УДК 517.587

Т. И. Шарапудинов

Дискретные полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева, ортогональными на равномерной сетке

Рассмотрены полиномы, ортогональные в смысле Соболева на равномерной сетке, порожденные полиномами Чебышева, ортогональными на равномерной сетке. Получен явный вид этих полиномов, удобный для изучения их асимптотических свойств.

Библиография: 19 названий.

In current paper we consider new polynomials, generated by orthogonal on uniform grid Chebyshev polynomials. Newly introduced polynomials are themselves orthogonal with respect to the Sobolev-type inner product. The explicit form of these polynomials, convenient to study their asymptotic properties, is obtained.

Bibliography: 19 items.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, ортогональные по Соболеву полиномы, полиномы Чебышева.

Keywords: orthogonal polynomials, Sobolev-type orthogonal polynomials, Chebyshev polynomials.

Введение

Полиномы ортогональные относительно скалярных произведений типа Соболева в последние годы были исследованы (см. [1] – [6] и цитированную там литературу) в работах многих авторов. В том числе было показано, что классические полиномы Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ и Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ обладают свойством ортогональности относительно скалярного произведения типа Соболева, если параметры α , и β принимают целые отрицательные значения. Скалярные произведения типа Соболева содержат, как правило, слагаемые, которые "отвечают" за поведение соответствующих ортогональных полиномов на концах области ортогональности. Полиномы, ортогональные по Соболеву на отрезке $[a, b]$, могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого отрезка. Это свойство имеет важное значение для многих приложений. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на $[a, b]$ весом полиномы этим важным свойством не обладают.

С другой стороны отметим, что в ряде работ Шарапудинова И.И. (см. [7] – [12]) были введены, так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством

совпадения их значений в концах области ортогональности со значениями исходной функции. В работах [7] – [12] были подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных функциональных пространств и классов. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных.

В настоящей работе показано, что классические полиномы Чебышева $T_k^{\alpha-r, \beta-r}(x, N+r)$ ($r \leq k \leq N+r-1$), определяемые разностной формулой Родрига (2.2), при условии $(k+\alpha+\beta)^{[r]} \neq 0$ образуют ортогональную систему относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^N \mu(j) \Delta^r f(j) \Delta^r g(j), \quad (1.1)$$

где $\Delta f(j) = f(j+1) - f(j)$, $\Delta^r f(j) = \Delta \Delta^{r-1} f(j)$ – конечная разность, $\mu(x)$ – весовая функция. Нам понадобится ряд свойств полиномов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$, которые мы соберем в следующем параграфе.

1. Некоторые сведения о полиномах Чебышева, ортогональных на равномерной сетке

Пусть N – натуральное, α, β – произвольные числа. Положим

$$\rho(x) = \rho(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \quad (2.1)$$

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(-1)^n}{n!(N-1)^{[n]} \rho(x)} \Delta^n \left\{ \rho(x)(x-N-\alpha)^{[n]} x^{[n]} \right\}, \quad (2.2)$$

где $\Delta^n f(x)$ – конечная разность n -го порядка функции $f(x)$ в точке x , т.е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta \Delta^{n-1} f(x)$ ($n \geq 1$), $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a(a-1) \cdots (a-k+1)$ при $k \geq 1$. Для каждого $0 \leq n \leq N-1$ равенство (2.2) определяет [13] – [17] алгебраический полином степени n , для которого

$$T_n^{\alpha, \beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad T_n^{\alpha, \beta}(0, N) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ можно найти, например, в монографии [18]. Прежде всего отметим, что полиномы $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ допускают следующее явное представление

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}}. \quad (2.3)$$

Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$) образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (2.1)) систему на множестве $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$,

точнее

$$\sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha, \beta}(x, N) T_m^{\alpha, \beta}(x, N) = h_{n, N}^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (2.4)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N) 2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \rho(x) \\ &= \frac{\Gamma(N) 2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(x + \beta + 1) \Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1) \Gamma(N - x)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$h_{n, N}^{\alpha, \beta} = \frac{(N + n + \alpha + \beta)^{[n]}}{(N - 1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1) 2^{\alpha+\beta+1}}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) (2n + \alpha + \beta + 1)}. \quad (2.6)$$

При $n = 0$ произведение $(\alpha + \beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha + \beta + 2)$. Для $0 \leq n \leq N - 1$ положим

$$\tau_n^{\alpha, \beta}(x) = \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \left\{ h_{n, N}^{\alpha, \beta} \right\}^{-1/2} T_n^{\alpha, \beta}(x, N). \quad (2.7)$$

Очевидно, если $0 \leq n, m \leq N - 1$, то

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) \tau_m^{\alpha, \beta}(x, N) = \delta_{nm}. \quad (2.8)$$

Другими словами, многочлены $\tau_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N - 1$) образуют ортонормированную с весом $\mu(x)$ систему на Ω_N .

Формула Кристоффеля – Дарбу для многочленов Чебышева имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n, N}^{\alpha, \beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \tau_k^{\alpha, \beta}(x) \tau_k^{\alpha, \beta}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{T_k^{\alpha, \beta}(x) T_k^{\alpha, \beta}(y)}{h_{k, N}^{\alpha, \beta}} = \\ &= \frac{(N - 1)^{[n+1]}}{(N + n + \alpha + \beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{\Gamma(n + 2) \Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)} \times \\ &\quad \frac{T_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) T_n^{\alpha, \beta}(y) - T_n^{\alpha, \beta}(x) T_{n+1}^{\alpha, \beta}(y)}{x - y}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку $\Delta a^{[k]} = k a^{[k-1]}$, то из (2.3) находим

$$\begin{aligned} (n + 1) T_{n+1}^{\alpha, \beta}(x, N) + (n + \beta + 1) T_n^{\alpha, \beta}(x, N) \\ = \frac{2n + \alpha + \beta + 2}{N - 1} x T_n^{\alpha, \beta+1}(x - 1, N - 1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из равенства $\mu(N - 1 - x; \beta, \alpha, N) = \mu(x; \alpha, \beta, N)$, непосредственно вытекающего из соотношения ортогональности (2.4) следует, что при $\alpha, \beta > -1$

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = (-1)^n T_n^{\beta, \alpha}(N - 1 - x, N). \quad (2.11)$$

Поскольку обе части этого равенства аналитичны относительно α и β , то оно справедливо для произвольных α и β . Из (2.10) и (2.11) имеем также следующее равенство

$$\begin{aligned} & (n + \alpha + 1)T_n^{\alpha, \beta}(x, N) - (n + 1)T_{n+1}^{\alpha, \beta}(x, N) \\ &= \frac{2n + \alpha + \beta + 2}{N - 1}(N - 1 - x)T_n^{\alpha+1, \beta}(x, N - 1). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Непосредственно из явной формулы (2.3) мы можем вывести следующее полезное равенство

$$\Delta^m T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_m}{(N - 1)^{[m]}} T_{n-m}^{\alpha+m, \beta+m}(x, N - m), \quad (2.13)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a + 1) \cdots (a + k - 1)$ при $k \geq 1$. Если β такое целое число, что $-n \leq \beta \leq -1$, то из (2.13) выводим также

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(n + \beta)!}{n!} \frac{(n + \alpha)^{[-\beta]} x^{[-\beta]}}{(N - 1)^{[-\beta]}} T_{n+\beta}^{\alpha, -\beta}(x + \beta, N + \beta), \quad (2.14)$$

а если α и β — целые, $-n \leq \beta \leq -1$, $-(n + \beta) \leq \alpha \leq -1$, $N \geq 2$, то

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]} (N - x - 1)^{[-\alpha]}}{(N - 1)^{[-\beta]} (N - 1 + \beta)^{[-\alpha]}} T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha, -\beta}(x + \beta, N + \alpha + \beta). \quad (2.15)$$

Разностная формула Родрига (2.1) допускает следующее обобщение

$$\begin{aligned} & \rho(x + m; \alpha, \beta, N + m) T_n^{\alpha, \beta}(x + m, N + m) = \\ & \frac{(-1)^m}{n^{[m]} (N)_m} \Delta^m \left\{ \rho(x; \alpha + m, \beta + m, N) T_{n-m}^{\alpha+m, \beta+m}(x, N) \right\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

которое, впрочем, непосредственно вытекает из (2.1). Заменяя здесь m на ν , α и β на $m - \nu$, n на $k + \nu - m$, мы можем также записать

$$\begin{aligned} & \Delta^\nu \{ (x + 1)_m (N - x)_m T_{k-m}^{m, m}(x, N) \} = \\ & (-1)^\nu (k + \nu - m)^{[\nu]} (N + \nu - 1)^{[\nu]} (x + 1 + \nu)_{m-\nu} (N - x)_{m-\nu} T_{k+\nu-m}^{m-\nu, m-\nu}(x + \nu, N + \nu). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если в равенстве (2.16) мы заменим α , β и n , соответственно, на $\alpha - m$, $\beta - m$ и $k + m$, то придем к формуле

$$\Delta^m T_{k+m}^{\alpha-m, \beta-m}(x, N) = \frac{(k + \alpha + \beta)^{[m]}}{(N - 1)^{[m]}} T_k^{\alpha, \beta}(x, N - m). \quad (2.18)$$

2. Об ортогональности полиномов Чебышева $T_n^{\alpha-r, \beta-r}(x, N)$ по Соболеву

Для произвольных $\alpha, \beta > -1$ и целого $r \geq 0$ рассмотрим соотношение ортогональности (2.4) и подставим вместо $T_k^{\alpha, \beta}(x, N)$ выражение

$$T_{k-r}^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(N + r - 1)^{[r]}}{(k - r + \alpha + \beta)^{[r]}} \Delta^r T_k^{\alpha-r, \beta-r}(x, N + r), \quad (3.1)$$

которое вытекает непосредственно из (2.18). Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r T_n^{\alpha-r, \beta-r}(x, N+r) \Delta^r T_m^{\alpha-r, \beta-r}(x, N+r) \\ = \left(\frac{(n-r+\alpha+\beta)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}} \right)^2 h_{n-r, N}^{\alpha, \beta} \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} < T_n^{\alpha-r, \beta-r}(*, N+r), T_m^{\alpha-r, \beta-r}(*, N+r) > = \\ \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r T_n^{\alpha-r, \beta-r}(x, N+r) \Delta^r T_m^{\alpha-r, \beta-r}(x, N+r) = \\ \left(\frac{(n-r+\alpha+\beta)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}} \right)^2 h_{n-r, N}^{\alpha, \beta} \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Равенство (3.1), с помощью которого мы вывели (3.2), имеет смысл, если выражение $(k+\alpha+\beta)^{[r]}$ не обращается в нуль. Мы рассмотрим различные случаи.

Случай 1. Пусть $\beta = 0$, α – нецелое. Тогда очевидно, что каковы бы ни были целые k и r величина $(k+\alpha+\beta)^{[r]}$ не обращается в нуль, т.е. $(k+\alpha+\beta)^{[r]} = (k+\alpha)^{[r]} \neq 0$, следовательно, равенство (3.2) имеет место для произвольных $n, m \geq 0$. В этом частном случае равенству (3.2) можно придать следующий вид $(\mu(x) = \mu(x; \alpha, 0, N))$

$$\begin{aligned} < T_n^{\alpha-r, -r}(*, N+r), T_m^{\alpha-r, -r}(*, N+r) > = \\ \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r T_n^{\alpha-r, -r}(x, N+r) \Delta^r T_m^{\alpha-r, -r}(x, N+r) = \\ \left(\frac{(n-r+\alpha)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}} \right)^2 h_{n-r, N}^{\alpha, 0} \delta_{nm} \quad (n, m \geq r). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) можно рассматривать как соотношение ортогональности для полиномов Чебышева $T_n^{\alpha-r, -r}(x, N+r)$ ($r \leq n \leq N+r-1$) относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$< f, g > = \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r f(x) \Delta^r g(x). \quad (3.4)$$

Случай 2. Пусть $\alpha = \beta = 0$, $k \geq 2r$. Тогда $(k-r+\alpha+\beta)^{[r]} = (k-r)^{[r]} \neq 0$ и поэтому снова имеет место равенство (3.2), т.е.

$$\begin{aligned} < T_n^{-r, -r}(*, N+r), T_m^{-r, -r}(*, N+r) > = \\ \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) \Delta^r T_n^{-r, -r}(x, N+r) \Delta^r T_m^{-r, -r}(x, N+r) = \\ \left(\frac{(n-r)^{[r]}}{(N+r-1)^{[r]}} \right)^2 h_{n-r, N}^{0, 0} \delta_{nm} \quad (n, m \geq 2r). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) означает, что полиномы $T_n^{-r, -r}(x, N+r)$ ($2r \leq n \leq N+r-1$) ортогональны по Соболеву относительно скалярного произведения (3.4).

Список литературы

- [1] Kwon K.H., Littlejohn L.L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. V. 2. Pp. 289–303.
- [2] Kwon K.H., Littlejohn L.L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Pp. 547–594.
- [3] Marcellan F., Alfaro M., Rezola M.L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1993. V. 48. C. 113–131.
- [4] Iserles A., Koch P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. V. 65. Pp. 151–175.
- [5] Meijer H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. V. 73. Pp. 1–16.
- [6] Marcellan F., Yuan Xu. On sobolev orthogonal polynomials // arXiv: 6249v1 [math.CA] 25 Mar 2014. 2014. Pp. 1–40.
- [7] Шарапудинов И.И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Математический сборник. Т. 191, №5. 2000. С. 143–160.
- [8] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математические заметки. Т. 72, №5. 2002. С. 765–795.
- [9] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: Издательство Дагестанского научного центра. 2004. 176 с.
- [10] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. 2005. Т. 78, №3. С. 442–465.
- [11] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. 2006. Т. 197, №3. С. 135–154.
- [12] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства средних типа Валье-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Математические заметки. 2008. Т. 197, №3. С. 452–471.
- [13] Чебышев П.Л. О непрерывных дробях (1855) // Полн. собр. соч. Т. 2. М. Изд. АН СССР. 1947. С. 103–126.
- [14] Чебышев П.Л. Об одном новом ряде // Полн. собр. соч. Т. 2. М. Изд. АН СССР. 1947. С. 236–238.
- [15] Чебышев П.Л. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859) // Полн. собр. соч. Т. 2. М. Изд. АН СССР. 1947. С. 314–334.
- [16] Чебышев П.Л. Об интерполировании (1864) // Полн. собр. соч. Т. 2. М. Изд. АН СССР. 1947. С. 357–374.
- [17] Чебышев П.Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875) // Полн. собр. соч. Т. 2. М. Изд. АН СССР. 1947. С. 66–87.
- [18] Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала: Издательство Даг. гос. пед. ун-та. 1997. 252 с.
- [19] Сеге Г. Ортогональные многочлены. Москва: Физматгиз. 1962. 500 с.

Т. И. Шарапудинов (T. I. Sharapudinov)
 Владикавказский научный центр РАН, Дагестанский
 научный центр РАН
 E-mail: sharapudinov@gmail.com

Поступила в редакцию
 17.10.2015