

УДК 517.956.4

М. М. Зайнулабидов, З. М. Зайнулабидова

О некоторых математических моделях волновых процессов с сильными нелинейностями

Исследованы уравнения типа Кортевега – де Фриза (КдФ) с сильными нелинейностями и их эллипτικο-гиперболические аналоги с операторами эллипτικο-гиперболического типа вместо оператора типа Фурье.

Библиография: 2 названия.

Korteweg – de Vries equations with strong nonlinearities and their elliptic-hyperbolic analogues with the elliptic-hyperbolic operators instead of Fourier type operators are investigated.

Bibliography: 2 items.

Ключевые слова: уравнение Кортевега – де Фриза, слабые и сильные нелинейности.

Keywords: Korteweg – de Vries equation, weak and strong nonlinearities.

Введение

Как известно, [1; с. 312 – 327] при математическом моделировании волновых процессов во многих задачах физики плазмы, физики твердого тела, гидродинамики, квантовой теории поля, биофизики, химической кинетики, волоконной оптики и др., с учетом дисперсии получается уравнение КдФ

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (0.1)$$

со слабой нелинейностью uu_x .

Решение (0.1) представимое в виде нелинейной волны, неизменной формы, называемое уединенной волной или солитоном, имеет как теоретическое, так и прикладное значение в общей теории нелинейных уравнений математической физики.

Настоящая статья посвящена исследованию некоторых нелинейных уравнений типа КдФ с сильными нелинейностями, решения которых могут быть получены в виде солитонов.

1. Постановка задачи и результаты

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + \beta u_{xxx}) + 6[b(u)u_{xx}^2 + b'(u)u_x^2 u_{xx}] + \frac{\beta b''(u) - b'(u)b(u)}{\beta} u_x^4 = 0, \quad (1.1)$$

$$u_t + \beta u_{xxx} + 3b(u)u_x u_{xx} + \frac{\beta b'(u) - b^2(u)}{\beta} u_x^3 - 3\delta b(u)u_x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{b(u)u_x}{\beta} \right] = 0, \quad (1.2)$$

где β, δ – действительные параметры, $b(u)$ – дважды дифференцируемая заданная функция, в которых линейная часть оператора КдФ сохранена, а слабая нелинейность заменена сильными нелинейностями.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Решения $u(x, t)$ уравнений (1.1), (1.2) представимы в виде $u = y[x, t]$, где $y(\varphi)$ – решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\beta y''(\varphi) + b[y(\varphi)]y'^2(\varphi) = 0, \quad (1.3)$$

а $\varphi(x, t)$ – решение нелинейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} [y'(\varphi_t + \beta \varphi_{xxx})] - 3\beta y''(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x \varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.4)$$

$$y'(\varphi_t + \beta \varphi_{xxx}) - 3\delta \beta y''(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x^2 - \varphi_x \varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.5)$$

соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (1.1) и (1.2) введем замену

$$u(x, t) = y[\varphi(x, t)]. \quad (1.6)$$

С учетом $u_t = y' \varphi_t$, $u_x = y' \varphi_x$, $u_{xx} = y'' \varphi_x^2 + y' \varphi_{xx}$, $u_{xxx} = y''' \varphi_x^3 + 3y'' \varphi_x \varphi_{xx} + y' \varphi_{xxx}$ уравнения (1.1), (1.2) могут быть переписаны соответственно в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [y'(\varphi_t + \beta \varphi_{xxx}) + 3\beta y''(\varphi_x^2 \varphi_x + \varphi_x \varphi_{xxx}) + 6b(y)y'^2 \varphi_{xx}^2 + \\ & + \varphi_x^4 \left\{ \psi''(y) - \frac{2b(y)y'}{\beta} \psi'(y) + \frac{4b(y)y'' + b'(y)y'^2}{\beta} \psi(y) \right\} + 6\varphi_x^2 \varphi_{xx} \psi'(y) = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} & y'(\varphi_t + \beta \varphi_{xxx}) + 3\delta \beta y''(\varphi_x \varphi_{xxx} - \varphi_{xx}^2) + 3\varphi_x \varphi_{xx} \psi(y) + \varphi_x^3 \left\{ \psi'(y) + \frac{b(y)y'}{\beta} \right\} - \\ & - 3\delta \beta (y)y'^2 \varphi_x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi(y) \frac{\varphi_x}{\beta y'} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\psi(y) = \beta y'' + b(y)y'^2$.

Из (1.7), (1.8) при $\psi(y) \equiv 0$ получаем (1.4), (1.5) соответственно, что в силу (1.3), и доказывает теорему.

Общее решение нелинейного уравнения (1.3) в неявной записи имеет вид

$$\varphi = c_1 \int_0^{y(\varphi)} e^{\frac{1}{\beta} \int_0^\tau b(t) dt} d\tau + c_2, \quad (1.9)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

В том случае, когда из (1.9) можно явно определить $y(\varphi)$, при условии, что $y'(\varphi) \neq 0$, для определения $\varphi(x, t)$ получаем нелинейные уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x} [y'(\varphi_t + \beta \varphi_{xxx})] + 3b(y)y'^2(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x \varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.10)$$

$$\varphi_t + \beta \varphi_{xxx} + 3\delta b(y)y'^2(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x \varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.11)$$

характерной особенностью которой является наличие в них линейного оператора $\varphi_t + \beta \varphi_{xxx}$ и нелинейного оператора $\varphi_{xx}^2 - \varphi_x \varphi_{xxx}$.

Это обстоятельство позволяет определить достаточно широкий класс решений уравнений (1.10), (1.11) как функцию $\varphi(x, t)$, которая одновременно является решением линейного уравнения

$$\varphi_t + \beta\varphi_{xxx} = 0 \tag{1.12}$$

и нелинейного уравнения

$$\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx} = 0. \tag{1.13}$$

Легко показать, что общее решение $\varphi(x, t)$ уравнения (1.13) имеет вид

$$\varphi(x, t) = c_1(t)e^{c_2(t)x} + c_3(t), \tag{1.14}$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные функции только от t .

Подбирая функции c_1, c_2, c_3 так, чтобы (1.14) было решением (1.12), получим, что функция

$$\varphi(x, t) = ae^{\alpha(x-\beta\alpha^2t)} + b, \tag{1.15}$$

где a, b, α – произвольные постоянные, определяет достаточно широкий класс решений (1.10), (1.11).

Подставляя (1.15) в (1.9) с учетом (1.6) получим представление решений $u(x, t)$ уравнений (1.1), (1.2) в неявном виде

$$e^{\alpha(x-\beta\alpha^2t)} = A \int_0^{u(x,t)} e^{\frac{1}{\beta} \int_0^\tau b(t)dt} d\tau + B, \tag{1.16}$$

где $A \neq 0$ и B – произвольные постоянные.

Можно указать достаточно широкий класс функций $b(t)$, для которых из (1.16) получается явное представление для $u(x, t)$.

В самом деле, пусть $b(t) = \frac{g'(t)}{g'(t)}$, где $g(t)$ – любая дважды дифференцируемая и однозначно обратимая функция, для которой $g'(t) > 0$.

Тогда (1.16) примет вид уравнения

$$g'(0)(e^{\alpha(x-\beta\alpha^2t)} - B) + Ag(0) = Ag(u) \tag{1.17}$$

однозначно разрешимого относительно $u(x, t)$.

Следует обратить внимание на то, что уравнения (1.1) и (1.2) четвертого и третьего порядков соответственно, в силу чего единое представление их решений $u(x, t)$ в виде одной формулы (1.16) вполне допустимо. Тем более, что (1.16) не охватывает всех решений.

В случаях $b(u) = 1, b(u) = \frac{1}{u}$, рассмотренных в [2], когда $\delta = 0$ уравнение (1.17) будет иметь соответственно вид

$$e^{\alpha(x-\beta\alpha^2t)} = A\beta e^{\left(\frac{u}{\beta}\right)} - A\beta + B,$$

$$e^{\alpha(\beta\alpha^2t)} = A\frac{\beta}{\beta+1} \left(\frac{1}{\tau_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} u^{\frac{1+\beta}{\beta}} + B,$$

где

$$t \geq \tau_0 > 0, \frac{1+\beta}{\beta} > 0.$$

Отсюда получаем решения $u(x, t)$ уравнений (1.1) и (1.2), соответствующие этим случаям в явном виде

$$u(x, t) = \beta \ln \frac{e^{\alpha(x-\beta\alpha^2t)} + A\beta - B}{A\beta},$$

$$u(x, t) = \left\{ \frac{e^{\alpha(x - \beta\alpha^2 t)} - B}{A} \cdot \frac{\beta + 1}{\beta} \tau_0^{\frac{1}{\beta}} \right\}^{\frac{\beta}{1+\beta}}.$$

Наряду с (1.1) и (1.2) указанным способ могут быть исследованы уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(u_t t + \beta u_{xxx}) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x}[b(u)u_t^2] + 6[b(u)u_{xx}^2 + b'(u)u_{xx}^2] + \\ \frac{\beta b''(u) - b'(u)b(u)}{\beta} u_x^4 = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} u_{tt} + \beta U_{xxx} + \frac{1}{b}(u)\beta u_t^2 + 3b(u)u_x u_{xx} + \frac{\beta b'(u) - b^2(u)}{\beta} u_x^3 - \\ 3\delta b(u)u_x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{b(u)u_x}{\beta} \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

которых можно считать эллиптико-гиперболическими аналогами этих уравнений, соответственно.

В результате замены (1.6), где $y(\varphi)$ – решение (1.3), уравнения (1.8), (1.19) сводятся к нелинейным относительно $u(x, t)$ уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}[y'(\varphi_{tt} + \beta\varphi_{xxx})] - 3\beta y''(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.20)$$

$$y'(\varphi_{tt} + \beta\varphi_{xxx}) - 3\delta\beta y''(\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx}) = 0, \quad (1.21)$$

соответственно, характерной особенностью которых является наличие линейного $\varphi_{tt} + \beta\varphi_{xxx}$ и нелинейного $\varphi_{xx}^2 - \varphi_x\varphi_{xxx}$ операторов.

Из общего решения (1.14) уравнения (1.13), подбирая произвольные функции $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ можно получить решение уравнения $\varphi_{tt} + \beta\varphi_{xxx} = 0$ и достаточно широкий класс решений (1.20), (1.21), представимых в виде

$$\varphi(x, t) + At + B = \begin{cases} e^{\alpha x} \left(\alpha \cos \sqrt{\beta\alpha^3 t} + b \sin \sqrt{\beta\alpha^3 t} \right) & \text{при } \beta\alpha^3 > 0, \\ e^{\alpha x} \left(\alpha \operatorname{ch} \sqrt{-\beta\alpha^3 t} + b \operatorname{sh} \sqrt{-\beta\alpha^3 t} \right) & \text{при } \beta\alpha^3 < 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Таким образом установлено, что с помощью замены (1.10), где правая часть $y(\varphi)$ определяется формулой (1.22), нелинейные уравнения (1.4) – (1.9) эквивалентно сводятся к более простым (1.20) – (1.22), с вытекающими отсюда следствиями в смысле корректности постановки тех или иных краевых задач для этих уравнений.

В заключении обратим внимание на то, что достаточно широкий класс решений $\varphi(x, t)$ уравнения (1.22) при $f(t) \equiv 0$ определяет функция

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} e^{\alpha x} (a \cos \alpha \sqrt{\alpha\beta t} + b \sin \alpha \sqrt{\alpha\beta t}) & \text{при } \beta > 0, \\ e^{\alpha x} (a \operatorname{ch} \alpha \sqrt{-\alpha\beta t} + b \operatorname{sh} \alpha \sqrt{-\alpha\beta t}) & \text{при } \beta < 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

где A, B, α, b – произвольные действительные постоянные.

Функция (1.23) может быть использована при исследовании (1.20) и (1.21) точно также, как использована функция (1.15) при исследовании уравнения КдФ в [1; с. 320 – 326].

В заключении отметим, что полученные в статье результаты являются следствием многократных обсуждений проблем теории нелинейных волновых процессов с генеральным конструктором САПР на Каспийском заводе «Дагдизель», академиком Алиевым Ш.Г., который умело, со знанием дела, подталкивал нас на исследование

проблем данного направления, за что выражаем ему нашу признательность и благодарность.

Список литературы

- [1] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2002. 367 с.
- [2] Зайнулабидов М.М. Зайнулабидова З.М. К теории нелинейных уравнений волновых процессов // Информационные технологии в образовании и науке (ДАГИТО-2014). Выпуск 5. г. Махачкала. 2014 г. С. 177–179.

М. М. Зайнулабидов (M. M. Zainulabidov)
Дагестанский государственный педагогический
университет
E-mail: zaynulabidov.mansur@mail.ru

Поступила в редакцию
16.10.2014

З. М. Зайнулабидова (Z. M. Zainulabidova)
Махачкалинский лицей №5
E-mail: zzaynulabidova@mail.ru