УДК 517.587

И. И. Шарапудинов, Т. И. Шарапудинов

Об одновременном приближении функций и их производных посредством полиномов Чебышева, ортогональных на равномерной сетке

Рассмотрена задача об исследовании аппроксимативных свойств полиномиального оператора $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f, x)$, действующего в пространстве $C[-1, 1]$, основанного на использовании лишь дискретных значений функции $f(x)$, заданных в узлах равномерной сетки $\{x_j = -1 + jh\}_{j=0}^{N+2r-1} \subset [-1, 1]$, который может быть использован в задаче об одновременном приближении дифференцируемой функции $f(x)$ и ее нескольких производных $f'(x), \dots, f^{(p)}(x)$. Построение операторов $\mathcal{X}_{m,N}(f)$ основано на полиномах Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$), образующих ортогональную систему на множестве $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ с весом

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, N) = c \frac{\Gamma(x + \beta + 1)\Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)},$$

т.е.

$$\sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x, N) T_m^{\alpha,\beta}(x, N) = h_{n,N}^{\alpha,\beta} \delta_{nm}.$$

Получены верхние оценки для функции Лебега оператора $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f, x)$ и весовых приближений вида

$$\frac{|\frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu [f(x_{j-\nu}) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu})]|}{\left(\sqrt{1 - x_j^2} + \frac{1}{m}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}}.$$

Библиография: 29 названий.

The article is dedicated to investigation of approximative properties of polynomial operator $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f, x)$, which is defined in the space $C[-1, 1]$ and based on the use of only discrete values of the function $f(x)$, given in the nodes of uniform grid $\{x_j = -1 + jh\}_{j=0}^{N+2r-1} \subset [-1, 1]$. This operator can be used for solving the problem of simultaneous approximation of a differentiable function $f(x)$ and its multiple derivatives $f'(x), \dots, f^{(p)}(x)$. Construction of operators $\mathcal{X}_{m,N}(f)$ is based on Chebyshev polynomials $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$), which form an orthogonal system on the set $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ with weight

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, N) = c \frac{\Gamma(x + \beta + 1)\Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)},$$

i.e.

$$\sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x, N) T_m^{\alpha,\beta}(x, N) = h_{n,N}^{\alpha,\beta} \delta_{nm}.$$

There were obtained upper bounds for the Lebesgue functions of an operator $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f, x)$ and weighted approximations of the following form

$$\frac{|\frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu [f(x_{j-\nu}) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu})]|}{\left(\sqrt{1 - x_j^2} + \frac{1}{m}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}}.$$

Bibliography: 29 items.

Ключевые слова: полиномы Чебышева, ортогональные на сетке; полиномы Чебышева первого рода; приближение функций и производных.

Keywords: Chebyshev polynomials orthogonal on the grid; Chebyshev polynomials of the first kind; approximation of functions and derivatives.

Введение

Задача об одновременном приближении функций и их производных достаточно хорошо исследована в теории приближений [1]–[5]. Она вызывает интерес исследователей не только сама по себе, но и в связи с различными прикладными вопросами. В настоящей работе рассмотрена задача о конструировании полиномиального оператора $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f, x)$, действующего в пространстве $C[-1, 1]$, основанного на использовании лишь дискретных значений функции $f(x)$, заданных в узлах равномерной сетки $\{-1 + jh\}_{j=0}^{N+2r-1} \subset [-1, 1]$, который может быть использован в задаче об одновременном приближении дифференцируемой функции $f(x)$ и ее нескольких производных $f'(x), \dots, f^{(p)}(x)$. Такие задачи достаточно часто возникают в различных приложениях. В качестве примера мы отметим линейную систему, у которой выходной сигнал $f = f(x)$ и входной сигнал $g = g(x)$ связаны между собой равенством

$$f^{(r)}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu(x) f^{(\nu)}(x) + \sum_{\mu=0}^s b_\mu(x) g^{(\mu)}(x), \quad (0.1)$$

где неизвестные переменные коэффициенты $a_\nu(x)$ ($\nu = 0, \dots, r-1$) и $b_\mu(x)$ ($\mu = 0, \dots, s$) представляют собой алгебраические полиномы заданной степени m . Будем считать, что функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[-1, 1]$, соответственно, r раз и s раз. Ставится задача найти неизвестные переменные коэффициенты $a_\nu(x)$ ($\nu = 0, \dots, r-1$) и $b_\mu(x)$ ($\mu = 0, \dots, s$) экспериментальным путем. Такую задачу часто называют [6]–[8] *идентификацией* параметров системы. Методы и подходы к решению этой задачи существенно зависят от того, что именно мы знаем о входном и выходном сигналах $f = f(x)$ и $g = g(x)$. Рассмотрим часто встречающийся на практике случай, когда заданы значения сигналов $f(x)$ и $g(x)$ в узлах равномерной сетки $\{x_j = -1 + jh\}_{j=0}^{N+2r-1}$, где $h = \frac{2}{N+2r-1}$. Основной (и наиболее трудный) вопрос, который возникает при решении поставленной задачи, заключается в том, чтобы найти в заданной точке $x \in [-1, 1]$ численные значения производных $f^{(\nu)}(x)$ ($\nu = 1, \dots, r$) и $g^{(\mu)}(x)$ ($\mu = 1, \dots, s$), исходя из дискретной информации $f_j = f(x_j)$, $g_j = g(x_j)$ ($0 \leq j \leq N + 2r - 1$). Для решения задачи численного дифференцирования функции $f(x)$, используя лишь

значения $f_j = f(x_j)$, исторически часто применялись интерполяционные полиномы Ньютона (или Лагранжа) [9], а в настоящее время наиболее часто для этого применяют [10] интерполяционные полиномиальные сплайны. Но при решении задачи идентификации (0.1) с полиномиальными коэффициентами естественно предположить, что сигналы $f = f(x)$ и $g = g(x)$ являются аналитическими функциями переменной $x \in [-1, 1]$. В этом случае, как хорошо известно [11], асимптотически оптимальным способом приближенного представления этих функций служат их частичные суммы Фурье по полиномам Чебышева $C_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Остановимся вкратце (и схематично) на описании подхода к приближенному нахождению переменных коэффициентов $a_\nu(t)$ ($\nu = 0, \dots, r-1$) и $b_\mu(t)$ ($\mu = 0, \dots, s$) задачи (0.1), основанного на использовании полиномов $C_n(t) = \cos(n \arccos t)$, в котором полиномиальный метод приближения производных оказался (как это показали компьютерные эксперименты) весьма эффективным. А именно, пусть

$$f^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{\nu,k} C_k(x), \quad g^{(\mu)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_{\mu,k} C_k(x),$$

$$a_\nu(x) = \sum_{j=0}^m \hat{a}_{\nu,j} C_j(x), \quad b_\mu(x) = \sum_{j=0}^m \hat{b}_{\mu,j} C_j(x).$$

Подставляя эти значения в (0.1), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k} C_k(t) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \hat{a}_{\nu,j} \hat{f}_{\nu,k} C_j(x) C_k(t) + \sum_{\mu=0}^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \hat{b}_{\mu,j} \hat{g}_{\mu,k} C_j(x) C_k(x).$$

Отсюда с учетом равенства $2C_j(x)C_k(x) = C_{j+k}(x) + C_{|k-j|}(x)$ находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{r,k} C_k(x) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \hat{a}_{\nu,j} \hat{f}_{\nu,k} (C_{j+k}(x) + C_{|k-j|}(x))$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \hat{b}_{\mu,j} \hat{g}_{\mu,k} (C_{j+k}(x) + C_{|k-j|}(x)).$$

Используя это равенство, можно записать алгоритм для получения элементов матрицы $U = \{u_{il}\}_{1 \leq i \leq \infty, 1 \leq l \leq L}$ с числом столбцов, равным $L = (r + s + 1)(m + 1)$ и бесконечным числом строк, для которой запишем бесконечную систему линейных уравнений:

$$U \cdot V = F_r,$$

где V – вектор-столбец, для которого транспонированный вектор V' имеет вид

$$V' = (\hat{a}_{0,0}, \dots, \hat{a}_{0,m}, \dots, \hat{a}_{r-1,0}, \dots, \hat{a}_{r-1,m}, \hat{b}_{0,0}, \dots, \hat{b}_{0,m}, \dots, \hat{b}_{s,0}, \dots, \hat{b}_{s,m}),$$

F_r – последовательность-столбец коэффициентов Фурье – Чебышева функции $f^{(r)}(x)$.

Заметим, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ представляют собой алгебраические полиномы степени M , то их производные $f^{(\nu)}(x)$ ($\nu = 1, \dots, r$) и $g^{(\mu)}(x)$

($\mu = 1, \dots, s$) также являются алгебраическими полиномами степени не выше M . Тогда, в силу ортогональности полинома Чебышева $C_k(x)$ к произвольному алгебраическому полиному степени меньше, чем k , мы заметим, что коэффициенты Фурье – Чебышева $\hat{f}_{\nu,k}$ и $\hat{g}_{\mu,k}$ с $k > M$ обращаются в нуль и поэтому в этом случае вместо бесконечной системы уравнений мы будем иметь конечную систему линейных уравнений

$$U_{M,L} \cdot V = F_{r,M},$$

где $U_{M,L}$ – подматрица матрицы U вида $U_{M,L} = \{u_{il}\}_{1 \leq i \leq M, 1 \leq l \leq L}$, $F_{r,M}$ – вектор-столбец, составленный из коэффициентов $\hat{f}_{r,k}$ ($0 \leq k \leq M-1$). Поскольку, как было отмечено выше, мы предполагаем $M \geq L$, то вполне может случиться так, что эта система не разрешима. Тогда ставится задача о нахождении квазирешения указанной системы, придав предварительно этому понятию определенный смысл. Если, например, ставится задача о решении этой системы методом наименьших квадратов, то при условии обратимости матрицы $U'_{M,L} U_{M,L}$ мы получим

$$V = (U'_{M,L} U_{M,L})^{-1} U'_{M,L} F_{r,M}.$$

Нам остается теперь выразить искомые переменные коэффициенты $a_\nu(x)$, $b_\mu(x)$ в виде равенств $a_\nu(x) = \sum_{j=0}^m \hat{a}_{\nu,j} C_j(x)$, $b_\mu(x) = \sum_{j=0}^m \hat{b}_{\mu,j} C_j(x)$ и, тем самым, будет решена задача идентификации рассматриваемой линейной системы (0.1). Если же функции $f(x)$ и $g(x)$, фигурирующие в (0.1), не являются алгебраическими полиномами, то необходимо найти алгебраические полиномы $X_n(x)$ и $Y_n(x)$ степени n , которые обладают тем свойством, что $X_n^{(\nu)}(x)$ с требуемой точностью приближает $f^{(\nu)}(x)$ одновременно для всех $\nu = 0, 1, \dots, p$, а $Y_n^{(\nu)}(x)$ приближает $g^{(\nu)}(x)$ одновременно для всех $\nu = 0, 1, \dots, s$. Если такие полиномы будут найдены, то вместо исходной задачи (0.1) мы можем указанным выше методом решить приближенную задачу

$$X_n^{(r)}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} A_\nu(x) X_n^{(\nu)}(x) + \sum_{\mu=0}^s B_\mu(x) Y_n^{(\mu)}(x)$$

и найти переменные параметры $A_\nu(x)$, $B_\mu(x)$ и, тем самым, мы получим приближенное решение задачи об идентификации параметров системы (0.1).

При численной реализации описанного метода приближенного решения задачи идентификации (0.1) возникает промежуточная задача о конструировании на основе дискретных данных $f_j = f(x_j)$, $g_j = g(x_j)$ ($0 \leq j \leq N + 2r - 1$) алгебраических полиномов $X_n(x) = X_n(f, x)$ и $Y_n(x) = Y_n(g, x)$ степени n , которые обладают тем свойством, что $X_n^{(\nu)}(x)$ с требуемой точностью приближает $f^{(\nu)}(x)$ одновременно для всех $\nu = 0, 1, \dots, p$, а $Y_n^{(\nu)}(x)$ приближает $g^{(\nu)}(x)$ одновременно для всех $\nu = 0, 1, \dots, s$. Следует отметить, что из-за присутствия в измерениях $f_j = f(x_j) = \tilde{f}(x_j) + \eta_j$ и $g_j = g(x_j) = \tilde{g}(x_j) + \xi_j$ случайных погрешностей η_j и ξ_j обычные методы численного дифференцирования, основанные на применении интерполяционных полиномов могут оказаться непригодными для решения поставленной задачи. Требуется предварительная обработка заданной дискретной информации $f_j = f(x_j)$, $g_j = g(x_j)$

($0 \leq j \leq N + 2r - 1$) путем ее «сглаживания». Один из наиболее часто применяемых методов сглаживания дискретных данных, как известно, базируется на использовании полиномиального метода наименьших квадратов, который, в свою очередь, тесно связан с полиномами Чебышева, ортогональными на дискретной сетке $\{x_j = -1 + jh\}_{j=0}^{M-1}$. Остановимся на этом вопросе более подробно. Обозначим через $\hat{P}_{n,M}(x)$ ($0 \leq n \leq M - 1$) полиномы Чебышева, образующие на сетке $\{x_j = -1 + jh\}_{j=0}^{M-1}$ ортонормированную систему с весом $2/M$, т.е.

$$\frac{2}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \hat{P}_{n,M}(x_j) \hat{P}_{m,M}(x_j) = \delta_{nm}. \quad (0.2)$$

Эти полиномы и некоторые их обобщения были введены впервые в работах П.Л. Чебышева [12] – [16] в связи задачей сглаживания наблюдений и в настоящее время находят многочисленные приложения как в математической статистике (в связи с методом наименьших квадратов), так и во многих других областях. В задаче сглаживания наблюдений полиномы Чебышева возникают следующим образом. Предположим, что нам заданы измерения $f_j = f(x_j) = \tilde{f}(x_j) + \eta_j$ ($0 \leq j \leq M - 1$) и требуется найти алгебраический полином $S_{n,M}(x)$, который минимизирует величину

$$J(a_0, \dots, a_n) = \frac{2}{M} \sum_{j=0}^{M-1} [f_j - p_n(x_j)]^2$$

среди всех алгебраических полиномов $p_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ степени $n \leq M - 1$. П.Л. Чебышев предложил искать такой полином в виде

$$S_{n,M}(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k \hat{P}_{k,M}(t)$$

и показал, что для искомого оптимального полинома коэффициенты β_k принимают вид

$$\beta_k = \hat{f}_k = \frac{2}{M} \sum_{j=0}^{M-1} f_j \hat{P}_{k,M}(x_j). \quad (0.3)$$

Таким образом, полином

$$S_{n,M}(x) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k \hat{P}_{k,M}(x), \quad (0.4)$$

реализующий метод наименьших квадратов, представляет собой сумму Фурье дискретной функции, принимающей значения f_j в точках x_j ($0 \leq j \leq M - 1$). Одним из способов «сглаживания» наблюдений $f_j = f(x_j)$ ($0 \leq j \leq M - 1$) является замена значений $f_j = f(x_j)$ соответствующими приближенными значениями $S_{n,M}(x_j)$. Более того, исходную функцию $f(x)$, заданную на $[-1, 1]$, можно заменить (приближенно) суммой Фурье $S_{n,M}(x)$. В работе [17] было показано, что если $n = O(\sqrt{M})$, то $S_{n,M}(x) = S_{n,M}(f, x)$ имеет достаточно хорошие аппроксимативные свойства в пространстве непрерывных на $[-1, 1]$

функций $f = f(x)$. Другими словами, $S_{n,M}(f, x)$ приближает функцию $f(x)$ достаточно хорошо при любом $x \in [-1, 1]$. В то же время, можно показать, что производные $S_{n,M}^{(\nu)}(f, x)$ приближают производные $f^{(\nu)}(x)$ значительно хуже. Поэтому частичные суммы $S_{n,M}(f, x)$ не могут быть рекомендованы в качестве аппарата одновременного приближения функций $f(x)$ и их производных $f^{(\nu)}(x)$ в рассматриваемой задаче идентификации параметров из (0.1). Требуется конструировать альтернативные суммам Фурье $S_{n,M}(f, x)$ операторы $\mathcal{X}_{n,N}(f) = \mathcal{X}_{n,N}(f, x)$, представляющие собой (также как и $S_{n,M}(f, x)$) проекторы на подпространство алгебраических полиномов степени n , действующие в пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f = f(x)$, использующие в качестве исходной информации значения $f(x_j)$ ($0 \leq j \leq N + 2r - 1$) и которые могут быть эффективно использованы для «сглаживания» ошибок в наблюдениях $f(x_j)$ ($0 \leq j \leq N + 2r - 1$) и для решения задачи одновременного приближения дифференцируемой функции $f(x)$ и её нескольких производных. В настоящей работе (пункт 4) предпринята попытка конструировать такие операторы на основе уже упомянутых выше полиномов Чебышева $\hat{P}_{k,M}(x)$ и их обобщений, также введенных в работе Чебышева [16]. На обсуждении вопроса о том, в какой степени при решении задачи приближенного нахождения производных, фигурирующих в задаче (0.1), следует отдать предпочтение полиномиальным операторам, построенным на основе ортогональных полиномов (спектральный метод), мы здесь не остановимся. По поводу достоинств и недостатков подобного (спектрального) подхода к проблемам решения дифференциальных уравнений, задач идентификации параметров систем вида (0.1) и численного дифференцирования мы можем отсылать, например, к работам [8], [18]–[20]. Отметим также, что в последнее время получило развитие (см. [21] и цитированную там литературу) спектральный подход решения задач идентификации, основанный на *вейвлетах*, построенных с помощью ортогональных полиномов.

Основные сведения о полиномах Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(t; M)$, определяемых для произвольных действительных (или даже комплексных) α и β разностной формулой Родрига (1.2), собраны (для удобства ссылок) в пункте 1. Конструкция оператора $\mathcal{X}_{m,M}(f) = \mathcal{X}_{m,M}(f, x)$, являющегося основным объектом исследования настоящей работы, возникает при линейной замене переменных, переводящей отрезок $[-1, 1]$ в отрезок $[-r, N + r - 1]$, из частичных сумм некоторого специального конечного ряда по полиномам $T_n^{r,r}(t; N)$. Наиболее короткий путь получения специального ряда, о котором идет речь, состоит в следующем. Пусть r и N – натуральные числа. Рассмотрим дискретную функцию $d(t)$, заданную на сетке $\bar{\Omega}_{N+2r} = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$. Через $\mathcal{D}_{2r-1,N}(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t)$ обозначим интерполяционный полином Лагранжа степени $2r-1$, совпадающий с функцией $d(t)$ в точках множества $\{-r, -r+1, \dots, -1, N, \dots, N-1+r\}$, стало быть,

$$\mathcal{D}_{2r-1,N}(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) =$$

$$\sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \frac{(t+1)_r (N-t)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r} \left[\frac{d(-i)}{t+i} + \frac{d(N-1+i)}{N-1+i-t} \right].$$

Далее рассмотрим новую дискретную функцию $g(t) = \frac{d(t) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t)}{\mu(t;r,r,N)}$, где $\mu(t;r,r,N)$ – весовая функция, определенная равенством (1.5), которая для $\alpha = \beta = r$ принимает следующий вид $\mu(t;r,r,N) = \frac{2^{2r+1}(t+1)_r(N-t)_r}{N(N+r)^{[r]}(N+2r)^{[r]}}$, где $(a)_r = a(a+1) \cdots (a+r-1)$, $a^{[r]} = a(a-1) \cdots (a-r+1)$. Дискретная функция $g(t)$ определена на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ и, следовательно, ее можно разложить в конечный ряд Фурье по системе полиномов Чебышева $\tau_k^{r,r}(t, N)$ ($0 \leq k \leq N-1$), ортонормированной на Ω_N с весом $\mu(t;r,r,N)$ (см. (1.7) и (1.8)): $g(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \tau_k^{r,r}(t, N)$, где g_k ($0 \leq k \leq N-1$) – коэффициенты Фурье функции $g(t)$ по системе $\tau_k^{r,r}(t, N)$ ($0 \leq k \leq N-1$), т.е.

$$g_k = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(j;r,r,N) \tau_k^{r,r}(j, N) g(j) = \sum_{j \in \Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, j)] \tau_k^{r,r}(j, N) = \hat{d}_{r,k}.$$

Из этих равенств имеем

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) + \mathcal{F}_r^N(t), \quad (0.5)$$

где

$$\mathcal{F}_r^N(t) = \mu(t;r,r,N) \sum_{k=0}^{N-1} \hat{d}_{r,k} \tau_k^{r,r}(t, N). \quad (0.6)$$

Правую часть равенства (0.5) будем называть *специальным или смешанным* рядом по полиномам Чебышева $\tau_k^{r,r}(t, N)$ ($0 \leq k \leq N-1$). Заметим, что частичная сумма ряда (0.5) вида

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) + \mu(t;r,r,N) \sum_{k=0}^n \hat{d}_{r,k} \tau_k^{r,r}(t, N) \quad (0.7)$$

представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$. Теперь мы можем определить оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ следующим образом. Пусть функция $f = f(x)$, заданная на $[-1, 1]$, принимает конечные значения $f(x_j)$ в узлах сетки $H_\Lambda = \{x_j = -1 + \frac{2j}{\Lambda-1}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$, где $\Lambda = N+2r$. Тогда на сетке $\bar{\Omega}_{N+2r} = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$ мы можем определить функцию $d = d(j) = f(x_{j+r})$, для которой, в свою очередь, определим оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$. Определим, наконец, оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ с помощью равенства $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$, где $t = \frac{\Lambda-1}{2}(x+1) - r$.

При исследовании разностных свойств операторов $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d)$ и соответствующих свойств операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ удобно пользоваться некоторой модификацией специального ряда (0.5), в которой вместо ортонормированных полиномов Чебышева $\tau_k^{r,r}(t, N)$ фигурируют полиномы Чебышева $T_k^{r,r}(t, N)$, связанные с $\tau_k^{r,r}(t, N)$ с помощью равенства (1.7). В связи с этим, в пункте 2 показано, что ряд $\mathcal{F}_{r,N}(t)$, фигурирующий в правой части равенства (0.5) может быть записан (см. (2.11)) в следующем виде

$$\mathcal{F}_r^N(d, t) = \frac{(-1)^r(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t, N), \quad (0.8)$$

в которой

$$d_{r,k} = \frac{b_k}{\sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}} = \frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N+r-1} \Delta^r d(j-r) T_k^{0,0}(j, N+r),$$

где b_k ($0 \leq k \leq N+r-1$) – коэффициенты Фурье функции $b(t) = \Delta^r d(t-r)$ по полиномам Чебышева $\tau_k^{0,0}(t, N+r) = \frac{T_k^{r,r}(t, N+r)}{\sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}$. Из (0.7) и (0.8) имеем

$$d(t) - \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = \frac{(-1)^r (t+1)_r (N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t, N), \quad (0.9)$$

и, как следствие, для полинома $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$, в свою очередь, имеет место следующее равенство

$$f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = \frac{(-1)^r (t+1)_r (N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t, N), \quad (0.10)$$

где $t = \frac{\Lambda-1}{2}(x+1)-r \in \bar{\Omega}_{N+2r}$ или (что то же) $x \in H_\Lambda$. Как показано в пунктах 3 и 4, аналогичные равенства справедливы для разностей $\Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$ и $\Delta_h^\nu f(x) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ ($h = 2/(\Lambda-1)$).

Ряды (0.5), в которых выражение $\mathcal{F}_{r,N}(t)$ имеет вид (0.8) (но не (0.6)), равно как и операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d)$ и $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$, были введены впервые в работе [25] (см. также [26] и [27]). В работах [25]–[27], в частности, была рассмотрена задача об одновременном приближении аналитических функций f и их производных посредством полиномов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ и их соответствующих производных. Основным (техническим) инструментом решения этой задачи в указанных работах являлись равенства (0.9) и (0.10) и аналогичные равенства (3.6) и (4.6) для конечных разностей. Дело заключается в том, что если f аналитическая функция в некотором эллипсе, содержащем отрезок $[-1, 1]$, то, как показано в [25]–[27], коэффициенты $d_{r,k}$, фигурирующие в равенстве (0.10), а точнее их абсолютные величины $|d_{r,k}|$, допускают оценку сверху некоторой геометрической прогрессией q^k с $0 < q < 1$, и это, в свою очередь, позволяет получить точную по порядку оценку конечного ряда из правой части равенства (0.10). В то же время, задача об одновременном приближении функции $f(x)$, обладающей конечной гладкостью и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ посредством полиномов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ и ее производных $\mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x)$ оставалась неисследованной. Для решения этой задачи потребовалось разработать принципиально иные подходы, не опирающиеся на равенство (0.10). Отметим также, что если точка $x \in [-1, 1]$ не принадлежит сетке H_Λ , то равенство (0.10) может вообще не иметь места, а задача о приближении функции $f(x)$ полиномом $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ остается актуальной для любого $x \in [-1, 1]$. В настоящей работе предпринята попытка восполнить указанные пробелы. В частности, в пункте 4 получена оценка (см. (4.19))

$$\frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)|}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r})^{r-\frac{1}{2}}} \leq$$

$$\mathcal{E}_{n+2r}^r(f, N) \left(\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^{\frac{1}{2}} + L_{n,N}^r(x) \right) \quad (x \in [-1, 1]), \quad (0.11)$$

где $\mathcal{E}_{n+2r}^r(f, N)$ – наилучшее приближение функции f , определенное равенством (4.9), $L_{n,N}^r(x)$ – функция Лебега для полинома $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ (см. (4.20) и (4.17)), для которой в случае $r \geq 1$, $a > 0$, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $-1 \leq x \leq 1$ получены (теорема 5.1 из пункта 5 и следствие 5.1) оценки

$$L_{n,N}^r(x) \leq c(r, a) \left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) \right), \quad (0.12)$$

и, как следствие,

$$L_{n,N}^r = \max_{-1 \leq x \leq 1} L_{n,N}^r(x) \leq c(r, a) \ln n \quad (n = 2, 3, \dots),$$

где здесь и всюду в дальнейшем $c, c(a), \dots, c_i(a, b, \dots, r)$ означают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, различные в разных местах.

Идея применения операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ в задаче численного дифференцирования функции $f(x)$ возникает в связи с результатами, полученными в пункте 5, в частности, с оценкой (5.42) (теорема 5.3). Дело в том, что оценке (5.42) можно придать несколько иной вид, поделив ее правую и левую части на $h^\nu = (\frac{2}{\Lambda-1})^\nu$, а именно:

$$\frac{|\frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu [f(x_{j-\nu}) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu})]|}{\left(\sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{m} \right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leq c(r, a) E_m^{r,\nu} \left(\frac{1}{h^\nu} \psi, N \right) \left(1 + \left(\sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \ln \left(n\sqrt{1-x_j^2} + 1 \right) \right), \quad (0.13)$$

где $m = n + 2r - \nu$, $E_m^{r,\nu}(\frac{1}{h^\nu} \psi, N)$ – величина наилучшего приближения функции $\frac{1}{h^\nu} \psi(x) = \frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu f(x - h\nu)$ на сетке $H_\Lambda = \{x_j = -1 + \frac{2j}{\Lambda-1}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$ алгебраическими полиномами степени m , определенная равенством (5.30). Теперь воспользуемся известным свойством конечной разности, согласно которому в интервале $(x_{j-\nu}, x_j)$ найдется такая точка $y_j = x_{j-\nu} + \theta_j \nu h$ ($0 < \theta_j < 1$), для которой $\frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu g(x_{j-\nu}) = g^{(\nu)}(y_j)$. Применяя это равенство к функции $f(x_{j-\nu}) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu})$, из (0.13) получим

$$\frac{|f^{(\nu)}(y_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, y_j)|}{\left(\sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leq c(r, a) E_m^{r,\nu} \left(\frac{1}{h^\nu} \psi, N \right) \left(1 + \left(\sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \ln \left(n\sqrt{1-x_j^2} + 1 \right) \right), \quad (0.14)$$

где $y_j = x_{j-\nu} + \theta_j \nu h$ ($0 < \theta < 1$) для всех j таких, что $\nu \leq j \leq N + 2r - 1$. Нетрудно заметить, что если мы в оценке (0.14) заменим точки точки x_j на

$y_j = x_{j-\nu} + \theta_j \nu h$, то она останется справедливой (возможно с другой константой $c(r, a)$) и примет следующий вид

$$\frac{|f^{(\nu)}(y_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, y_j)|}{\left(\sqrt{1 - y_j^2} + \frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leq c(r, a) E_m^{r,\nu} \left(\frac{1}{h^\nu} \psi, N \right) \left(1 + \left(\sqrt{1 - y_j^2} + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \ln \left(n \sqrt{1 - y_j^2} + 1 \right) \right), \quad (0.15)$$

где $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $a > 0$, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$. Кроме того заметим, что $\frac{1}{h^\nu} \psi(x_j) = \frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu f(x_{j-\nu}) = f^{(\nu)}(z_j)$, где $z_j = x_{j-\nu} + \eta_j \nu h$ ($0 < \eta_j < 1$).

Оценка (0.15) показывает, что операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ успешно могут быть использованы в задаче одновременного приближения функций и их нескольких производных. Это подтвердили также компьютерные эксперименты, проведенные авторами при решении задачи идентификации переменных параметров системы (0.1). Для приложений важно то, что конструкция операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ базируется на массиве значений функции $f(x)$ в узлах равномерной сетки $H_\Lambda = \{x_j = -1 + \frac{2j}{\Lambda-1}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В связи с оценкой (0.15), полученной для узлов сетки $\{y_j = x_{j-\nu} + \theta_j \nu h\}_{j=\nu}^{N+2r-1}$, возникает вопрос о том, останется ли она справедливой для точек отрезка $[-1, 1]$, не попавших в эту сетку. Но эта задача является объектом исследования другой работы.

Подводя итоги, отметим, что в настоящей работе получены результаты двух типов. Результаты первого типа касаются получения для разностей $|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)|$ и $|\Delta_h^\nu f(x_{j-\nu}) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu})|$ неравенств типа Лебега, поведение функций Лебега $L_{n,N}^r(x)$ и $L_{n,N}^{r,\nu}(x)$ в которых отражал бы тот факт, что при $0 \leq \nu \leq r-1$ вблизи концов отрезка $[-1, 1]$ частичные суммы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ и их разностные производные $\frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu})$ приближают, соответственно, r раз дифференцируемую функцию f и ее разностные производные $\frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu f(x_{j-\nu})$ значительно лучше (см. (0.11) – (0.13)), чем на всем отрезке.

Результаты второго типа касаются получения верхних оценок для функций Лебега $L_{n,N}^r(x)$ и $L_{n,N}^{r,\nu}(x)$, зависящие от точки $x \in [-1, 1]$ (теорема 5.1, лемма 5.2 и равенства (5.40) и (5.41)). Можно показать, что оценка (0.12), установленная для $L_{n,N}^r(x)$ в теореме 5.1 и оценка сверху для величины $I_{n,N}^{r,\nu}(x)$, содержащаяся в лемме 5.2, неуплучшаемы по порядку, если $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Другими словами, можно показать, что

$$c_1(r, a) \ln n \leq \max_{x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} L_{n,N}^r(x) \leq c_2(r, a) \ln n,$$

$$c_1(r, a) \ln n \leq \max_{x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} I_{n,N}^{r,\nu}(x) \leq c_2(r, a) \ln n,$$

если только $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$. Правые части этих неравенств непосредственно вытекают из теоремы 5.1 и леммы 5.2, соответственно. Что же касается нижних оценок в этих неравенствах, то их можно доказать с помощью асимптотической формулы (1.20) и асимптотических формул для полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$. Но

мы на этом здесь не остановимся. Вместо этого мы обсудим вопрос об окончательности оценок, установленных в теореме 5.2, ограничившись для определенности (и для краткости) случаем $r = 1$. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[-1, 1]$, $\|f'\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f'(x)| \leq 1$. Тогда в силу известной теоремы Теляковского – Гопенгауза [1], [2] существует такой алгебраический полином $q_{n+2}(x)$ степени $n + 2$, что $\frac{|f(x) - q_{n+2}(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \leq cn^{-1}$. Отсюда следует, что, во-первых, $f(\pm 1) = q_{n+2}(\pm 1)$ и, во-вторых, $\frac{|f(x) - q_{n+2}(x)|}{\sqrt{1-x^2 + \frac{1}{n+2}}} \leq \frac{c}{n}$. Сопоставляя эту оценку с равенствами (4.8) и (4.9), мы замечаем, что $E_{n+2}^1(f, N) \leq \mathcal{E}_{n+2}^1(f, N) \leq cn^{-1}$. Отсюда и из теоремы 5.2 находим ($1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $-1 \leq x \leq 1$)

$$\begin{aligned} Z_{n,N}(f, x) &= \frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2,N}(f, x)|}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2}\right)^{1/2}} \\ &\leq \frac{c(a)}{n} \left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1)\right). \end{aligned}$$

Обозначим через W^r класс r раз непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций $f(x)$, для которых $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(r)}(x)| \leq 1$ и положим $W = W^1$. Тогда для $2 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $N = 3, 4, \dots$ из последнего неравенства имеем

$$R_{n,N} = \sup_{f \in W} \max_{-1 \leq x \leq 1} Z_{n,N}(f, x) \leq \frac{c(a) \ln n}{n}, \quad (0.16)$$

$$\mathcal{R}_{n,N} = \sup_{f \in W} \max_{x \in H_\Lambda} Z_{n,N}(f, x) \leq \frac{c(a) \ln n}{n}.$$

Можно доказать, что эти оценки являются окончательными по порядку в том смысле, что величину $\frac{\ln n}{n}$, фигурирующую в правых частях этих оценок, нельзя заменить существенно меньшей величиной $Q_n = o(\frac{\ln n}{n})$. Рассмотрим, например, оценку (0.16). Из справедливости неравенства $R_{n,N} \leq c(a)Q_n$ следует, что

$$R_{n,N}(\varepsilon) = \sup_{f \in W} \max_{-1+\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon} \frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2,N}(f, x)|}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2}\right)^{1/2}} \leq c(a)Q_n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим

$$R_n(\varepsilon) = \sup_{f \in W} \max_{-1+\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon} \frac{|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2}(f, x)|}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2}\right)^{1/2}} \leq c(a)Q_n, \quad (0.17)$$

где $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$. Чтобы получить явное выражение для предельного полинома $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ мы обратимся к равенству (4.5) и асимптотической формуле (1.20), из которых нетрудно увидеть, что

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = D_{2r-1}(f, x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x),$$

где

$$f_{r,k} = \frac{1}{2k+1} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) P_k^{0,0}(t) dt,$$

$D_{2r-1}(f, x)$ – интерполяционный полином Эрмита степени $2r-1$, удовлетворяющий условиям $D_{2r-1}^{(\nu)}(f, \pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1)$, $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ для функций $f \in W^r$ были исследованы в работе [28], в которой, в частности, доказано, что

$$U_n^r(\varepsilon) = \sup_{f \in W^r} \max_{-1+\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon} \frac{|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)|}{(\sqrt{1-x^2})^{r-1/2}} \geq \frac{c(r) \ln n}{n^r}, \quad (0.18)$$

где $c(r) > 0$. Поскольку $R_n(\varepsilon) \asymp U_n^1(\varepsilon)$, то, сопоставляя (0.17) и (0.18), мы приходим к противоречию, если допустим, что $Q_n = o(\frac{\ln n}{n})$. Стало быть, оценка (0.16) в смысле порядка является окончательной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $f \in W^r$, то для $0 \leq \nu \leq r-1$ имеет место равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\nu} \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2,N}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2}^{(\nu)}(f, x)$. Используя этот факт и результаты, полученные в работе [28] (а именно, теорему 4.2 и равенство (3.10) из [28]), можно показать, что оценки, установленные в теореме 5.3 также носят окончательный характер для всего класса функций $f \in W^r$ (но не для каждой индивидуальной функции $f \in W^r$).

1. Некоторые сведения о полиномах Чебышева, ортогональных на равномерной сетке

Пусть N – натуральное, α, β – произвольные числа. Положим

$$\rho(x) = \rho(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(x + \beta + 1) \Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1) \Gamma(N - x)}, \quad (1.1)$$

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(-1)^n}{n! (N-1)^{[n]} \rho(x)} \Delta^n \left\{ \rho(x) (x - N - \alpha)^{[n]} x^{[n]} \right\}, \quad (1.2)$$

где $\Delta^n f(x)$ – конечная разность n -го порядка функции $f(x)$ в точке x , т.е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta \Delta^{n-1} f(x)$ ($n \geq 1$), $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a(a-1) \cdots (a-k+1)$ при $k \geq 1$. Для каждого $0 \leq n \leq N-1$ равенство (1.2) определяет [16] алгебраический полином степени n , для которого

$$T_n^{\alpha, \beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad T_n^{\alpha, \beta}(0, N) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ можно найти, например, в монографии [24]. Прежде всего отметим, что полиномы $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ допускают следующее явное представление

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{[k]} (n + \alpha + \beta + 1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k + \beta + 1) k! (N-1)^{[k]}}. \quad (1.3)$$

Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы $T_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$) образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (1.1)) систему на множестве $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, точнее

$$\sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha, \beta}(x, N) T_m^{\alpha, \beta}(x, N) = h_{n, N}^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (1.4)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N) 2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \rho(x) \\ &= \frac{\Gamma(N) 2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1) \Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1) \Gamma(N-x)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$h_{n, N}^{\alpha, \beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1) 2^{\alpha+\beta+1}}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1) (2n+\alpha+\beta+1)}. \quad (1.6)$$

При $n=0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$. Для $0 \leq n \leq N-1$ положим

$$\tau_n^{\alpha, \beta}(x) = \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \left\{ h_{n, N}^{\alpha, \beta} \right\}^{-1/2} T_n^{\alpha, \beta}(x, N). \quad (1.7)$$

Очевидно, если $0 \leq n, m \leq N-1$, то

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x) \tau_n^{\alpha, \beta}(x, N) \tau_m^{\alpha, \beta}(x, N) = \delta_{nm}. \quad (1.8)$$

Другими словами, многочлены $\tau_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$) образуют ортонормированную с весом $\mu(x)$ систему на Ω_N .

Формула Кристоффеля – Дарбу для многочленов Чебышева имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n, N}^{\alpha, \beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \tau_k^{\alpha, \beta}(x) \tau_k^{\alpha, \beta}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{T_k^{\alpha, \beta}(x) T_k^{\alpha, \beta}(y)}{h_{k, N}^{\alpha, \beta}} = \\ &= \frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2) \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)} \times \\ &\quad \frac{T_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) T_n^{\alpha, \beta}(y) - T_n^{\alpha, \beta}(x) T_{n+1}^{\alpha, \beta}(y)}{x-y}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Поскольку $\Delta a^{[k]} = k a^{[k-1]}$, то из (1.3) находим

$$\begin{aligned} (n+1) T_{n+1}^{\alpha, \beta}(x, N) + (n+\beta+1) T_n^{\alpha, \beta}(x, N) \\ = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1} x T_n^{\alpha, \beta+1}(x-1, N-1). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из равенства $\mu(N-1-x; \beta, \alpha, N) = \mu(x; \alpha, \beta, N)$, непосредственно вытекающего из соотношения ортогональности (1.4) следует, что при $\alpha, \beta > -1$

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = (-1)^n T_n^{\beta, \alpha}(N-1-x, N). \quad (1.11)$$

Поскольку обе части этого равенства аналитичны относительно α и β , то оно справедливо для произвольных α и β . Из (1.10) и (1.11) имеем также следующее равенство

$$\begin{aligned} & (n + \alpha + 1)T_n^{\alpha, \beta}(x, N) - (n + 1)T_{n+1}^{\alpha, \beta}(x, N) \\ &= \frac{2n + \alpha + \beta + 2}{N - 1}(N - 1 - x)T_n^{\alpha+1, \beta}(x, N - 1). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Непосредственно из явной формулы (1.3) мы можем вывести следующее полезное равенство

$$\Delta^m T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_m}{(N - 1)_{[m]}} T_{n-m}^{\alpha+m, \beta+m}(x, N - m), \quad (1.13)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a + 1) \cdots (a + k - 1)$ при $k \geq 1$. Если β такое целое число, что $-n \leq \beta \leq -1$, то из (1.13) выводим также

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(n + \beta)!}{n!} \frac{(n + \alpha)^{[-\beta]} x^{[-\beta]}}{(N - 1)^{[-\beta]}} T_{n+\beta}^{\alpha, -\beta}(x + \beta, N + \beta), \quad (1.14)$$

а если α и β — целые, $-n \leq \beta \leq -1$, $-(n + \beta) \leq \alpha \leq -1$, $N \geq 2$, то

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]} (N - x - 1)^{[-\alpha]}}{(N - 1)^{[-\beta]} (N - 1 + \beta)^{[-\alpha]}} T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha, -\beta}(x + \beta, N + \alpha + \beta). \quad (1.15)$$

Разностная формула Родрига (1.1) допускает следующее обобщение

$$\begin{aligned} & \rho(x + m; \alpha, \beta, N + m) T_n^{\alpha, \beta}(x + m, N + m) = \\ & \frac{(-1)^m}{n_{[m]}(N)_m} \Delta^m \left\{ \rho(x; \alpha + m, \beta + m, N) T_{n-m}^{\alpha+m, \beta+m}(x, N) \right\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

которое, впрочем, непосредственно вытекает из (1.1). Заменяя здесь m на ν , α и β на $m - \nu$, n на $k + \nu - m$, мы можем также записать

$$\begin{aligned} & \Delta^\nu \{ (x + 1)_m (N - x)_m T_{k-m}^{m, m}(x, N) \} = \\ & (-1)^\nu (k + \nu - m)^{[\nu]} (N + \nu - 1)^{[\nu]} (x + 1 + \nu)_{m-\nu} (N - x)_{m-\nu} T_{k+\nu-m}^{m-\nu, m-\nu}(x + \nu, N + \nu). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Если в равенстве (1.16) мы заменим α , β и n , соответственно, на $\alpha - m$, $\beta - m$ и $k + m$, то придем к формуле

$$\Delta^m T_{k+m}^{\alpha-m, \beta-m}(x, N) = \frac{(k + \alpha + \beta)^{[m]}}{(N - 1)_{[m]}} T_k^{\alpha, \beta}(x, N - m). \quad (1.18)$$

Мы введем здесь двухиндексные полиномы Чебышева $T_{k, M}^{\alpha, \beta}(x)$ и $\hat{T}_{k, M}^{\alpha, \beta}(x)$ с помощью следующих равенств ($0 \leq k \leq M - 1$):

$$T_{k, M}^{\alpha, \beta}(x) = T_k^{\alpha, \beta} \left(\frac{M - 1}{2} (1 + x), M \right), \quad \hat{T}_{k, M}^{\alpha, \beta}(x) = \tau_k^{\alpha, \beta} \left(\frac{M - 1}{2} (1 + x), M \right). \quad (1.19)$$

В случае целых α и β в [22, 23, 24] установлен следующий результат. Пусть $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ – полином Якоби, для которого $P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$, $a > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$T_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = P_n^{\alpha,\beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t), \quad (1.20)$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой при $1 \leq n \leq aN^{1/2}$, $\delta > 0$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)| \leq c \sqrt{\frac{n}{N}} \left[|1-t|^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left[|1+t|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right]^{-\beta-\frac{1}{2}}, \quad (1.21)$$

где $c = c(\alpha, \beta, a, \delta)$, $-1 - \delta/n^2 \leq t \leq 1 + \delta/n^2$.

Далее, пусть j_1, j_2 – фиксированные целые числа, α, β – неотрицательные целые числа, $1 \leq n \leq aN^{\frac{1}{2}}$ ($a > 0$), $\delta \geq 0$, $|\tau| \leq \delta$, $-1 \leq t \leq 1$. Тогда из (1.20) и (1.21) с учетом известных весовых оценок для полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ непосредственно выводится следующая оценка:

$$\left| T_n^{\alpha,\beta} \left[\frac{N+j_1}{2}(1+t) + \tau, N+j_2 \right] \right| \leq cn^{-\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left[(1+t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right]^{-\beta-\frac{1}{2}}, \quad (1.22)$$

где $c = c(a, \alpha, \beta, j_1, j_2, \delta)$.

2. Некоторые специальные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке

При конструировании операторов $\mathcal{X}_{n,N}(f) = \mathcal{X}_{n,N}(f, x)$, действующих в пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f = f(x)$, использующих в качестве исходной информации значения $f(x_j)$ ($0 \leq j \leq N-1$), нам понадобятся некоторые специальные ряды по полиномам Чебышева $\tau_k^{r,r}(t, N)$ ($0 \leq k \leq N-1$), ортогональным на равномерной сетке $\{0, \dots, N-1\}$.

Пусть r и N – натуральные числа. Рассмотрим дискретную функцию $d(t)$, заданную на сетке $\tilde{\Omega}_{N+2r} = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$. Через $\mathcal{D}_{2r-1,N}(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t)$ обозначим интерполяционный полином Лагранжа степени $2r-1$, совпадающий с функцией $d(t)$ в точках множества $\{-r, -r+1, \dots, -1, N, \dots, N-1+r\}$. Стало быть,

$$\mathcal{D}_{2r-1,N}(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \frac{(t+1)_r (N-t)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r} \left[\frac{d(-i)}{t+i} + \frac{d(N-1+i)}{N-1+i-t} \right]. \quad (2.1)$$

Далее рассмотрим новую дискретную функцию

$$g(t) = \frac{d(t) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t)}{\mu(t; r, r, N)}, \quad (2.2)$$

где $\mu(t; r, r, N)$ – весовая функция, определенная равенством (1.5), которое для $\alpha = \beta = r$ принимает следующий вид

$$\mu(t; r, r, N) = \frac{2^{2r+1}(t+1)_r(N-t)_r}{N(N+r)^{[r]}(N+2r)^{[r]}}. \quad (2.3)$$

Дискретная функция $g(t)$ определена на сетке Ω_N и, следовательно, ее можно разложить в конечный ряд Фурье по системе полиномов Чебышева $\tau_k^{r,r}(t, N)$ ($0 \leq k \leq N-1$), ортогональной на Ω_N с весом $\mu(t; r, r, N)$, а именно, имеет место равенство

$$g(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \tau_k^{r,r}(t, N), \quad (2.4)$$

где g_k ($0 \leq k \leq N-1$) – коэффициенты Фурье функции $g(t)$ по системе $\tau_k^{r,r}(t, N)$ ($0 \leq k \leq N-1$). В силу (2.2) мы можем записать

$$g_k = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(j; r, r, N) \tau_k^{r,r}(j, N) g(j) = \sum_{j \in \Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1, N}(d, j)] \tau_k^{r,r}(j, N) = \hat{d}_{r, k}. \quad (2.5)$$

Из (2.2) – (2.5) имеем

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1, N}(d, t) + \mu(t; r, r, N) \sum_{k=0}^{N-1} \hat{d}_{r, k} \tau_k^{r,r}(t, N). \quad (2.6)$$

Правую часть равенства (2.6) будем называть *специальным или смешанным* рядом по полиномам Чебышева $\tau_k^{r,r}(t, N)$ ($0 \leq k \leq N-1$).

Для дальнейшего преобразуем правую часть равенства (2.6). Положим

$$F(t) = d(t-r), \quad t \in \Omega_{N+2r}, \quad (2.7)$$

$$b(t) = b(t; r, N) = \Delta^r F(t), \quad (2.8)$$

$$d_{r, k} = d_{r, k}(N+r) = \frac{2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{t \in \Omega_{N+r}} b(t) T_k^{0,0}(t, N+r). \quad (2.9)$$

Тогда смешанный ряд (2.6) функции $d = d(t)$ принимает следующий вид

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1, N}(d, t) + \mathcal{F}_{r, N}(d, t), \quad (2.10)$$

$$\mathcal{F}_{r, N}(d, t) = \frac{(-1)^r(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r, k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r, r}(t, N). \quad (2.11)$$

В самом деле, используя ортогональность при $k \geq r$ полинома $T_k^{0,0}(j, N+r)$ к полиному $\mathcal{D}_{2r-1, N}(d, j-r)$, из (2.8) – (2.10) имеем

$$d_{r, k} = \frac{2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{j \in \Omega_{N+r}} T_k^{0,0}(j, N+r) \Delta^r d(j-r) =$$

$$\frac{2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{j \in \Omega_{N+r}} T_k^{0,0}(j, N+r) \Delta^r [d(j-r) - \mathcal{D}_{2r-1, N}(d, j-r)].$$

Отсюда, воспользовавшись преобразованием Абеля r раз и учитывая равенство (1.15), находим

$$d_{r,k} = \frac{(-1)^r 2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j \in \Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)] \Delta^r T_k^{0,0}(j, N+r) =$$

$$\frac{(-1)^r 2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \frac{(k+1)_r}{(N+r-1)^{[r]}} \sum_{j \in \Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)] T_{k-r}^{r,r}(j, N),$$

откуда, полагая

$$\bar{d}_{r,k} = \frac{2}{(N+r)} \sum_{j \in \Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)] T_k^{r,r}(j, N),$$

получаем

$$\frac{d_{r,k+r}}{(k+r)^{[r]}} = \frac{(-1)^r \bar{d}_{r,k}}{h_{k+r,N+r}^{0,0}} \frac{(k+r+1)_r}{(k+r)^{[r]}(N+r-1)^{[r]}} =$$

$$\frac{(-1)^r \bar{d}_{r,k} (N+r-1)^{[k+r]}}{(N+2r+k)^{[k+r]}} \frac{(k+r+1)_r}{(k+r)^{[r]}(N+r-1)^{[r]}} \frac{2k+2r+1}{2} =$$

$$\frac{(-1)^r \bar{d}_{r,k} (N+r-1)^{[r]}}{(N+2r)^{[r]}} \frac{(N-1)^{[k]}}{(N+2r+k)^{[k]}} \frac{2^{2r}}{(N+r-1)^{[r]}} \frac{k!(k+2r)!}{(k+r)!^2} \frac{2k+2r+1}{2^{2r+1}} =$$

$$\bar{d}_{r,k} \frac{(-1)^r 2^{2r}}{(N+2r)^{[r]}} \frac{1}{h_{k,N}^{r,r}}.$$

С учетом этого равенства выводим

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \frac{2^{2r}(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}(N+2r)^{[r]}} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{d}_{r,k} \frac{T_k^{r,r}(t, N)}{h_{k,N}^{r,r}}.$$

Далее заметим, что

$$\frac{\bar{d}_{r,k}}{(h_{k,N}^{r,r})^{\frac{1}{2}}} = \hat{d}_{r,k} = \sum_{j \in \Omega_N} [d(j) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,j)] \tau_k^{r,r}(j, N), \quad (2.12)$$

поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \frac{2^{2r+1}(t+1)_r(N-t)_r}{N(N+r)^{[r]}(N+2r)^{[r]}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{d}_{r,k} \tau_k^{r,r}(t, N) =$$

$$\mathcal{D}_{2r-1,N}(d,t) + \mu(t; r, r, N) \sum_{k=0}^{N-1} \hat{d}_{r,k} \tau_k^{r,r}(t, N), \quad (2.13)$$

$t \in \bar{\Omega}_{N+2r} = \{-r, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$. Сопоставляя (2.13) с (2.6), убеждаемся, что правые части равенств (2.6) и (2.10) совпадают.

Рассмотрим некоторые разностные свойства ряда (2.10), которые нам понадобятся в дальнейшем. Применим равенства (2.10) и (2.11) к функции $\partial(t) =$

$\Delta^\nu d(t-\nu)$, заданной на $\bar{\Omega}_{N+\nu+2(r-\nu)} = \{-r+\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$. Это дает

$$\partial(t) = \Delta^\nu d(t-\nu) = \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(\partial, t) + \mathcal{F}_{r-\nu, N+\nu}(\partial, x), \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(\partial, t) = \\ & \sum_{i=1}^{r-\nu} \frac{(-1)^{i-1}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(i-1)!(r-\nu-i)!(N+\nu+i)_{r-\nu}} \left[\frac{\partial(-i)}{t+i} + \frac{\partial(N+\nu-1+i)}{N+\nu-1+i-t} \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{r-\nu, N+\nu}(\partial, t) = \\ & \frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{N-1+r} \frac{\partial_{r-\nu, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(x, N+\nu), \end{aligned} \quad (2.16)$$

С другой стороны заметим, что

$$\begin{aligned} \partial_{r-\nu, k} &= \frac{2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{t=0}^{N+r-1} \Delta^{r-\nu} \partial(t-r+\nu) T_k^{0,0}(t, N+r) = \\ & \frac{2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{t=0}^{N+r-1} \Delta^r d(t-r) T_k^{0,0}(t, N+r) = d_{r, k}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

поэтому (2.16) можно переписать еще так

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{r-\nu, N+\nu}(\partial, t) = \\ & \frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{N-1+r} \frac{d_{r, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu). \end{aligned}$$

Равенство (2.14) в развернутом виде принимает теперь следующий вид

$$\begin{aligned} & \partial(t) = \Delta^\nu d(t-\nu) = \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(\partial, t) + \\ & (-1)^{r-\nu} \frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{N-1+r} \frac{\partial_{r-\nu, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu) = \\ & \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(\partial, t) + \\ & (-1)^{r-\nu} \frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{N-1+r} \frac{d_{r, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Далее, взяв конечные разности порядка ν от обеих частей равенства (2.10) и учитывая (1.19), имеем

$$\begin{aligned} & \partial(t) = \Delta^\nu d(t-\nu) = \Delta^\nu \mathcal{D}_{2r-1, N}(d, t-\nu) + \\ & (-1)^{r-\nu} \frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{d_{r, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Сопоставляя (2.18) с (2.19), мы замечаем, что

$$\Delta^\nu \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t - \nu) = \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(\partial, t) + \frac{(-1)^{r-\nu} (t+1)_{r-\nu} (N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{r-1} \frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu). \quad (2.20)$$

3. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$

Рассмотрим частичную сумму ряда (2.6) вида

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) + \mu(t; r, r, N) \sum_{k=0}^n \hat{d}_{r,k} \tau_k^{r,r}(t, N). \quad (3.1)$$

Нетрудно увидеть, что если $d = d(t)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$, то $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) \equiv d(t)$, т.е. $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$ является проектором на пространство алгебраических полиномов степени $n+2r$. В самом деле, если $d = d(t)$ – алгебраический полином степени $n+2r$, то функция $g(t)$, определенная равенством (2.2), представляет собой алгебраический полином степени n , поэтому при $k > n$ $g_k = 0$ и, как следствие,

$$\frac{d(t) - \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t)}{\mu(t; r, r, N)} = \sum_{k=0}^n g_k \tau_k^{r,r}(t, N),$$

откуда и следует требуемое равенство:

$$d(t) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) + \mu(t; r, r, N) \sum_{k=0}^n g_k \tau_k^{r,r}(t, N) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t).$$

Как было показано в предыдущем разделе, смешанный ряд (2.6) может быть преобразован к виду (2.10) и, как следствие, оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, x)$ допускает также следующее представление

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, x) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(x) + \frac{(-1)^r (x+1)_r (N-x)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(x, N). \quad (3.2)$$

С другой стороны, из равенств (2.6) и (3.1) непосредственно вытекает, что полином $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, x)$ интерполирует функцию $d(x)$ в узлах множества $A = \{-r, -r+1, \dots, -1\} \cup \{N, N+1, \dots, N-1+r\}$, т.е. мы имеем

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, x) = d(x) \quad (x \in A). \quad (3.3)$$

Далее мы имеем ($x \in \bar{\Omega}_{N+2r}$)

$$d(x) - \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, x) = \frac{(-1)^r (x+1)_r (N-x)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(x, N) = \mathcal{R}_{n,N}^r(d, x). \quad (3.4)$$

Пусть $0 \leq \nu \leq r$, $-r \leq t \leq N - 1 + r - \nu$ (t – целое). Тогда мы можем взять конечные разности порядка ν от обеих частей равенства (3.4), что дает

$$\Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = \Delta^\nu \mathcal{R}_{n,N}^r(t) = \frac{(-1)^r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r]}} \Delta^\nu \{(t+1)_r (N-t)_r T_{k-r}^{r,r}(t, N)\}. \quad (3.5)$$

Если теперь воспользуемся равенством (1.17), то из (3.5) приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $0 \leq \nu \leq r$, $-r \leq t \leq N - 1 + r - \nu$ (t – целое). Тогда имеет место равенство

$$\Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = \frac{(-1)^{r-\nu} (t+1+\nu)_{r-\nu} (N-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{d_{r,k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}(t+\nu, N+\nu). \quad (3.6)$$

Рассмотрим задачу об оценке разности $|\Delta^\nu d(t-\nu) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t-\nu)|$ в терминах наилучших приближений функции $\partial(x) = \Delta^\nu d(x-\nu)$ алгебраическими полиномами в одном весовом нормированном пространстве. С этой целью заметим, что в силу (3.2), (2.17), (2.20) и (1.19) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t-\nu) &= \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(\partial, t) + \\ &= \frac{(-1)^{r-\nu} (t+1)_{r-\nu} (N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(\partial)_{r-\nu, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu) \\ &= \mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(\partial, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусть $p_m(t)$ – произвольный алгебраический полином степени $m \leq n+2r-\nu$. Тогда $\mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_m, t) \equiv p_m(t)$, поэтому мы можем записать

$$p_m(t) - \mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(\partial, t) \equiv \mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_m - \partial, t).$$

С учетом этого факта из (3.7) имеем

$$\begin{aligned} \Delta^\nu d(t-\nu) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t-\nu) &= \partial(t) - \mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(\partial, t) \\ &= \partial(t) - p_m(t) + \mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_m - \partial, t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для натуральных N , m и r положим

$$v = v(t) = v_{r,m,N}(t) = \frac{1}{N+r} \sqrt{(t+r)(N+r-1-t)} + \frac{1}{m}.$$

Через $C_v(\bar{\Omega}_{N+2(r-\nu)})$ обозначим нормированное пространство дискретных функций $b(t)$, заданных на $\bar{\Omega}_{N+2(r-\nu)}$, для которых норма определяется равенством

$$\|b\|_v = \max_{t \in \bar{\Omega}_{N+2(r-\nu)}} \frac{|b(t)|}{v^{r-\nu}(t)},$$

где $0 \leq \nu \leq r$. Обозначим через $p_{n+2r-\nu}(\partial) = p_{n+2r-\nu}(\partial)(t)$ алгебраический полином степени $n+2r-\nu$, который совпадает с функцией $\partial(t)$ в точках множества $A = \{-r+\nu, -r+\nu+1, \dots, -1, N+\nu, N+\nu+1, \dots, N+r-1\}$ и среди таких полиномов осуществляет наилучшее приближение к $\partial(t)$ в нормированном пространстве $C_v(\bar{\Omega}_{N+2(r-\nu)})$. Положим $E_{n+2r-\nu}^v(\partial) = \|\partial - p_{n+2r-\nu}(\partial)\|_v$. Тогда из (3.8) имеем

$$\begin{aligned} |\Delta^\nu d(t-\nu) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t-\nu)| &= |\partial(t) - \mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(\partial, t)| \leq \\ &|\partial(t) - p_{n+2r-\nu}(\partial)(t)| + |\mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t)| \leq \\ &v^{r-\nu}(t)E_{n+2r-\nu}^v(\partial) + |\mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t)|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

С другой стороны, в силу (3.2)

$$\mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t) = \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t) +$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial)_{r-\nu, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu).$$

Поскольку, очевидно, что $\mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t) \equiv 0$, то это равенство можно переписать так

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t) &= \\ \frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial)_{r-\nu, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} (p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial)_{r-\nu, k} &= \\ \frac{2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{t=0}^{N+r-1} \Delta^{r-\nu}[p_{n+2r-\nu}(\partial)(j-r+\nu) - \partial(j-r+\nu)] T_k^{0,0}(j, N+r). \end{aligned}$$

Применим к правой части этого равенства преобразование Абеля $r-\nu$ раз. Тогда с учетом того, что разность $p_{n+2r-\nu}(\partial)(j) - \partial(j)$ обращается в нуль во всех точках множества $A = \{-r+\nu, -r+\nu+1, \dots, -1, N+\nu, N+\nu+1, \dots, N+r-1\}$, мы находим

$$\begin{aligned} (p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial)_{r-\nu, k} &= \\ \frac{(-1)^{r-\nu}2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N+r-1} [p_{n+2r-\nu}(\partial)(j) - \partial(j)] \Delta^{r-\nu} T_k^{0,0}(j, N+r). \end{aligned}$$

Обратимся теперь к формуле (1.15), из которой находим

$$\Delta^{r-\nu} T_k^{0,0}(j, N+r) = \frac{(k+1)_{r-\nu} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}}.$$

Подставляя это выражение в правую часть предыдущего равенства, получим

$$(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial)_{r-\nu, k} =$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu} 2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N+r-1} [p_{n+2r-\nu}(\partial)(j) - \partial(j)] \frac{(k+1)_{r-\nu} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}}. \quad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) находим

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t) = \\ & \frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{2T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu)}{k^{[r-\nu]}(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \times \\ & \sum_{t=0}^{N+r-1} [p_{n+2r-\nu}(\partial)(j) - \partial(j)] \frac{(k+1)_{r-\nu} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}} = \\ & \frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N+r-1} [p_{n+2r-\nu}(\partial)(j) - \partial(j)] \times \\ & \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(k+1)_{r-\nu} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu) T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu)}{k^{[r-\nu]} \cdot (N+r)h_{k,N+r}^{0,0}}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & |\mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t)| \leq \\ & \frac{2(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{j=0}^{N+r-1} \frac{|p_{n+2r-\nu}(\partial)(j) - \partial(j)|}{v^{r-\nu}(j)} \times \\ & v^{r-\nu}(j) \left| \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(k+1)_{r-\nu} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu) T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu)}{k^{[r-\nu]} \cdot (N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \right|. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} & \lambda_{n, N, r, \nu}(t) = \frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]} v^{r-\nu-\frac{1}{2}}(t)} \times \\ & \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N+r-1} v^{r-\nu}(j) \left| \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(k+1)_{r-\nu} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu) T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu)}{k^{[r-\nu]} \cdot h_{k,N+r}^{0,0}} \right|. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Тогда неравенство (3.12) принимает следующий вид

$$\frac{|\mathcal{Y}_{n+2r-\nu, N+\nu}(p_{n+2r-\nu}(\partial) - \partial, t)|}{v^{r-\nu-\frac{1}{2}}(t)} \leq E_{n+2r-\nu}^v(\partial) \lambda_{n, N, r, \nu}(t). \quad (3.14)$$

Из (3.9) и (3.14) выводим следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $0 \leq \nu \leq r-1$, $-r+\nu \leq t \leq N-1+r$ (t — целое). Тогда имеет место неравенство

$$\frac{|\Delta^\nu d(t-\nu) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r, N}(d, t-\nu)|}{v^{r-\nu-\frac{1}{2}}(t)} \leq E_{n+2r-\nu}^v(\partial) \left(v^{\frac{1}{2}}(t) + \lambda_{n, N, r, \nu}(t) \right). \quad (3.15)$$

В связи с неравенством (3.15) возникает важная задача об оценке величины $\lambda_{n, N, r, \nu}(t)$ при $-r+\nu \leq t \leq N-1+r$ (t — целое), $n, N \rightarrow \infty$. Эта задача является частным случаем более общей задачи, рассмотренной ниже в пункте 5 (см. (5.40), (5.41) и лемму 5.2).

4. Операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$

Пусть функция $f = f(x)$ определена в узлах сетки $H_\Lambda = \{x_j = -1 + \frac{2j}{\Lambda-1}\}_{j=0}^{\Lambda-1}$, где $\Lambda = N + 2r$. С помощью равенства

$$d(j-r) = f(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, N + 2r - 1) \quad (4.1)$$

мы можем на сетке $\bar{\Omega}_\Lambda = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$ определить дискретную функцию $d = d(t)$ и для нее построить оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$. Тогда

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}\left(d, \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r\right) \quad (4.2)$$

представляет собой алгебраический полином степени $n + 2r$, для которого

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j) = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq r-1, \quad N+r \leq j \leq N-1+2r. \quad (4.3)$$

В частности, если $p_m(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $m \leq n + 2r$, то из (4.2) следует, что

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(p_m, x) = p_m(x) \quad (4.4)$$

тождественно. Далее, полагая $t = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r$ и сопоставляя (4.1) с (4.2), мы можем записать

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = \mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) + \frac{(-1)^r(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{f_{r,k}^N}{k^{[r]}} T_{k-r}^{r,r}(t, N), \quad (4.5)$$

где $f_{r,k}^N = d_{r,k}$,

$$\mathcal{D}_{2r-1,N}(d, t) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \frac{(t+1)_r(N-t)_r}{(i-1)!(r-i)!(N+i)_r} \left[\frac{f(x_{r-i})}{t+i} + \frac{f(x_{N-1+r+i})}{N-1+i-t} \right].$$

Из (4.2) и теоремы (3.1) непосредственно вытекает справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $t = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r$, $h = \frac{2}{\Lambda-1}$, $0 \leq \nu \leq r$, $-r \leq t \leq N-1+r-\nu$ (t — целое). Тогда имеет место равенство

$$\Delta_h^\nu f(x) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = \frac{(-1)^{r-\nu}(t+1+\nu)_{r-\nu}(N-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{f_{r,k}^N}{k^{[r-\nu]}} T_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}(t+\nu, N+\nu), \quad (4.6)$$

где $\Delta_h^\nu g(x)$ есть ν -тая степень оператора конечной разности $\Delta_h g(x) = g(x+h) - g(x)$ с шагом h .

Через $C[-1, 1]$ обозначим, как обычно, пространство непрерывных функций, определенных на $[-1, 1]$. Мы можем рассмотреть $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$

как линейный оператор, действующий в $C[-1, 1] : f \rightarrow \mathcal{X}_{n+2r, N}(f)$. Нашей целью является изучение аппроксимативных свойств этих операторов, другими словами, требуется исследовать поведение разности $|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r, N}(f, x)|$ при определенных условиях на гладкость функции $f(x)$.

Нам понадобятся некоторые обозначения. Среди алгебраических полиномов $p_m(x)$ степени m , удовлетворяющих условию

$$f(x_j) = p_m(x_j), \quad j \in \{0, 1, \dots, r-1\} \bigcup \{N+r, \dots, N+2r-1\}, \quad (4.7)$$

через $p_m^r(f) = p_{m, N}^r(f, x)$ и $q_m^r(f) = q_{m, N}^r(f, x)$ обозначим, соответственно, полиномы, для которых

$$E_m^r(f, N) = \inf_{p_m} \max_{x \in H_\lambda} \frac{|f(x) - p_m(x)|}{(\sqrt{1-x^2} + 1/m)^r} = \max_{x \in H_\lambda} \frac{|f(x) - p_m^r(f, x)|}{(\sqrt{1-x^2} + 1/m)^r}, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{E}_m^r(f, N) = \inf_{p_m} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|f(x) - p_m(x)|}{(\sqrt{1-x^2} + 1/m)^r} = \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|f(x) - q_m^r(f, x)|}{(\sqrt{1-x^2} + 1/m)^r}. \quad (4.9)$$

Учитывая (4.4), мы имеем

$$f(x) - \mathcal{X}_{n+2r, N}(f, x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f, x) + \mathcal{X}_{n+2r, N}(p_{n+2r}^r(f) - f, x), \quad (4.10)$$

$$f(x) - \mathcal{X}_{n+2r, N}(f, x) = f(x) - q_{n+2r}^r(f, x) + \mathcal{X}_{n+2r, N}(q_{n+2r}^r(f) - f, x). \quad (4.11)$$

Сопоставляя (4.10) и (4.11) с (4.3), (4.5) и (4.6), мы замечаем, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{X}_{n+2r, N}(p_{n+2r}^r(f) - f, x) = \\ & \frac{(-1)^r (t+1)_r (N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \sum_{k=r}^{n+r} (p_{n+2r}^r(f) - f)_{r, k} \frac{T_{k-r}^{r, r}(t, N)}{k^{[r]}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где (конечная разность Δ^r берется по переменной j)

$$(p_{n+2r}^r(f) - f)_{r, k} = \frac{2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N+r-1} T_k^{0,0}(j, N+r) \Delta^r (p_{n+2r}^r(f, x_j) - f(x_j)).$$

Отсюда, после r кратного преобразования Абеля, учитывая равенства (4.7), находим

$$(p_{n+2r}^r(f) - f)_{r, k} = \frac{(-1)^r 2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r T_k^{0,0}(j, N+r) (p_{n+2r}^r(f, x_{j+r}) - f(x_{j+r})).$$

Воспользуемся теперь формулой (1.15). Тогда последнее равенство приобретет следующий вид

$$\begin{aligned} & (p_{n+2r}^r(f) - f)_{r, k} = \\ & \frac{(-1)^r 2}{(N+r)h_{k, N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(k+1)_r T_{k-r}^{r, r}(j, N)}{(N+r-1)^{[r]}} (p_{n+2r}^r(f, x_{j+r}) - f(x_{j+r})). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (4.12), мы получаем

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(p_{n+2r}^r(f) - f, x) = \frac{(t+1)_r(N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]}} \frac{2}{N+r} \times$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} (p_{n+2r}^r(f, x_{j+r}) - f(x_{j+r})) \sum_{k=0}^n \frac{(k+r+1)_r T_k^{r,r}(j, N) T_k^{r,r}(t, N)}{(k+r)^{[r]}(N+r-1)^{[r]} h_{k+r, N+r}^{0,0}}.$$

С другой стороны, учитывая (1.6), заметим, что

$$(N+r)(N+r-1)^{[r]} h_{k+r, N+r}^{0,0} \frac{(N+r-1)^{[r]}(k+r)^{[r]}}{(k+r+1)_r} =$$

$$(N+r)(N+r-1)^{[r]} \frac{(N+k+2r)^{[k+r]}}{(N+r-1)^{[k+r]}} \frac{2}{2k+2r+1} \frac{(N+r-1)^{[r]}(k+r)^{[r]}}{(k+r+1)_r} =$$

$$N \frac{(N+2r)^{[2r]}}{2^{2r}} h_{k,N}^{r,r},$$

поэтому, принимая во внимание (1.15), предыдущее выражение принимает окончательно следующий вид

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(p_{n+2r}^r(f) - f, x) =$$

$$\frac{(t+1)_r(N-t)_r 2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}} \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (p_{n+2r}^r(f, x_{j+r}) - f(x_{j+r})) \sum_{k=0}^n \frac{T_k^{r,r}(j, N) T_k^{r,r}(t, N)}{h_{k,N}^{r,r}}$$

$$= \frac{(t+1)_r(N-t)_r 2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}} \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (p_{n+2r}^r(f, x_{j+r}) - f(x_{j+r})) \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t). \quad (4.13)$$

Совершенно аналогично мы выводим

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(q_{n+2r}^r(f) - f, x) =$$

$$\frac{(t+1)_r(N-t)_r 2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}} \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (q_{n+2r}^r(f, x_{j+r}) - f(x_{j+r})) \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t). \quad (4.14)$$

Если мы примем во внимание (4.8) и (4.9), то из (4.13) и (4.14) можем вывести следующие оценки:

$$|\mathcal{X}_{n+2r,N}(p_{n+2r}^r(f) - f, x)| \leq E_{n+2r}^r(f, N) \frac{|(t+1)_r(N-t)_r| 2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}} I_{n,N}^r(x), \quad (4.15)$$

$$|\mathcal{X}_{n+2r,N}(q_{n+2r}^r(f) - f, x)| \leq \mathcal{E}_{n+2r}^r(f, N) \frac{|(t+1)_r(N-t)_r| 2^{2r}}{(N+2r)^{[2r]}} I_{n,N}^r(x), \quad (4.16)$$

где

$$I_{n,N}^r(x) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sqrt{1 - x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|, \quad (4.17)$$

причем в неравенстве (4.15) $x \in H_\Lambda$. Отсюда, с учетом (4.8) и (4.9) мы выводим следующие неравенства типа Лебега

$$\frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)|}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r})^{r-\frac{1}{2}}} \leq E_{n+2r}^r(f, N) \left(\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^{\frac{1}{2}} + L_{n,N}^r(x) \right) \quad (x \in H_\Lambda), \quad (4.18)$$

$$\frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)|}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r})^{r-\frac{1}{2}}} \leq \mathcal{E}_{n+2r}^r(f, N) \left(\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^{\frac{1}{2}} + L_{n,N}^r(x) \right) \quad (x \in [-1, 1]), \quad (4.19)$$

в которых фигурирует функция Лебега $L_{n,N}^r(x)$, определенная равенством

$$L_{n,N}^r(x) = \frac{I_{n,N}^r(x) |(t+1)_r (N-t)_r| 2^{2r}}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r})^{r-\frac{1}{2}} (N+2r)^{[2r]}}. \quad (4.20)$$

Неравенства (4.18) и (4.19) сводят задачу об оценке разности $|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)|$ к исследованию поведения функции Лебега $L_{n,N}^r(x)$ для полинома $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ при $n, N \rightarrow \infty$. Из (4.20) видно, что для этой цели нам необходимо оценить величину $I_{n,N}^r(x)$, определенную равенством (4.17). Эта задача впервые была рассмотрена в работе [29]. В следующем пункте мы приводим с полным доказательством основной результат, анонсированный в [29] без доказательства.

5. Оценки для функции Лебега полинома $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$

Ввиду равенства (4.20) задача об оценке сверху функции Лебега $L_{n,N}^r(x)$ сводится к аналогичной задаче для величины $I_{n,N}^r(x)$ при $x \in [-1, 1]$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $r \geq 1$, $a > 0$, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда имеет место оценка

$$I_{n,N}^r(x) \leq \frac{c(r, a)}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})^{r+\frac{1}{2}}} \left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.17) и (1.11) имеем $I_{n,N}^r(x) = I_{n,N}^r(-x)$, поэтому достаточно рассмотреть случай $0 \leq x \leq 1$. Сумму (4.17), определяющую $I_{n,N}^r(x)$, разобьем на две по схеме:

$$I_{n,N}^r(x) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sqrt{1-x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right| =$$

$$\frac{2}{N} \sum_{x_r \leq x_{j+r} \leq -1/2} \left(\sqrt{1-x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right| +$$

$$\frac{2}{N} \sum_{-1/2 < x_{j+r} \leq x_{N-1+r}} \left(\sqrt{1 - x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|.$$

Отсюда, полагая $x_j = \cos \theta_j$, $\varphi = \arccos x$, имеем

$$I_{n,N}^r(x) = \sum_{k=1}^4 J_k, \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{2}{N} \sum_{x_r \leq x_{j+r} \leq -1/2} \left(\sqrt{1 - x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|, \\ J_2 &= \frac{2}{N} \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|, \\ J_3 &= \frac{2}{N} \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|, \\ J_4 &= \frac{2}{N} \sum_{\arccos x_{N-1+r} \leq \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|, \end{aligned}$$

причем если окажется, что $\varphi \leq 1/n$, то $J_4 = 0$, а вместо $\varphi - 1/n$ в J_3 следует взять $\arccos x_{N-1+r}$. Перейдем к оценкам величин J_k , для чего предварительно заметим, что при $\Lambda = N - 1 + 2r$, $\alpha = \beta = r$ и $n \leq a\sqrt{N}$

$$\lambda_n = \frac{(N-1)^{[n+1]}}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \asymp nN. \quad (5.2)$$

Далее, введем следующие обозначения

$$\hat{T}_n^r(u) = \hat{T}_{n,N}^r(u) = T_n^{r,r} \left(\frac{\Lambda-1}{2}(1+u), N \right) \quad (0 \leq n \leq N-1), \quad (5.3)$$

$$\tilde{T}_n^r(u) = \tilde{T}_{n,N}^r(u) = T_n^{r+1,r} \left(\frac{\Lambda-1}{2}(1+u), N-1 \right) \quad (0 \leq n \leq N-2) \quad (5.4)$$

и рассмотрим ядро $\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t)$. Формула Кристоффеля – Дарбу (1.9) с учетом введенных здесь обозначений приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) &= \lambda_n \frac{T_{n+1}^{r,r}(j)T_n^{r,r}(t) - T_n^{r,r}(j)T_{n+1}^{r,r}(t)}{j-t} = \\ &= \frac{2\lambda_n}{\Lambda-1} \frac{\hat{T}_{n+1}^r(x_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1})\hat{T}_n^r(x - \frac{2r}{\Lambda-1}) - \hat{T}_n^r(x_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1})\hat{T}_{n+1}^r(x - \frac{2r}{\Lambda-1})}{x_{j+r} - x}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Поэтому для J_1 мы получаем

$$J_1 \leq \frac{4\lambda_n}{N(\Lambda-1)} \left| \hat{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| \times$$

$$\sum_{x_r \leq x_{j+r} \leq -1/2} \left(\sqrt{1-x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \hat{T}_{n+1}^r \left(x_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| +$$

$$\frac{4\lambda_n}{N(\Lambda-1)} \left| \hat{T}_{n+1}^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| \times$$

$$\sum_{x_r \leq x_{j+r} \leq -1/2} \left(\sqrt{1-x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \hat{T}_n^r \left(x_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right|.$$

Отсюда, имея ввиду (1.22) и (5.3), выводим

$$J_1 \leq c(r, a) \frac{\sqrt{n}}{\Lambda-1} \left[\left| \hat{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| + \left| \hat{T}_{n+1}^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| \right] \times$$

$$\sum_{x_r \leq x_{j+r} \leq -1/2} \left(\sqrt{1-x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^{-\frac{1}{2}} \leq$$

$$c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \left[\frac{\sqrt{n+2r}}{\Lambda-1} + \int_{x_r}^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^{-\frac{1}{2}} dt \right] \leq$$

$$c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r-\frac{1}{2}}. \quad (5.6)$$

Оценим J_3 при $\varphi > 1/n$. С этой целью снова обратимся к формуле (1.9) (первое равенство), которую перепишем так

$$\mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) = \sum_{k=0}^n \frac{T_k^{r,r}(j) T_k^{r,r}(t)}{h_{k,N}^{r,r}} = \sum_{k=0}^n \frac{\hat{T}_k^r(x_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1}) \hat{T}_k^r(x - \frac{2r}{\Lambda-1})}{h_{k,N}^{r,r}}, \quad (5.7)$$

где при $1 \leq k \leq n \leq a\sqrt{N}$

$$h_{k,N}^{r,r} \asymp 1/k. \quad (5.8)$$

Поэтому, пользуясь весовой оценкой (1.22), находим

$$J_3 \leq \frac{2}{N} \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \times$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{h_{k,N}^{r,r}} \left| \hat{T}_k^r \left(\cos \varphi - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \hat{T}_k^r \left(\cos \theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| \leq$$

$$\frac{c(r, a)}{N} \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \times$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{k+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \left(\sin \varphi + \frac{1}{k+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{c(r, a)}{N} \sum_{k=0}^n \left(\sin \varphi + \frac{1}{k+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{k+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \leq \\
& c(r, a) \sum_{k=0}^n \left(\sin \varphi + \frac{1}{k+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\
& \frac{2}{\Lambda-1} \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{k+1} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Далее, так как $\arccos \tau = \tau(1-\tau^2)^{1/2} + 2 \int_{\tau}^1 (1-y^2)^{1/2} dy$, то ($1 \leq j \leq \Lambda-2$)

$$\begin{aligned}
& \theta_{j-1} - \theta_j = \arccos x_{j-1} - \arccos x_j \leq \frac{1}{\sqrt{\Lambda-2}}, \\
& \frac{\theta_{j-1}}{\theta_j} = 1 + \frac{\theta_{j-1} - \theta_j}{\theta_j} \leq 1 + \frac{1}{(\Lambda-1)^{1/2} \arccos x_{\Lambda-2}} < 2, \\
& \frac{2}{\Lambda-1} = x_j - x_{j-1} = \cos \theta_j - \cos \theta_{j-1} = 2 \sin \frac{\theta_{j-1} - \theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2} \leq \\
& \frac{1}{2} (\theta_{j-1}^2 - \theta_j^2) \leq (\theta_{j-1} - \theta_j) \theta_{j-1} \leq 2(\theta_{j-1} - \theta_j) \theta_j. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Из (5.9) и (5.10) имеем

$$\begin{aligned}
& J_3 \leq c(r, a) \sum_{k=0}^n \left(\sin \varphi + \frac{1}{k+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\
& \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{k+1} \right)^{-\frac{1}{2}} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \theta_{j+r} \leq \\
& c(r, a) \sum_{k=0}^n \left(\sin \varphi + \frac{1}{k+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\
& \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{k+1} \right)^{-\frac{1}{2}} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \sin \theta_{j+r} \leq \\
& c(r, a) n \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\
& \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+1} \right) \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+1} \right)^{-\frac{1}{2}} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \leq \\
& c(r, a) n \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\
& \sum_{\varphi - \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c(r, a) n \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\
& \left[\int_{\varphi-\frac{1}{n}}^{\varphi+\frac{1}{n}} \left(\theta + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta + \left(\sin \theta_{j_0+r} + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta_{j_0+r-1} - \theta_{j_0+r}) \right] \leq \\
& c(r, a) \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \left(\varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(r, a) \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r}, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

где θ_{j_0+r} – ближайший слева к $\varphi + \frac{1}{n}$ из узлов θ_{j+r} . Для дальнейшего отметим также, что если $\varphi \leq 1/n$, то

$$\begin{aligned}
& J_3 \leq c(r, a) n \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\
& \sum_{\arccos x_{N-1+r} \leq \theta_{j+r} \leq \varphi + \frac{1}{n}} \left(\theta_{j+r} + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \leq \\
& c(r, a) n \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\
& \left[\int_0^{\varphi+\frac{1}{n}} \left(\theta + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta + \left(\sin \theta_{j_0+r} + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta_{j_0+r-1} - \theta_{j_0+r}) \right] \leq \\
& c(r, a) \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \left(\varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(r, a) \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Перейдем к оценке J_2 при $\varphi > 1/n$. С этой целью преобразуем числитель в правой части формулы (5.5) с помощью равенства (1.12) следующим образом. Имеем

$$T_{n+1}^{r,r}(v, N) = \left(1 + \frac{r}{n+1} \right) T_n^{r,r}(v, N) - \left(1 + \frac{r}{n+1} \right) \left(2 - \frac{2v}{N-1} \right) T_n^{r+1,r}(v, N-1),$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
& T_{n+1}^{r,r}(j, N) T_n^{r,r}(t, N) - T_n^{r,r}(j, N) T_{n+1}^{r,r}(t, N) = \\
& \left(1 + \frac{r}{n+1} \right) \left[\left(2 - \frac{2t}{N-1} \right) T_n^{r+1,r}(t, N-1) T_n^{r,r}(j, N) - \right. \\
& \left. \left(2 - \frac{2j}{N-1} \right) T_n^{r+1,r}(j, N-1) T_n^{r,r}(t, N) \right] = \\
& \left(1 + \frac{r}{n+1} \right) \left\{ \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) x \right] \tilde{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{N-1} \right) \hat{T}_n^r \left(x_{j+r} - \frac{2r}{N-1} \right) - \right. \\
& \left. \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) x_{j+r} \right] \tilde{T}_n^r \left(x_{j+r} - \frac{2r}{N-1} \right) \hat{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{N-1} \right) \right\}. \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Из (5.1) и (5.13) находим

$$J_2 = \frac{2}{N} \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right| \leq J_{21} + J_{22}, \quad (5.14)$$

где

$$J_{21} = c(r, a)n \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) x \right] \tilde{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| \times \\ \frac{2}{N} \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \frac{\hat{T}_n^r \left(\cos \theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1} \right)}{\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi} \right|, \quad (5.15)$$

$$J_{22} = c(r, a)n \left| \hat{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| \frac{2}{N} \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \times \\ \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) \cos \theta_{j+r} \right] \right| \left| \frac{\tilde{T}_n^r \left(\cos \theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1} \right)}{\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi} \right|. \quad (5.16)$$

Теперь обратимся к весовой оценке (1.22). Тогда из (5.15) и (5.16) имеем

$$J_{21} = c(r, a) \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) x \right] \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-3/2} \times \\ \frac{2}{N} \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{-r-1/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|}, \\ J_{22} \leq c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \frac{2}{N} \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \times \\ \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) \cos \theta_{j+r} \right] \right| \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{-r-3/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|},$$

но, поскольку при $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi/3]$ справедлива оценка $\cos \theta - \cos \varphi \asymp \varphi^2 - \theta^2$, то

$$J_{21} \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \times \\ \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^{-1/2} \frac{(\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r})\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}^2 - \varphi^2}.$$

Отсюда, с учетом того, что $\theta_{j+r}^2 - \varphi^2 \geq (\theta_{j+r} - \varphi)\theta_{j+r}$, $\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r} \leq \frac{1}{\sqrt{\Lambda-2}}$, имеем

$$J_{21} \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\theta_{j+r} - \varphi} = \\
& \sum_{\theta_{j_1+r} < \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\theta_{j+r} - \varphi} + \\
& \left(\sin \theta_{j_1+r} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{\theta_{j_1+r-1} - \theta_{j_1+r}}{\theta_{j_1+r} - \varphi} \leq \\
& c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \left[\int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{d\theta}{\theta - \varphi} + \right. \\
& \left. \left(\sin \theta_{j_1+r} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{\theta_{j_1+r-1} - \theta_{j_1+r}}{\theta_{j_1+r} - \varphi} \right] \leq \\
& c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \left[\int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{d\theta}{\theta - \varphi} + \right. \\
& \left. \left(\sin \varphi + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{n}{\sqrt{N-1}} \right] \leq \\
& c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \left(\int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta^{-1/2} d\theta}{\theta - \varphi} + \left(\sin \varphi + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \right) \leq \\
& c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta^{-1/2} d\theta}{\theta - \varphi} + c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r}, \quad (5.17)
\end{aligned}$$

где θ_{j_1+r} – ближайшая к $\varphi + \frac{1}{n}$ справа из узлов θ_{j+r} . Аналогично, из (5.16) находим

$$\begin{aligned}
J_{22} & \leq c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \times \\
& \sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) \cos \theta_{j+r} \right] \right| \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^{-3/2} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\theta_{j+r} - \varphi}.
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
& \left| 1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) \cos \theta_{j+r} \right| = \left| 1 - \cos \theta_{j+r} + \frac{2r}{N-1} \cos \theta_{j+r} \right| \leq \\
& 2 \sin^2 \frac{\theta_{j+r}}{2} + \frac{2r}{N-1} \leq c(a, r) \left(\sin^2 \frac{\theta_{j+r}}{2} + \frac{1}{n^2} \right) \leq c(a, r) \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^2.
\end{aligned}$$

Отсюда и из предыдущего неравенства имеем

$$J_{22} \leq c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \times$$

$$\sum_{\varphi + \frac{1}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\theta_{j+r} - \varphi} \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r-1/2} \int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta^{1/2} d\theta}{\theta - \varphi} + c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r}. \quad (5.18)$$

Далее имеем

$$\int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta^{\alpha-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta \leq c(\alpha) \begin{cases} \varphi^{\alpha-\frac{1}{2}} [\ln(n\varphi + 1) + 1], & -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}, \\ \varphi^{\alpha-\frac{1}{2}} \ln(n\varphi + 1) + 1, & \frac{1}{2} < \alpha. \end{cases}$$

Отсюда и из (5.17) и (5.18) имеем ($\varphi > 1/n$)

$$J_{21} \leq c(r, a) \varphi^{-r} [\ln(n\varphi + 1) + 1], \quad J_{22} \leq c(r, a) \varphi^{-r} [\ln(n\varphi + 1) + \varphi^{-1/2}]. \quad (5.19)$$

Сопоставляя (5.14) с (5.19), приходим к следующей оценке

$$J_2 \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r} \left(\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} + \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) \right). \quad (5.20)$$

Оценим J_4 при $\varphi > 1/n$. Совершенно аналогично тому, как это было сделано для J_{21} и J_{22} , мы Имеем

$$J_4 = \frac{2}{N} \sum_{\theta_{N-1+r} \leq \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right| \leq J_{41} + J_{42}, \quad (5.21)$$

где

$$\begin{aligned} J_{41} &= c(r, a) \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) x \right] \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-3/2} \times \\ &\quad \frac{2}{N} \sum_{\substack{\theta_{N-1+r} \leq \\ \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{-r-1/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|} \leq \\ &\quad c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r+1/2} \frac{2}{\Lambda-1} \sum_{\substack{\theta_{N-1+r} \leq \\ \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}}} \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{-1/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|} \leq \\ &\quad c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r+1/2} \sum_{\substack{\theta_{N-1+r} \leq \\ \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}}} \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{-1/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \theta_{j+r} \leq \\ &\quad c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r+1/2} \sum_{\substack{\theta_{N-1+r} \leq \\ \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}}} \frac{\theta_{j+r}^{1/2}}{\varphi^2 - \theta_{j+r}^2} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \leq \\ &\quad c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \left(\int_0^{\varphi - \frac{1}{n}} \frac{\theta^{1/2} d\theta}{\varphi^2 - \theta^2} + \frac{(\theta_{j_2+r-1} - \theta_{j_2+r}) \theta_{j_2+r}}{\varphi^2 - \theta_{j_2+r}^2} \right) \leq \end{aligned}$$

$$c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \left(\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{\theta^{1/2} d\theta}{\varphi^2 - \theta^2} + \frac{n}{\sqrt{\Lambda}} \right), \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} J_{42} &\leq c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \frac{2}{N} \sum_{\theta_{N-1+r} \leq \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \times \\ &\quad \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) \cos \theta_{j+r} \right] \right| \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{-r-3/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|} \leq \\ &\quad c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \frac{2}{\Lambda-1} \sum_{\substack{\theta_{N-1+r} \leq \\ \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}}} \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{1/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|} \leq \\ &\quad c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \sum_{\substack{\theta_{N-1+r} \leq \\ \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}}} \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{1/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \theta_{j+r} \leq \\ &\quad c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \sum_{\substack{\theta_{N-1+r} \leq \\ \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}}} \frac{\theta_{j+r} (\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{1/2}}{\varphi^2 - \theta_{j+r}^2} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \leq \\ &\quad c(r, a) \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \varphi^{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{\theta_{N-1+r} \leq \\ \theta_{j+r} < \varphi - \frac{1}{n}}} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\varphi^2 - \theta_{j+r}^2} \leq \\ &\quad c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r-1/2} \varphi^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\varphi^2 - \theta^2} + \frac{\theta_{j_2+r-1} - \theta_{j_2+r}}{\varphi^2 - \theta_{j_2+r}^2} \right) \leq \\ &\quad c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r-1/2} \varphi^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\varphi^2 - \theta^2} + \frac{n}{\varphi \sqrt{\Lambda}} \right) \leq \\ &\quad c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r} \left(\varphi \int_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\varphi^2 - \theta^2} + \frac{n}{\sqrt{\Lambda}} \right), \quad (5.23) \end{aligned}$$

где θ_{j_2+r} – ближайший слева к $\varphi - \frac{1}{n}$ из узлов θ_{j+r} . Но при $\sigma \geq 0$, $\varphi > 1/n$ имеем

$$\int_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{\theta^\sigma}{\varphi^2 - \theta^2} d\theta \leq \varphi^\sigma \int_0^{\varphi-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\varphi^2 - \theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \varphi^{\sigma-1} \ln(2n\varphi - 1) \leq c(\sigma)(\varphi + 1/n)^{\sigma-1} \ln(n\varphi + 1),$$

поэтому из (5.21)–(5.23) выводим оценку

$$J_4 \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r} (\ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) + 1).$$

Сопоставляя эту оценку с (5.6), (5.12), (5.20), убеждаемся в справедливости леммы 5.1 в случае $\varphi > 1/n$, где $x = \cos \varphi$. Перейдем к случаю $0 \leq \varphi \leq 1/n$. Тогда мы можем записать

$$I_{n,N}^r(x) \leq \sum_{k=1}^3 U_k,$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{2}{N} \sum_{x_r \leq x_{j+r} \leq -1/2} \left(\sqrt{1 - x_{j+r}^2} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|, \\ U_2 &= \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} < \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|, \\ U_3 &= \frac{2}{N} \sum_{\arccos x_{N-1+r} \leq \theta_{j+r} \leq \frac{2}{n}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right|. \end{aligned}$$

Заметим, что $U_1 = J_1$ (см. (5.1)), поэтому из (5.6) вытекает оценка

$$U_1 \leq c(r, a) \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r - \frac{1}{2}}.$$

Оценим U_2 . Мы здесь, не оговаривая особо, применяем рассуждения, которые уже применялись при оценке J_2 . Имеем

$$U_2 = \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \mathcal{K}_{n,N}^{r,r}(j, t) \right| \leq U_{21} + U_{22},$$

где

$$\begin{aligned} U_{21} &= c(r, a) n \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) x \right] \tilde{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| \times \\ &\quad \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \left| \frac{\hat{T}_n^r \left(\cos \theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1} \right)}{\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi} \right|, \\ U_{22} &= c(r, a) n \left| \hat{T}_n^r \left(x - \frac{2r}{\Lambda-1} \right) \right| \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \times \\ &\quad \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) \cos \theta_{j+r} \right] \left| \frac{\tilde{T}_n^r \left(\cos \theta_{j+r} - \frac{2r}{\Lambda-1} \right)}{\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi} \right| \right|. \end{aligned}$$

Обратимся к весовой оценке (1.22). Это дает

$$\begin{aligned} U_{21} &= c(r, a) n \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) x \right] \left[(1 - x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-3/2} \times \\ &\quad \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{-r-1/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|}, \end{aligned}$$

$$U_{22} \leq (r, a)n \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \frac{2}{N} \sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^r \times \\ \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) \cos \theta_{j+r} \right] \right| \frac{(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n})^{-r-3/2}}{|\cos \theta_{j+r} - \cos \varphi|}.$$

Поскольку, как уже отмечалось выше, при $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi/3]$ справедлива оценка $\cos \theta - \cos \varphi \asymp \varphi^2 - \theta^2$, то с учетом (5.10) имеем

$$U_{21} \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \times \\ \sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n+2r} \right)^{-1/2} \frac{(\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r})\theta_{j+r}}{\theta_{j+r}^2 - \varphi^2}$$

и, так как $\theta_{j+r}^2 - \varphi^2 \geq (\theta_{j+r} - \varphi)\theta_{j+r}$, то

$$U_{21} \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \times \\ \sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\theta_{j+r} - \varphi} = \\ \sum_{\frac{2}{n} < \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\theta_{j+r} - \varphi} + \\ \left(\sin \theta_{j_1+r} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{\theta_{j_1+r-1} - \theta_{j_1+r}}{\theta_{j_1+r} - \varphi} \leq \\ c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \left[\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{d\theta}{\theta - \varphi} + \right. \\ \left. \left(\sin \theta_{j_1+r} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{\theta_{j_1+r-1} - \theta_{j_1+r}}{\theta_{j_1+r} - \varphi} \right] \leq \\ c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \left[\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{d\theta}{\theta - \varphi} + \right. \\ \left. \left(\sin \varphi + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \frac{n}{\sqrt{N-1}} \right] \leq \\ c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \left(\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta^{-1/2} d\theta}{\theta - \varphi} + \left(\sin \varphi + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \right) \leq \\ c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r+1/2} \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta^{-1/2} d\theta}{\theta - \varphi} + c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r},$$

где θ_{j_1+r} – ближайший к $\frac{2}{n}$ справа из узлов θ_{j+r} . Аналогично находим

$$\begin{aligned} U_{22} &\leq (r, a)n \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \times \\ &\sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left| \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{N-1} \right) \cos \theta_{j+r} \right] \right| \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^{-3/2} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\theta_{j+r} - \varphi} \leq \\ &(r, a)n \left[(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{n} \right]^{-r-1/2} \sum_{\frac{2}{n} \leq \theta_{j+r} < \frac{2\pi}{3}} \left(\sin \theta_{j+r} + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \frac{\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}}{\theta_{j+r} - \varphi} \leq \\ &c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r-1/2} \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta^{1/2} d\theta}{\theta - \varphi} + c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r}. \end{aligned}$$

Далее, для $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{n}$ имеем

$$\int_{\frac{2}{n}}^{2\pi/3} \frac{\theta^{\alpha-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta \leq c(\alpha) \begin{cases} n^{\frac{1}{2}-\alpha}, & -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < \alpha, \end{cases}$$

следовательно ($0 \leq \varphi \leq \frac{1}{n}$, $x = \cos \varphi$)

$$U_2 \leq U_1 + U_2 \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r-1/2}.$$

Оценим U_3 . Почти дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к оценке (5.12), имеем

$$\begin{aligned} U_3 &\leq c(r, a)n \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\ &\sum_{\arccos x_{N-1+r} \leq \theta_{j+r} \leq \frac{2}{n}} \left(\theta_{j+r} + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta_{j+r-1} - \theta_{j+r}) \leq \\ &c(r, a)n \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \times \\ &\left[\int_0^{\frac{2}{n}} \left(\theta + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta + \left(\sin \theta_{j_0+r} + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta_{j_0+r-1} - \theta_{j_0+r}) \right] \leq \\ &c(r, a) \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r-\frac{1}{2}} \left(\varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(r, a) \left(\sin \varphi + \frac{1}{n+1} \right)^{-r}, \end{aligned}$$

где θ_{j_0+r} – ближайший слева к $2/n$ из узлов θ_{j+r} . Собирая оценки, полученные выше для U_1 , U_2 и U_3 , мы приходим при $0 \leq \varphi \leq 1/n$ к следующей оценке

$$I_{n,N}^r(x) \leq \sum_{k=1}^3 U_k \leq c(r, a) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-r-1/2}.$$

Тем самым лемма 5.1 полностью доказана.

Из леммы 5.1 и равенства (4.20) следующая

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $r \geq 1$, $a > 0$, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда

$$L_{n,N}^r(x) \leq c(r, a) \left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) \right) \quad (x \in [-1, 1]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения теоремы 5.1 непосредственно вытекает из леммы 5.1, равенства (4.20) и оценки

$$\frac{|(t+1)_r(N-t)_r|2^{2r}}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r})^{2r}(N+2r)^{[2r]}} \leq c(r, a) \quad (1 \leq n \leq a\sqrt{N}, -1 \leq x \leq 1),$$

где $t = \frac{N+2r-1}{2}(x+1) - r$.

Положим $L_{n,N}^r = \max_{x \in [-1, 1]} L_{n,N}^r(x)$. Из теоремы 5.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $r \geq 1$, $a > 0$. Тогда равномерно относительно $2 \leq n \leq a\sqrt{N}$ имеет место оценка

$$L_{n,N}^r \leq c(r, a) \ln n \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Из теоремы 5.1 и неравенств (4.18) и (4.19) немедленно вытекает также

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $r \geq 1$, $a > 0$, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)|}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r})^{r-1/2}} \leq \\ & c(r, a) E_{n+2r}^r(f, N) \left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) \right) \quad (x \in H_\Lambda), \\ & \frac{|f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)|}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2r})^{r-1/2}} \leq \\ & c(r, a) \mathcal{E}_{n+2r}^r(f, N) \left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) \right) \quad (x \in [-1, 1]). \end{aligned}$$

Перейдем к вопросу об аппроксимативных свойствах конечных разностей операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$. Пусть, по прежнему, $d(j) = f(x_{j+r})$ ($j \in \bar{\Omega}_\Lambda$). Для $t \in \{-r+\nu, \dots, -1, 0, \dots, N-1, N, \dots, N+r-1\}$ положим $d_\nu = d_\nu(t) = d(t) = f(x_{t+r})$ и введем оператор $\mathcal{X}_{n+2r-\nu, N+\nu}^\nu(f) = \mathcal{X}_{n+2r-\nu, N+\nu}^\nu(f, x)$, полагая для $t = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r$

$$\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(f, x) = \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}(d_\nu, t) = \mathcal{D}_{2(r-\nu)-1, N+\nu}(d_\nu, t) +$$

$$\frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(d_\nu)_{r-\nu, k}}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu), \quad (5.24)$$

где в силу (2.9)

$$(d_\nu)_{r-\nu,k} = \frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{t \in \Omega_{N+r}} \Delta^{r-\nu} d_\nu(t-r+\nu) T_k^{0,0}(t, N+r) =$$

$$\frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{t \in \Omega_{N+r}} \Delta_h^{r-\nu} f(x_{t+\nu}) T_k^{0,0}(t, N+r) = f_{r-\nu,k}^\nu, \quad (5.25)$$

$$\mathcal{D}_{2(r-1)-1, N+\nu}(d_\nu, t) =$$

$$\sum_{i=1}^{r-\nu} (-1)^{i-1} \frac{(t+1)_{r-\nu}(N-t)_{r-\nu}}{(i-1)!(r-\nu-i)!(N+\nu+i)_{r-\nu}} \left[\frac{f(x_{r-i})}{t+i} + \frac{f(x_{N+\nu-1+r+i})}{N+\nu-1+i-t} \right].$$

Из определения (5.24) следует, что оператор $\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(f)$ является проектором на пространство алгебраических полиномов $p_m(x)$ степени $m \leq n+2r-\nu$, т.е.

$$\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(p_m, x) \equiv p_m(x) \quad (m \leq n+2r-\nu). \quad (5.26)$$

Кроме того, имеют место следующие равенства

$$\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(f, x_j) = f(x_j), \quad (5.27)$$

где $\nu \leq j \leq r-1$, $N+r+\nu \leq j \leq N+2r-1$.

Положим $\psi(x) = \Delta_h^\nu f(x-\nu h)$ и рассмотрим функцию $\partial(t) = \Delta^\nu d(t-\nu) = \Delta_h^\nu f(x_{t-\nu+r}) = \psi(x_{t+r})$, для которой в силу первого равенства из (3.8) мы можем записать

$$\Delta_h^\nu f(x_{j-\nu+r}) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r, N}(f, x_{j-\nu+r}) =$$

$$\Delta^\nu d(j-\nu) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r, N}(d, j-\nu) = \partial(j) - \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}(\partial, j) =$$

$$\psi(x_{j+r}) - \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(\psi, x_{j+r})$$

или, что то же,

$$\Delta_h^\nu f(x_{j-\nu}) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r, N}(f, x_{j-\nu}) = \psi(x_j) - \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(\psi, x_j). \quad (5.28)$$

Через $\mathcal{P}_m^{r,\nu}$ обозначим пространство алгебраических полиномов $p_m(x)$ степени m , удовлетворяющих условию

$$\psi(x_j) = p_m(x_j), \quad j \in \{\nu, \dots, r-1\} \cup \{N+r+\nu, \dots, N+2r-1\}, \quad (5.29)$$

а через $q_m^{r,\nu}(\psi) = q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x)$ обозначим полином из $\mathcal{P}_m^{r,\nu}$, для которого

$$E_m^{r,\nu}(\psi, N) = \inf_{p_m \in \mathcal{P}_m^{r,\nu}} \max_{r \leq j \leq N+r+\nu-1} \frac{|\psi(x_j) - p_m(x_j)|}{\left(\sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{m}\right)^{r-\nu}}$$

$$= \max_{r \leq j \leq N+r+\nu-1} \frac{|\psi(x_j) - q_m^{r,\nu}(\psi, x_j)|}{\left(\sqrt{1-x_j^2} + \frac{1}{m}\right)^{r-\nu}}. \quad (5.30)$$

Тогда, учитывая (5.26), мы имеем

$$\begin{aligned} \psi(x) - \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(\psi, x) = \\ \psi(x) - q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x) + \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(q_{m,N}^{r,\nu}(\psi) - \psi, x). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Далее заметим, что если в равенстве (5.27) функцию $f(x)$ заменить функцией $q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x) - \psi(x)$, то, в силу (5.29), будем иметь $\mathcal{D}_{2(r-1)-1, N+\nu}(d_\nu, t) \equiv 0$, поэтому из (5.24) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(q_{m,N}^{r,\nu}(\psi) - \psi, x) = \\ \frac{(-1)^{r-\nu}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{(q_{m,N}^{r,\nu}(\psi) - \psi)_{r-\nu,k}^\nu}{k^{[r-\nu]}} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu), \end{aligned} \quad (5.32)$$

где, в силу (5.25),

$$\begin{aligned} (q_{m,N}^{r,\nu}(\psi) - \psi)_{r-\nu,k}^\nu = \\ \frac{2}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N+r-1} T_k^{0,0}(j, N+r) \Delta^{r-\nu}(q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x_{j+\nu}) - \psi(x_{j+\nu})), \end{aligned} \quad (5.33)$$

причем конечная разность $\Delta^{r-\nu}$ берется по переменной j . Применим к правой части равенства (5.33) преобразование Абеля $r-\nu$ раз, тогда в силу равенств (5.29), которым удовлетворяет полином $p_m(x) = q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x)$, получим

$$\begin{aligned} (q_{m,N}^{r,\nu}(\psi) - \psi)_{r-\nu,k}^\nu = \\ \frac{2(-1)^{r-\nu}}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N+r-1} (q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x_{j+r}) - \psi(x_{j+r})) \Delta^{r-\nu} T_k^{0,0}(j, N+r). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Отсюда, с учетом равенства (1.15) находим

$$\begin{aligned} (q_{m,N}^{r,\nu}(\psi) - \psi)_{r-\nu,k}^\nu = \\ \frac{2(-1)^{r-\nu}}{(N+r)h_{k,N+r}^{0,0}} \sum_{j=0}^{N+\nu-1} \frac{(k+1)_{r-\nu} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}} (q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x_{j+r}) - \psi(x_{j+r})). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Подставляя это выражение в (5.32), мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^\nu(q_{m,N}^{r,\nu}(\psi) - \psi, x) = \\ \frac{(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{k=r-\nu}^{n+r} \frac{2}{(N+r)k^{[r-\nu]}h_{k,N+r}^{0,0}} \times \\ \sum_{j=0}^{N+\nu-1} \frac{(k+1)_{r-\nu} T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu)}{(N+r-1)^{[r-\nu]}} (q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x_{j+r}) - \psi(x_{j+r})) T_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu) = \\ \frac{2(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N+r)(N-1+r)^{[r-\nu]}} \sum_{j=0}^{N+\nu-1} (q_{m,N}^{r,\nu}(\psi, x_{j+r}) - \psi(x_{j+r})) \times \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n+\nu} \frac{(k+r-\nu+1)_{r-\nu} T_k^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu) T_k^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu)}{(k+r-\nu)^{[r-\nu]} h_{k+r-\nu, N+r}^{0,0} (N+r-1)^{[r-\nu]}}. \quad (5.36)$$

С другой стороны, учитывая (1.6), заметим, что

$$\begin{aligned} (N+r)(N+r-1)^{[r-\nu]} h_{k+r-\nu, N+r}^{0,0} \frac{(N+r-1)^{[r-\nu]} (k+r-\nu)^{[r-\nu]}}{(k+r-\nu+1)_{r-\nu}} = \\ (N+r)(N+r-1)^{[r-\nu]} \frac{(N+\nu+k+2(r-\nu))^{[k+r-\nu]}}{(N+r-1)^{[k+r-\nu]}} \times \\ \frac{2}{2k+2(r-\nu)+1} \frac{(N+r-1)^{[r-\nu]} (k+r-\nu)^{[r-\nu]}}{(k+r-\nu+1)_{r-\nu}} = \\ (N+\nu) \frac{(N+\nu+2(r-\nu))^{[2(r-\nu)]}}{2^{2(r-\nu)}} h_{k, N+\nu}^{r-\nu, r-\nu}, \end{aligned}$$

поэтому, принимая во внимание (1.6), предыдущее выражение принимает окончательно следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^{r, \nu}(q_{m, N}^{r, \nu}(\psi) - \psi, x) = \\ \frac{2^{2(r-\nu)}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N+\nu+2(r-\nu))^{2[r-\nu]}} \sum_{j=0}^{N+\nu-1} (q_{m, N}^{r, \nu}(\psi, x_{j+r}) - \psi(x_{j+r})) \times \\ \sum_{k=0}^{n+\nu} \frac{T_k^{r-\nu, r-\nu}(j, N+\nu) T_k^{r-\nu, r-\nu}(t, N+\nu)}{h_{k, N+\nu}^{r-\nu, r-\nu}} = \\ \frac{2^{2(r-\nu)}(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}}{(N+\nu+2(r-\nu))^{2[r-\nu]}} \sum_{j=0}^{N+\nu-1} (q_{m, N}^{r, \nu}(\psi, x_{j+r}) - \psi(x_{j+r})) \mathcal{K}_{n+\nu, N+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, t). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Если мы примем во внимание (5.30), то для $m \leq n+2r-\nu$ из (5.37) можем вывести следующую оценку:

$$\begin{aligned} |\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^{r, \nu}(q_{m, N}^{r, \nu}(\psi) - \psi, x)| \leq \\ E_m^{r, \nu}(\psi, N) \frac{|(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}| 2^{2(r-\nu)+1}}{(N+\nu+2(r-\nu))^{[2(r-\nu)]} (N+\nu)} \times \\ \sum_{j=0}^{N+\nu-1} \left(\sqrt{1-x_{j+r}^2} + \frac{1}{m} \right)^{r-\nu} \left| \mathcal{K}_{n+\nu, N+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, t) \right|. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Положим $m = n+2r-\nu$, $t_i = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x_i) - r$, тогда из (5.28), (5.31) и (5.38) находим

$$\begin{aligned} |\Delta_h^\nu f(x_{i-\nu}) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r, N}(f, x_{i-\nu})| = |\psi(x_i) - \mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^{r, \nu}(\psi, x_i)| \leq \\ |\psi(x_i) - q_{m, N}^{r, \nu}(\psi, x_i)| + \frac{E_m^{r, \nu}(\psi, N) L_{n, N}^{r, \nu}(x_i)}{\left(\sqrt{1-x_i^2} + \frac{1}{m} \right)^{\nu-r+\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

где $(t = \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r)$

$$L_{n,N}^{r,\nu}(x) = \frac{|(t+1)_{r-\nu}(N+\nu-t)_{r-\nu}| 2^{2(r-\nu)} I_{n,N}^{r,\nu}(x)}{(N+\nu+2(r-\nu))^{[2(r-\nu)]} (\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{m})^{r-\nu-\frac{1}{2}}}, \quad (5.40)$$

$$I_{n,N}^{r,\nu}(x) = \frac{2}{N+\nu} \sum_{j=0}^{N+\nu-1} \left(\sqrt{1-x_{j+r}^2} + \frac{1}{m} \right)^{r-\nu} \left| \mathcal{K}_{n+\nu, N+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(j, t) \right|. \quad (5.41)$$

Неравенство (5.39) сводит задачу об оценке отклонения функции $\psi(x)$ от полинома $\mathcal{X}_{n+\nu+2(r-\nu), N+\nu}^{\nu}(\psi, x)$ к вопросу об оценке величины $I_{n,N}^{r,\nu}(x)$. Но этот вопрос, по сути, был уже рассмотрен в лемме 5.1 и мы можем здесь сформулировать следующий результат.

ЛЕММА 5.2. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $a > 0$, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда имеет место оценка

$$I_{n,N}^{r,\nu}(x) \leq \frac{c(r, a)}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})^{r-\nu+\frac{1}{2}}} \left(1 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) \right).$$

Из леммы 5.2 с учетом равенства (5.28) и неравенства (5.39) мы выводим

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $\nu \leq i \leq N+2r-1$, $a > 0$, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $m = n+2r-\nu$. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \frac{|\Delta_h^{\nu} f(x_{i-\nu}) - \Delta_h^{\nu} \mathcal{X}_{n+2r, N}(f, x_{i-\nu})|}{\left(\sqrt{1-x_i^2} + \frac{1}{m} \right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leq \\ & c(r, a) E_m^{r,\nu}(\psi, N) \left(1 + \left(\sqrt{1-x_i^2} + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \ln \left(n\sqrt{1-x_i^2} + 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Список литературы

- [1] Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Математический сборник. 1966. Т. 70, вып. 2. С. 252–265.
- [2] Гопенгауз И.З. К теореме А.Ф.Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Математические заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 163–172.
- [3] Малоземов В.Н. Совместное приближение функции и ее производных. Л. Изд-во ЛГУ. 1973.
- [4] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций. М. Наука. 1977.
- [5] Теляковский С.А. Оценка одновременного приближения функций и их производных суммами Фурье // Математические заметки. 2011. Т. 90, вып. 3. С. 478–480.
- [6] Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление. М. Мир. Вып. 1,2. 1974.
- [7] Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. М. Энергия. 1979.
- [8] Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. Москва. Машиностроение. 1986.

- [9] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Москва. Наука. 1966.
- [10] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплаины в вычислительной математике. Москва. Наука. 1976.
- [11] Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулирования. Москва. Физматлит. 1959.
- [12] Чебышев П.Л. О непрерывных дробях (1855). Полн. собр. соч. Москва. Изд. АН СССР. 1947. Т. 2. С. 103–126
- [13] Чебышев П.Л. Об одном новом ряде. Полн. собр. соч. Москва. Изд. АН СССР. 1947. Т. 2. С. 236–238.
- [14] Чебышев П.Л. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859). Полн. собр. соч. Москва. Изд. АН СССР. 1947. Т. 2. С. 314–334.
- [15] Чебышев П.Л. Об интерполировании (1864). Полн. собр. соч. Москва. Изд. АН СССР. 1947. Т. 2. С. 357–374.
- [16] Чебышев П.Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875). Полн. собр. соч. Москва. Изд. АН СССР. 1947. Т. 2. С. 66–87.
- [17] Шарапудинов И.И. О сходимости метода наименьших квадратов // Математические заметки. 1993. Т. 53, вып. 3. С. 131–143.
- [18] Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia. SIAM. 2000.
- [19] Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University. 1996.
- [20] Арушанян О.Б., Волченкова Н.И., Залеткин С.Ф. О вычислении коэффициентов рядов Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 273–283.
- [21] Saeed Radhoush, Mahmoud Samavat, Mohammad Ali Vali. Optimal control of linear time-varying systems using the Chebyshev wavelets (a comparative approach) // Systems Science and Control Engineering: An Open Access Journal. 2014. Vol. 2. Pp. 691–698.
- [22] Шарапудинов И.И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Чебышева–Хана алгебраическими многочленами // Математический сборник. 1991. Т. 183, вып. 3. С. 408–420.
- [23] Шарапудинов И.И. Об асимптотике многочленов Чебышева, ортогональных на конечной системе точек // Вестник МГУ. Серия 1. 1992. Т. 1. С. 29–35.
- [24] Шарапудинов И.И. Многочлены, ортогональные на дискретных сетках. Махачкала. Издательство Даг. гос. пед. ун-та. 1997.
- [25] Шарапудинов И.И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Математические заметки. 2000. Т. 67, вып. 3. С. 460–470.
- [26] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Математические заметки. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 765–795.
- [27] Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Математические заметки. 2005. Т. 78, вып. 3. С. 442–465.
- [28] Шарапудинов И.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Математический сборник. 2006. Т. 197, вып. 3. С. 135–154.
- [29] Шарапудинов Т.И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестник Дагестанского научного центра РАН. 2007. Т. 29. С. 12–23.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)

Дагестанский научный центр РАН, Владикавказский
научный центр РАН

E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию

27.10.2015

Т. И. Шарапудинов (T. I. Sharapudinov)

Дагестанский научный центр РАН, Владикавказский
научный центр РАН

E-mail: sharapudinov@gmail.com