\rho^p(a,b)}^r$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $f^{(r)}(x) \in L_\rho^p(a, b)$. Скалярное произведение в пространстве $W_{L_\rho^p(a,b)}^r$ определим с помощью равенства

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a) g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) \rho(t) dt. \quad (0.6)$$

Тогда, пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (0.3) и (0.4)) и равенством (0.5) нетрудно увидеть (см. теорему 2.1), что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $W_{L^2_{\rho}(a,b)}^r$. В цитированных выше работах [1] – [7], а также в [8] были рассмотрены некоторые частные случаи ортонормированных систем функций вида $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденных классическими ортонормированными системами Якоби, Лежандра, Чебышева, Лагерра и Хаара. С другой стороны, в последние годы интенсивное развитие получила (см. [9] – [14] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в нескольких заданных точках числовой оси. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a, b) , могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a, b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (0.6), рассматриваемое в настоящей работе имеет одну особую точку, а именно, точку a , в окрестности которой "контролируется" поведение функций $\varphi_{r,k}(x)$, ортогональных по Соболеву и порожденных исходной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенства (0.3).

Из (0.3) – (0.6) нетрудно увидеть, что ряд Фурье функции $f(x) \in W_{L^2_{\rho}(a,b)}^r$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ имеет смешанный характер, а, более точно, имеет следующий вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k} \varphi_{r,k}(x), \quad (0.7)$$

где

$$f_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t) \varphi_{k-r}(t) \rho(t) dt, \quad (0.8)$$

поэтому ряды Фурье вида (0.7) будем (следуя [1] – [7]) называть *смешанными рядами* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. В [1] – [8] было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. При этом отметим, что в работах [1] – [6] основное внимание уделялось исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по ультрасферическим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$, тогда как в работе [7] были найдены условия на параметры α и β , которые обеспечивают равномерную сходимость смешанных рядов по общим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$. В настоящей статье вводятся и исследуются системы функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (0.6) и порожденных системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Особое внимание уделено

исследованию свойств системы полиномов $\{\varphi_{r,k}(x) = T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденной многочленами Чебышева $\varphi_k(x) = T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ на интервале $(-1, 1)$. Рассмотрена задача о представлении функций $T_{r,k}(x)$, определенных равенством (0.3) на $(-1, 1)$, в виде, более удобном для исследования их асимптотических свойств при $k \rightarrow \infty$. Исследованы аппроксимативные свойства сумм Фурье по системе $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

1. О сходимости рядов Фурье по системам функций, ортогональным по Соболеву, порожденными общими ортонормированными системами

Рассмотрим сначала задачу о полноте в $W_{L^2_\rho(a,b)}^r$ системы $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (0.3) и (0.4).

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что функции $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют полную в $L^2_\rho(a, b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на отрезке $[a, b]$. Тогда система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств (0.3) и (0.4), полна в $W_{L^2_\rho(a,b)}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (0.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (0.3) следует, что если $r \leq k$ и $0 \leq \nu \leq r-1$, то $(\varphi_{r,k}(x))_{x=a}^{(\nu)} = 0$, поэтому в силу (0.5), (0.6), имеем

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle &= \int_a^b (\varphi_{r,k}(x))^{(r)} (\varphi_{r,l}(x))^{(r)} \rho(x) dx = \\ &= \int_a^b \varphi_{k-r}(x) \varphi_{l-r}(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad k, l \geq r, \end{aligned} \quad (1.1)$$

а из (0.4) и (0.6) имеем

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} (\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)}|_{x=a} (\varphi_{r,l}(x))^{(\nu)}|_{x=a} = \delta_{kl}, \quad k, l < r. \quad (1.2)$$

Очевидно также, что

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = 0, \quad \text{если } k < r \leq l \quad \text{или} \quad l < r \leq k. \quad (1.3)$$

Это означает, что функции $\varphi_{r,k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют в $W_{L^2_\rho(a,b)}^r$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (0.6). Остается убедиться в ее полноте в $W_{L^2_\rho(a,b)}^r$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W_{L^2_\rho(a,b)}^r$ и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leq r-1$, то $\langle f, \varphi_{r,k} \rangle = f^{(k)}(a)$, поэтому с учетом того, что $\langle f, \varphi_{r,k} \rangle = 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt. \quad (1.4)$$

С другой стороны, для всех $k \geq r$ имеем

$$0 = \langle f, \varphi_{r,k} \rangle = \int_a^b f^{(r)}(x) (\varphi_{r,k}(x))^{(r)} \rho(x) dx = \int_a^b f^{(r)}(x) \varphi_{k-r}(x) \rho(x) dx.$$

Отсюда и из того, что $\varphi_m(x)$ ($m = 0, 1, \dots$) образуют в $L_\rho^2(a, b)$ полную ортонормированную систему имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$. Поэтому $f(x) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a, b)$, а функции $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют полную в $L_\rho^2(a, b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на отрезке $[a, b]$, $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ — система, ортонормированная в $W_{L_\rho^2(a,b)}^r$ относительно скалярного произведения (0.6), порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ посредством равенств (0.3) и (0.4). Тогда, если $f(x) \in W_{L_\rho^2(a,b)}^r$, то ряд Фурье (смешанный ряд) (0.7) сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [a, b]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $S_n(f^{(r)}) = S_n(f^{(r)}, x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $f^{(r)}(x) \in L_\rho^2(a, b)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$, т.е.

$$S_n(f^{(r)}, x) = \sum_{k=0}^n f_{r,k+r} \varphi_k(x), \quad (1.5)$$

где коэффициенты $f_{r,k+r}$ ($k = 0, 1, \dots$) определены равенством (0.8). Из условий теоремы 2 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_{L_\rho^2(a,b)} \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Далее, обозначим через $Y_{n+r}(f, x)$ частичную сумму смешанного ряда (0.7) следующего вида

$$Y_{n+r}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k} \varphi_{r,k}(x), \quad (1.7)$$

и запишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt. \quad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) имеем

$$f(x) - Y_{n+r}(f, x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k} \varphi_{r,k}(x). \quad (1.9)$$

Обратимся к равенству (0.3), тогда (1.9) можно переписать так

$$f(x) - Y_{n+r}(f, x) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k} \varphi_{k-r}(t) dt = \\ & \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} [f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)}, t)] dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из (1.10) и неравенства Гельдера имеем

$$|f(x) - Y_{n+r}(f, x)| \leq \frac{1}{(r-1)!} \left(\int_a^b \frac{|x-t|^{2(r-1)}}{\rho(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)}, t)]^2 \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

Сопоставляя (1.6) с (1.11), убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Как мы уже отмечали выше, основным объектом исследования настоящей работы является система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортогональных по Соболеву относительного скалярного произведения вида (0.6), порожденных на $(-1, 1)$ полиномами Чебышева первого рода $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. В частности, рассмотрена задача о представлении полиномов $T_{r,k}(x)$, в виде, более удобном для исследования их асимптотических свойств при $k \rightarrow \infty$. При исследовании этой задачи нам понадобятся некоторые хорошо известные свойства классических полиномов Якоби.

2. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Для произвольных действительных α и β полиномы Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ можно определить [15] с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\mu(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{\mu(x) \sigma^n(x)\}, \quad (2.1)$$

где α, β – произвольные действительные числа, $\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $\mu(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \beta}(x) P_m^{\alpha, \beta}(x) \mu(x) dx = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (2.2)$$

где

$$h_n^{\alpha, \beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1) 2^{\alpha+\beta+1}}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1) (2n+\alpha+\beta+1)}. \quad (2.3)$$

Нам понадобятся еще следующие свойства полиномов Якоби [15, 16]:

связь с полиномами Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$$P_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} T_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} T_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + \sigma_n)T_n(x) \quad (\sigma_n = O(1/n)); \quad (2.4)$$

производные

$$\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \quad (2.5)$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_\nu}{2^\nu}P_{n-\nu}^{\alpha+\nu,\beta+\nu}(x), \quad (2.6)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)\dots(a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$;
равенства

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{k!(\alpha + 1)_k} \left(\frac{1-t}{2}\right)^k, \quad (2.7)$$

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ (1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha,m+\beta}(x) \right\}, \quad (2.8)$$

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}, \quad P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{a,a}(x)}{P_n^{a,a}(1)} &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!(\alpha+1)_{n-2j}(n+2a+1)_{n-2j}(1/2)_j(a-\alpha)_j}{(n-2j)!(2j)!(a+1)_{n-2j}(n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}} \\ &\times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j(n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(1)}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $[b]$ – целая часть числа b .

ЛЕММА 2.1. Пусть $\alpha > -1$, k, r – целые, $r \geq 1$, $k \geq r+1$. Тогда

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r, k) = \frac{(-1)^j (k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j} (1/2)_j r^{[j]} (\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j} (k+r-2j+\alpha+3/2)_j (2j)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$, тогда, полагая $a = \alpha - r$, мы можем воспользоваться формулой (2.10). Поскольку при $j \geq r+1$ выполняется равенство $(a - \alpha)_j = (-r)_j = 0$, то из (2.10) мы имеем

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \frac{P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(1)}{P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(1)} \frac{(k+r)!(\alpha+1)_{k+r-2j}(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j)!(2j)!(\alpha-r+1)_{k+r-2j}} \times$$

$$\frac{(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} = \frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 3.1 в случае $\alpha > r - 1$. Но поскольку $P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, λ_j^α и $P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x)$ представляют собой аналитические функции относительно α , то утверждение леммы 3.1 вытекает из уже доказанного случая.

ЛЕММА 2.2. Пусть k, r — целые, $r \geq 1$, $k \geq r + 1$. Тогда

$$P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^{-\frac{1}{2}}(k, r) P_{k+r-2j}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x),$$

где

$$\lambda_j^{-\frac{1}{2}}(k, r) = \frac{(-1)^j(k-r)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(k-1/2)^{[j]}}{(k+r-2j)_{k+r-2j}(k+r-2j+1)_j(2j)!} = (-1)^j \frac{((k+r-2j)!)^2 2^{2k+2r-4j}}{(2(k+r-2j))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \frac{r^{[j]}}{j!} \frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедиться в справедливости утверждения леммы 3.2 достаточно в лемме 3.1 взять $\alpha = -\frac{1}{2}$.

ЛЕММА 2.3. Пусть k, r — целые, $r \geq 1$, $k \geq r + 1$. Тогда

$$P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \sum_{j=0}^r \frac{(-1)^j}{j!} \frac{r^{[j]} k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}} T_{k+r-2j}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 3.3 непосредственно вытекает из леммы 3.2 и равенств (2.4) и (2.11).

Пусть $\alpha, \beta > -1$, $p \geq 1$. Обозначим через $L_{\alpha, \beta}^p$ пространство измеримых функций $f = f(x)$, определенных на $[-1, 1]$, для которых

$$\|f\|_{L_{\alpha, \beta}^p} = \left(\int_{-1}^1 \mu(x) |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Если $f \in L_{\alpha, \beta}^p$, то мы можем определить коэффициенты Фурье – Якоби

$$f_k^{\alpha, \beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha, \beta}} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) P_k^{\alpha, \beta}(x) dx$$

и рассмотреть сумму Фурье – Якоби по полиномам Якоби $P_k^{\alpha, \beta}(x)$:

$$S_n^{\alpha, \beta}(f) = S_n^{\alpha, \beta}(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^{\alpha, \beta} P_k^{\alpha, \beta}(x),$$

которая при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ представляет собой [15] сумму Фурье по полиномам Чебышева $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. В работе [17] доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ таковы, что

$$\left| \frac{A+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2} \right\},$$

$$\left| \frac{B+1}{p} - \frac{\beta+1}{2} \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2} \right\}.$$

Тогда, если $f \in L_{A,B}^p$, то имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n^{\alpha, \beta}(f)\|_{L_{A,B}^p} = 0.$$

3. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные многочленами Чебышева первого рода

Полиномы Чебышева

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

образуют ортонормированную в $L_\kappa^2(-1, 1)$ с весом $\kappa(x) = \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ систему. Как хорошо известно [15], система полиномов Чебышева (3.1) полна в $L_\kappa^2(-1, 1)$. Эта система порождает на $[-1, 1]$ систему полиномов $T_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), определенных равенствами

$$T_{r,k}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3.2)$$

$$T_{r,r}(x) = \frac{(x+1)^r}{\sqrt{2}r!}, \quad T_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} T_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой ортонормированных полиномов Чебышева (3.1) посредством равенств (3.2) и (3.3), полна в $W_{L_\kappa^2(-1,1)}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1) g^{(\nu)}(-1) + \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) \kappa(t) dt. \quad (3.4)$$

Ряд Фурье (0.7) для системы $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ приобретает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1) \frac{(x+1)^k}{k!} + \frac{f_{r,r}}{\sqrt{2}} T_{r,r}(x) + \sum_{k=r+1}^\infty f_{r,k} T_{r,k}(x), \quad (3.5)$$

где

$$f_{r,k} = \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) T_{k-r}(t) \kappa(t) dt. \quad (3.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f(x) \in W_{L_{\kappa}^2(-1,1)}^r$, то ряд Фурье (смешанный ряд) (3.5) сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\frac{1}{\kappa(x)} \in L(-1, 1)$, то утверждение следствия 2 вытекает из теоремы 2 и следствия 1.

В дальнейшем будет значительно усилено утверждение следствия 2, распространив его на более широкие, чем $W_{L_{\kappa}^2(-1,1)}^r$ классы Соболева $W_{L_{\kappa}^{p(x)}(-1,1)}^r$ с переменным показателем $p(x)$. Но для этого нам нужны дальнейшие свойства полиномов $T_{r,k}(x)$, определенных равенствами (3.2) и (3.3).

Пусть $\lambda = \alpha + \beta$. Тогда если $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (2.6) и записать

$$P_k^{\alpha,\beta}(t) = \frac{2^r}{(k + \lambda)^{[r]}} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t). \quad (3.7)$$

Если $k \geq r - \lambda$, то, очевидно, $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$ и для таких k мы можем воспользоваться равенством (3.7). Итак, пусть $(k + \lambda)^{[r]} \neq 0$. Тогда в силу (3.7)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt = \\ & \frac{2^r}{(k + \lambda)^{[r]}} \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \frac{d^r}{dt^r} P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) dt = \\ & \frac{2^r}{(k + \lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(1+x)^{\nu}}{\nu!} \left\{ P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Далее, в силу (2.6)

$$\left\{ P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)} = \frac{(k + \lambda - r + 1)_{\nu}}{2^{\nu}} P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(t), \quad (3.9)$$

а из (2.9) имеем

$$\begin{aligned} P_{k+r-\nu}^{\alpha+\nu-r,\beta+\nu-r}(-1) &= (-1)^{k+r-\nu} \binom{k + \beta}{k + r - \nu} = \\ &= \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k + \beta + 1)}{\Gamma(\nu - r + \beta + 1)(k + r - \nu)!}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) находим

$$\left\{ P_{k+r}^{\alpha-r,\beta-r}(t) \right\}_{t=-1}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k + \beta + 1)(k + \lambda - r + 1)_{\nu}}{\Gamma(\nu - r + \beta + 1)(k + r - \nu)! 2^{\nu}} = A_{\nu,k,r}^{\alpha,\beta}. \quad (3.11)$$

Сопоставляя (3.8) и (3.11) мы можем записать

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) dt =$$

$$\frac{2^r}{(k+\lambda)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{\alpha-r, \beta-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu, k, r}^{\alpha, \beta}}{\nu!} (1+x)^\nu \right]. \quad (3.12)$$

Из (3.12), (2.4) и (3.3) при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} T_{r, r+k}(x) &= \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} T_k(t) dt = \\ &= \frac{2^{2k} k!^2}{(2k)!(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(t) dt = \\ &= \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu, k, r}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}}{\nu!} (1+x)^\nu \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где в силу (3.11) и равенств

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2z)}{\Gamma(z)2^{2z-1}}$$

для $k \geq r+1$ находим

$$\begin{aligned} A_{\nu, k, r} &= A_{\nu, k, r}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+1/2)(k-r)_\nu}{\Gamma(\nu-r+1/2)(k+r-\nu)!2^\nu} \\ &= \frac{(-1)^k \Gamma(k+1/2)(k-r)_\nu \Gamma(r-\nu+1/2)}{\pi(k+r-\nu)!2^\nu} = \\ &= \frac{(-1)^k (2k-1)!(2(r-\nu)-1)!(k-r)_\nu}{(k-1)!(r-\nu-1)!(k+r-\nu)!2^{(k+r-1)-\nu}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Таким образом, при $k \geq r+1$ мы получаем следующее представление

$$T_{r, r+k}(x) = \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}} \left[P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu, k, r}}{\nu!} (1+x)^\nu \right]. \quad (3.15)$$

Теперь обратимся к лемме 3.3, из которой выводим

$$\frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}} P_{k+r}^{-\frac{1}{2}-r, -\frac{1}{2}-r}(x) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \frac{k T_{k+r-2j}(x)}{2^r (k+r-j)^{[r+1]}}. \quad (3.16)$$

Сопоставляя (3.15) и (3.16), мы можем записать ($k \geq r+1$)

$$T_{r, r+k}(x) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{(-1)^j k T_{k+r-2j}(x)}{2^r (k+r-j)^{[r+1]}} - \frac{k!^2 2^{r+2k}}{(2k)!(k-1)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu, k, r}}{\nu!} (1+x)^\nu. \quad (3.17)$$

Рассмотрим два важных частных случая, соответствующие значениям $r=1$ и $r=2$.

1) Пусть $r = 1$. Тогда из (3.14) имеем

$$A_{0,k,1} = \frac{(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)!(k+1)!2^{2k}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

Из (3.17) и (3.18) для $k \geq 2$ находим

$$\begin{aligned} T_{1,k+1}(x) &= \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{k T_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}} - \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{2k+1}}{(k-1)} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)!(k+1)!2^{2k}} \\ &= \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{k T_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}} - \frac{(-1)^k}{k^2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Кроме того из (3.2) и (3.3) имеем

$$T_{1,0}(x) = 1, \quad T_{1,1}(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2}}, \quad T_{1,2}(x) = x^2 - 1. \quad (3.20)$$

2) Для $r = 2$ и $k \geq 3$ из (3.14) и (3.17) имеем

$$\begin{aligned} A_{0,k,2} &= \frac{6(-1)^k (2k-1)!}{(k-1)!(k+2)!2^{2(k+1)}}, \quad A_{1,k,2} = \frac{(-1)^k (2k-1)!(k-2)}{(k-1)!(k+1)!2^{2k+1}}, \\ T_{2,k+2}(x) &= \sum_{j=0}^2 \binom{r}{j} \frac{(-1)^j k T_{k+2-2j}(x)}{2^2(k+2-j)^{[3]}} - \frac{k!^2}{(2k)!} \frac{2^{2+2k}}{(k-1)^{[2]}} \sum_{\nu=0}^1 \frac{A_{\nu,k,2}}{\nu!} (1+x)^\nu, \end{aligned}$$

поэтому при $k \geq 3$

$$T_{2,k+2}(x) = \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \frac{(-1)^j k T_{k+2-2j}(x)}{4(k+2-j)^{[3]}} - (-1)^k \left[\frac{1+x}{k^2-1} + \frac{3}{(k^2-1)(k^2-4)} \right]. \quad (3.21)$$

С другой стороны, из (3.2) и (3.3) имеем

$$T_{2,0}(x) = 1, \quad T_{2,1}(x) = 1+x, \quad T_{2,2}(x) = \frac{(1+x)^2}{2\sqrt{2}}, \quad (3.22)$$

$$T_{2,3}(x) = \frac{1}{6}(x-2)(x+1)^2, \quad T_{2,4}(x) = \frac{1}{6}x(x-2)(x+1)^2. \quad (3.23)$$

Возвращаясь к вопросу об условиях равномерной сходимости ряда Фурье (смешанного ряда) (3.5) можно сформулировать следующую теорему

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ таковы, что

$$\left| \frac{A+1}{p} - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{4}, \quad \left| \frac{B+1}{p} - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{4}, \quad (3.24)$$

$\rho(x) = (1-x)^A(1+x)^B$. Тогда, если $f \in W_{L_p}^r(-1,1)$, то ряд (3.5) равномерно на $[-1,1]$ сходится к $f(x)$.

Список литературы

- [1] Шарапудинов И.И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье – Лежандра // Математический сборник. 2000. Т. 191. Вып. 5. С. 143–160.
- [2] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математические заметки. 2000. Т. 72. Вып. 5. С. 765–795.
- [3] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Махачкала. Издательство Дагестанского научного центра. 2004. С. 276.
- [4] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. 2006. Т. 197. Вып. 3. С. 135–154.
- [5] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Математические заметки. 2008. Т. 84. Вып. 3. С. 452–471.
- [6] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Математический сборник. 2003. Т. 194. Вып. 3. С. 115–148.
- [7] Шарапудинов И.И., Шарапудинов Т.И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Математические заметки. 2010. Т. 88. Вып. 1. С. 116–147.
- [8] Шарапудинов И.И., Муратова Г.Н. Некоторые свойства r -кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 1. С. 68–76.
- [9] Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65. Pp. 151–175.
- [10] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. North-Holland. 1993. Vol. 48. Pp. 113–131.
- [11] Meijer H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. Pp. 1–16.
- [12] Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Issue. 2. Pp. 289–303.
- [13] Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. Pp. 547–594.
- [14] Marcellan F., Yuan Xu. ON SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS // arXiv: 6249v1 [math.CA] 25 Mar 2014. Pp 1–40.
- [15] Сере Г. Ортогональные многочлены. Москва. Физматгиз. 1962.
- [16] Gasper G. Positivity and special function // Theory and appl.Spec.Funct. Edited by Richard A.Askey. 1975. Pp. 375–433.
- [17] Muckenhoupt B. Mean convergence of Jacobi series // Proc.Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 23. Issue 2. Pp. 306–310.
- [18] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Москва. АФЦ. 1999.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)

Дагестанский научный центр РАН, Владикавказский
научный центр РАН

E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию

07.10.2015

М. Г. Магомед-Касумов (M. G. Magomed-Kasumov)

Владикавказский научный центр РАН, Дагестанский
научный центр РАН

E-mail: rasuldev@gmail.com

С. Р. Магомедов (S. R. Magomedov)

Дагестанский научный центр РАН

E-mail: salihne@ya.ru