УДК 517.946

М. М. Сиражудинов, С. П. Джамалудинова

G -сходимость и усреднение одного класса эллиптических уравнений второго порядка с комплекснозначными коэффициентами¹

Исследованы вопросы G -компактности и усреднения одного класса эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами. Установлена G -компактность этого класса. Получены усреднения для операторов с периодическими коэффициентами.

Библиография: 9 названий.

The problems of G -compaction and averaging of a class of second-order elliptic operators with complex-valued coefficients are studied. It is proved G -compaction of this class. Averaging for operators with periodic coefficients was obtained.

Bibliography: 9 items.

Ключевые слова: G -сходимость, краевая задача, априорные оценки.

Keywords: G -convergence, boundary value problem, prior estimates.

Введение

Многие задачи математической физики приводят к изучению вопросов G -сходимости дифференциальных операторов. Такие вопросы возникают в теории упругости, электродинамике и других разделах физики и механики. Вопросам G -сходимости дифференциальных операторов посвящено много работ (см. [1] и приведенную там литературу). Теория G -сходимости дивергентных эллиптических операторов второго порядка в общих чертах завершена.

G -сходимость недивергентных дифференциальных операторов – это, иначе, слабая сходимость соответствующих обратных операторов. Поэтому по понятным причинам в задачах G -сходимости кроме корректной разрешимости краевых задач требуются также оценки решений, равномерные относительно любого оператора. Для недивергентных эллиптических операторов и систем такого рода оценки мало изучены, поэтому G -сходимость недивергентных операторов также изучена не столь детально, как для дивергентных операторов. Вопросам G -сходимости и усреднению недивергентных эллиптических операторов посвящены работы [2–6].

Проведено исследование G -сходимости одного класса эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами. Доказана

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00508_а и № 14-01-31389-мол_а)

G -компактность этого класса. Рассмотрены вопросы усреднения для операторов с периодическими коэффициентами.

1. Обозначения и предварительные сведения

1.1. Обозначения. В работе будем придерживаться следующих обозначений:

$Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная гладкая область класса $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$;

$$\partial_{\bar{z}} = 2^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \partial_z = 2^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right);$$

i – мнимая единица;

$L_2(Q; \mathbb{C})$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций. Символ $\mathbb{C}$ в обозначении пространства (здесь и далее) означает также, что это пространство есть линейное пространство над полем действительных чисел. Скалярное произведение в $L_2(Q; \mathbb{C})$ дается равенством:

$$(u, v)_{L_2(Q; \mathbb{C})} = \operatorname{Re} \int_Q u \bar{v} dx, \quad u, v \in L_2(Q; \mathbb{C}),$$

где $\bar{v}$ – комплексно-сопряженная v функция;

$W_p^k(Q)$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$) – обычное пространство Соболева;

$W_p^k(Q; \mathbb{C})$ – пространство Соболева комплекснозначных функций;

$L_2(\Omega)$, $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$, $L_2(\Omega; \mathbb{C})$, $H^k(\Omega; \mathbb{C}) \equiv W_2^k(\Omega; \mathbb{C})$ – пространства Лебега и Соболева периодических функций, где Ω – квадрат со стороной T , параллельной оси координат, $|\Omega| = T^2$ – площадь квадрата Ω ;

Под периодической функцией $f(x_1, x_2)$ будем понимать функцию периодическую (периода T) по каждой переменной;

$H^{-k} \equiv H^{-k}(\Omega; \mathbb{C})$ – пространство, сопряженное $H^k(\Omega; \mathbb{C})$. Пространство, сопряженное $L_2(\Omega; \mathbb{C})$, отождествляем с $L_2(\Omega; \mathbb{C})$, что возможно, в силу теоремы Рисса.

$\rightharpoonup$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве;

$W(Q; \mathbb{C})$ – подпространство пространства Соболева $W_2^2(Q; \mathbb{C})$ комплекснозначных функций над полем $\mathbb{R}$, определенное равенством:

$$W(Q; \mathbb{C}) = \left\{ u \in W_2^2(Q; \mathbb{C}) \mid \operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \operatorname{Re} \partial_z u|_{\partial Q} = 0, \right. \\ \left. \int_Q \operatorname{Im} u dx = 0, \int_Q \operatorname{Im} \partial_z u dx = 0 \right\}$$

$W_0(Q; \mathbb{C})$ – подпространство $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют соотношениям:

$$\operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \quad \int_Q \operatorname{Im} u dx = 0.$$

1.2. Предварительные сведения. Обозначим через $\mathcal{B}(k_0; Q)$ множество эллиптических систем двух уравнений первого порядка, записанных в виде одного уравнения в комплексной форме:

$$Bu \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u + \nu \overline{\partial_z u} = f, \quad (1.1)$$

где μ, ν – измеримые в Q функции, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1, \quad (1.2)$$

k_0 – положительная постоянная (*константа эллиптичности*); Q – ограниченная односвязная область плоскости с границей класса $C^{1+\alpha}$. Заметим, что любую равномерно эллиптическую систему двух уравнений с действительными коэффициентами из $L_\infty(Q)$ можно представить в виде (1.1), (1.2) (см. [9; § 7, гл. 2 и § 17, гл. 3]).

Рассмотрим краевую задачу Римана – Гильберта (Р – Г):

$$\begin{cases} Bu = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u \in W_0(Q; \mathbb{C}). \end{cases} \quad (1.3)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1 ([6]). *Задача Р–Г (1.3) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$. Более того имеют место априорные оценки*

$$\nu_0 \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q_1; \mathbb{C})} \leq \|Bu\|_{L_2(Q_1; \mathbb{C})}, \quad (1.4)$$

$$\nu_0 \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q_1; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_{Q_1} Bu \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{Re} \int_{Q_1} Bu \overline{\partial_{\bar{z}} v} dx \leq \nu_1 \left(\operatorname{Re} \int_{Q_1} Bu \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_{\bar{z}} v\|_{L_2(Q_1; \mathbb{C})}, \quad (1.6)$$

$$\forall u, v \in W_0(Q_1; \mathbb{C}),$$

где

$$\nu_0 = 1 - k_0, \quad \nu_1 = \left(\frac{1 + k_0}{1 - k_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$Q_1 \subseteq Q$ – любая односвязная подобласть (класса $C^{1+\alpha}$).

(Оценки (1.4) – (1.6) справедливы и для многосвязных областей).

Заметим, что величина

$$\|u\|_{W_0(Q; \mathbb{C})} = \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \quad \left(= \|\partial_z u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \right)$$

задает в подпространстве $W_0(Q; \mathbb{C}) \subset W_2^1(Q; \mathbb{C})$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что последовательность операторов $\{B_k\}$ из класса $\mathcal{B}(k_0, Q)$ G -сходится в области Q к $B \in \mathcal{B}(k_0; Q)$ (и будем писать $G\text{-}\lim B_k = B$, $B_k \xrightarrow{G} B$), если $\{B_k^{-1}\}$ слабо сходится к B^{-1} , где B_k и B операторы краевых задач Римана – Гильберта: $B_k u_k = f \in L_2(Q; \mathbb{C})$, $u_k \in W_0(Q)$, $Bu = f \in L_2(Q; \mathbb{C})$, $u \in W_0(Q)$.

Иначе говоря, G -сходимость означает слабую сходимость решений $u_k \rightharpoonup u$ в $W_0(Q)$ для любой правой части $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$.

Нами в работе [6] доказана

ТЕОРЕМА 2 ([6]). *Класс $\mathcal{B}(k_0; Q)$ обобщенных операторов Бельтрами G -компактен. (Иначе говоря, из любой последовательности $\{B_k\} \subset \mathcal{B}(k_0; Q)$ можно выделить G -сходящуюся в смысле определения 1 подпоследовательность).*

Укажем в виде следствия некоторые свойства коэффициентов, которые сохраняются после перехода к G -пределу.

СЛЕДСТВИЕ 1 ([6]). *Пусть $B_k \xrightarrow{G} B$ в области Q ; $B_k, B \in \mathcal{B}(k_0; Q)$; μ_k, ν_k, μ, ν — коэффициенты B_k, B . Тогда*

1) *если $\nu_k = e^{i\alpha} \mu_k$, $k = 1, 2, \dots$, где $\alpha \in [-\pi, \pi)$ фиксированное число, то $\nu = e^{i\alpha} \mu$;*

2) *если $\nu_k = e^{i\alpha} \bar{\mu}_k$, $k = 1, 2, \dots$, то $\nu = e^{i\alpha} \bar{\mu}$.*

В частности, при $\nu_k = \mu_k$ имеем $\nu = \mu$; при $\nu_k = \bar{\mu}_k - \nu = \bar{\mu}$,

G -сходимость обладает свойством локальности, а именно имеет место

ТЕОРЕМА 3 ([6]). *Пусть $B_k \xrightarrow{G} B$ в области Q и $Q_1 \subseteq Q$ — любая (класса $C^{1+\alpha}$) подобласть. Тогда $B_k \xrightarrow{G} B$ и в области Q_1 .*

G -сходимости $B_k \xrightarrow{G} B$ достаточно для сходимости и других решений из $W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 4 ([6]). *Пусть $B_k u_k = f_k$, $f_k \rightarrow f$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, $u_k \rightharpoonup u$ в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ и пусть $G\text{-}\lim B_k = B$. Тогда $Bu = f$.*

Рассмотрим следующую **краевую задачу Пуанкаре**:

$$Au \equiv \partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu \partial_{zz}^2 u + \nu \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \bar{u} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \quad u \in W(Q), \quad (1.7)$$

где $\mu = \mu(x)$ и $\nu = \nu(x)$ — измеримые в области Q , комплекснозначные функции удовлетворяющие условию ; Q — ограниченная односвязная область плоскости с границей класса $C^{2+\alpha}$.

В дальнейшем класс операторов вида (1.7), (1.2) будем обозначать $A(k_0; Q)$.

В работе [7] доказана следующая

ТЕОРЕМА 5 ([7]). *Краевая задача Пуанкаре (1.7) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$. Более того, имеют место априорные оценки*

$$(1 - k_0) \|\partial_{z\bar{z}}^2 u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \|Au\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq (1 + k_0) \|\partial_{z\bar{z}}^2 u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad (1.8)$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{z\bar{z}}^2 u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q Au \overline{\partial_{z\bar{z}}^2 u} dx, \quad u \in W(Q). \quad (1.9)$$

Заметим, что выражение $\|u\|_{W(Q)} = \|\partial_{z\bar{z}}^2 u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}$, $u \in W(Q)$, задает в подпространстве $W(Q)$ пространства $W_2^2(Q; \mathbb{C})$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^2(Q; \mathbb{C})$ (см. [7]).

2. G -компактность одного класса эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами

Здесь мы рассмотрим вопросы G -сходимости класса $A(k_0; Q)$ эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $A(k_0, Q)$ G -сходится в области Q к $A \in A(k_0; Q)$ (и будем писать $G\text{-}\lim A_k = A$, $A_k \xrightarrow{G} A$), если последовательность $\{A_k^{-1}\}$ слабо сходится к A^{-1} , где A_k и A операторы краевых задач Пуанкаре: $A_k u_k = f \in L_2(Q; \mathbb{C})$, $u_k \in W_0(Q)$, $Au = f \in L_2(Q; \mathbb{C})$, $u \in W_0(Q)$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 6. *Класс $A(k_0; Q)$ G -компактен, то есть из любой последовательности операторов из $A(k_0; Q)$ можно выделить G -сходящуюся подпоследовательность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{A_k\}$ – последовательность из класса $A(k_0; Q)$. Рассмотрим задачу Пуанкаре:

$$\begin{cases} A_k u_k = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u_k \in W(Q). \end{cases} \quad (2.1)$$

Она согласно предыдущей теореме 5, однозначно разрешима. Пусть $v_k = \partial_z u_k$, согласно определению пространств $W(Q)$ и $W_0(Q)$ имеем: $v_k \in W_0(Q)$, и, согласно (2.1), v_k есть решение задачи Римана – Гильберта (Р–Г)

$$\begin{cases} B_k v_k \equiv \partial_{\bar{z}} v_k + \mu_k \partial_z v_k + v_k \partial_{\bar{z}} \bar{v}_k = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ v_k \in W_0(Q) \end{cases} \quad (2.2)$$

Из оценок (1.8), (1.9) следует, что оператор B_k принадлежит классу $B(k_0; Q)$. Так как этот класс G -компактен (см. [6]), то найдется подпоследовательность $\{D_{k'}\} \subset \{D_k\}$, которая G -сходится к оператору $B \in \mathcal{B}(k_0; Q)$. Значит, решение $v_{k'}$ задачи Р–Г (2.2) с $k = k'$ слабо в $W_0(Q)$ сходится к решению G -предельной задачи:

$$\begin{cases} Bv \equiv \partial_{\bar{z}} v + \mu \partial_z v + v \partial_{\bar{z}} \bar{v} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ v \in W_0(Q). \end{cases} \quad (2.3)$$

Из левой части оценок (1.8) для $A = A_{k'}$ получим, что

$$\|\partial_{\bar{z}z}^2 u_{k'}\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq (1 - k_0)^{-1} \|f\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}.$$

Следовательно, $\{u_{k'}\}$ – ограничена в $W(Q)$, значит, последовательность $\{v_{k'}\} = \{\partial_z u_{k'}\}$ – ограничена в $W_0(Q)$. С другой стороны, так как $G\text{-}\lim B_{k'} = B$ в Q , то v_k , слабо сходится к v в $W_0(Q)$, где v решение задачи (2.3). Отсюда следует, что $\{u_{k'}\}$ слабо сходится в $W(Q)$ к $u \in W(Q)$, $\partial_z u = v$. Подставив v в (2.3), получим, что последовательность $A_{k'}$ G -сходится к оператору A , определенному соотношением $Au = B \partial_z u$:

$$Au \equiv \partial_{\bar{z}z}^2 u + \mu \partial_{zz}^2 u + \nu \partial_{\bar{z}z}^2 \bar{u} = f, \quad u \in W(Q),$$

коэффициенты μ и ν удовлетворяют оценке (1.2), ввиду G -компактности класса $\mathcal{B}(k_0; Q)$ (см. [6]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $G\text{-}\lim A_k = A$ в области Q ; $A_k, A \in A(k_0; Q)$; μ_k, ν_k, μ, ν – коэффициенты A_k, A . Тогда:

1. если $\nu_k = e^{i\alpha}\mu_k, \quad k = 1, 2, \dots$, где $\alpha \in [-\pi, \pi)$ – фиксированное число, то $\nu = e^{i\alpha}\mu$;
2. если $\nu_k = e^{i\alpha}\overline{\mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots$, то $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$.

В частности, при $\nu_k = \mu_k$ имеем $\nu = \mu$, при $\nu_k = \overline{\mu_k}$ имеем $\nu = \bar{\mu}$. Черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженной функции.

Следствие доказывается аналогично теореме используя следствие 1.

Аналогично, используя теоремы 7, 8, доказываются следующие утверждения

ТЕОРЕМА 7. Пусть $A_k \xrightarrow{G} A$ в области Q и $Q_1 \subseteq Q$ – любая (класса $C^{2+\alpha}$) подобласть. Тогда $A_k \xrightarrow{G} A$ и в области Q_1 .

G -сходимости $A_k \xrightarrow{G} A$ достаточно для сходимости и других решений из $W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 8. Пусть $A_k u_k = f_k, f_k \rightarrow f$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, $u_k \rightharpoonup u$ в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ и пусть $G\text{-}\lim A_k = A$. Тогда $Au = f$.

3. Усреднение эллиптического оператора с комплекснозначными периодическими коэффициентами

Вопрос об усреднении дифференциальных операторов с частными производными и связанный с ним более общий вопрос о G -сходимости последовательности операторов возник в связи с задачами математической физики. В частности, физические процессы, рассматриваемые в сильно неоднородных средах, описываются дифференциальными уравнениями с частными производными, причем сильная неоднородность этих сред приводит к изучению уравнений с быстро меняющимися коэффициентами. Такие задачи возникают в теории упругости, в теории гетерогенных сред и композитных материалов.

3.1. Понятие усреднения. Рассмотрим семейство операторов $\{A_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$, действующих из $W(Q)$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ и определенных формулой

$$A_\varepsilon u \equiv \partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu^\varepsilon \partial_{zz}^2 u + \nu^\varepsilon \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \bar{u} = f \in L_2(\Omega; \mathbb{C}), \quad u \in W(Q), \quad (3.1)$$

где $0 < \varepsilon \leq 1$ – малый параметр; $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, а μ и ν – измеримые периодические функции, удовлетворяющие следующему условию

$$\text{vrai} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1. \quad (3.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что для семейства $\{A_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ имеет место усреднение, если найдется $A_0 \in A(k_0; Q)$ такой, что $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A_0$ в области Q при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом A_0 называется усредненным оператором (а соответствующее уравнение – усредненным уравнением).

3.2. Неравенство острого угла. Рассмотрим периодическую краевую задачу

$$Au \equiv \partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu \partial_{zz}^2 u + \nu \partial_{z\bar{z}}^2 \bar{u} = f \in L_2(\Omega; C), u \in H^2(\Omega; C), \quad (3.3)$$

где $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ – периодические на всей плоскости функции, удовлетворяющие условию (3.2). Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Для задачи (3.3) имеет место неравенство острого угла

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{z\bar{z}}^2 u|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle Au \overline{\partial_{z\bar{z}}^2 u} \rangle, \quad u \in H^2(\Omega; C), \quad (3.4)$$

где $\langle g \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(x) dx$ – среднее значение g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.4) достаточно доказать для всюду плотного в $H^2(\Omega; \mathbb{C})$ множества гладких (бесконечно дифференцируемых) периодических функций. Умножим $f = Au$ на $\bar{\partial_{z\bar{z}}^2 u}$, интегрируем по квадрату периодов Ω и находим реальную часть. Тогда, с учетом (3.2) легко получим:

$$\langle |\partial_{z\bar{z}}^2 u|^2 \rangle - k_0 \langle |\partial_{zz}^2 u|^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle |\partial_{z\bar{z}}^2 u|^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle Au \overline{\partial_{z\bar{z}}^2 u} \rangle.$$

Из этой оценки следует (3.4) если мы покажем, что

$$\langle |\partial_{zz}^2 u|^2 \rangle = \langle |\partial_{z\bar{z}}^2 u|^2 \rangle. \quad (3.5)$$

Положим $v = \partial_z u = v_1 + iv_2$. Тогда (3.5) эквивалентно

$$\langle |\partial_z v|^2 \rangle = \langle |\partial_{\bar{z}} v|^2 \rangle. \quad (3.6)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} |\Omega| \langle |\partial_z v|^2 \rangle &= \int_{\Omega} |\partial_z v|^2 dx = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \|\nabla v_j\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C})}^2 - \frac{J}{2}, \\ |\Omega| \langle |\partial_{\bar{z}} v|^2 \rangle &= \int_{\Omega} |\partial_{\bar{z}} v|^2 dx = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \|\nabla v_j\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C})}^2 + \frac{J}{2}, \\ J &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Покажем, что здесь J равняется нулю, тем самым равенство (3.6) будет установлено. При помощи интегрирования по частям перебросим производные с v_1 на v_2 . Тогда получим

$$J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 \cos(\angle n x_1) - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_1 \cos(\angle n x_2) \right) ds,$$

где n — внешняя нормаль к границе, $\angle n x_j$ — угол между Ox_j и n , $j = 1, 2$. Так как Ω — квадрат периодов, то на противоположных сторонах квадрата нормали противоположно направлены. С учетом этого и периодичности v_1, v_2 , получим, что J равняется нулю. Лемма доказана.

3.3. Ядро сопряженного оператора. Важную роль при усреднении играет ядро оператора $A^* : L_2(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow H^{-2}$, сопряженного оператору периодической краевой задачи:

$$Au \equiv \partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu \partial_{z\bar{z}}^2 u + \nu \partial_{z\bar{z}}^2 \bar{u} = f \in L_2(\Omega; \mathbb{C}), \quad u \in H^2(\Omega; \mathbb{C}), \quad (3.7)$$

где $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ – периодические на всей плоскости функции, удовлетворяющие условию (3.2). Имеет место

ТЕОРЕМА 9. *Ядро оператора $A^* : L_2(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow H^{-2}(\Omega; \mathbb{C})$ – двумерное подпространство $L_2(\Omega; \mathbb{C})$, причем один из базисов ядра $\{p_1, p_2\}$ удовлетворяет условиям*

$$\langle p_1 \rangle = 1, \langle p_2 \rangle = i. \quad (3.8)$$

Кроме того, в случае $\nu = 0$ базисные векторы можно выбрать так, что

$$p_2 = ip_1. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\widehat{H} = \{u \in H^2(\Omega; \mathbb{C}) \mid \langle u \rangle = 0\} \subset H^2(\Omega; \mathbb{C}).$$

Обозначим через

$$P : L_2(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \widehat{L} = \{f \in L_2(\Omega; \mathbb{C}) \mid \langle f \rangle = 0\}$$

– ортопроектор на подпространство $\widehat{L}$. Привлечением рядов Фурье легко убедиться, что $\partial_{z\bar{z}}^2 : \widehat{H} \rightarrow \widehat{L}$ есть изоморфизм. Тогда из (3.4) получим

$$(1 - k_0) \|f\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C})}^2 \leq (P \circ A \circ (\partial_{z\bar{z}}^2)^{-1} f, f)_{L_2(\Omega; \mathbb{C})} \quad f \in \widehat{L},$$

Это означает, что оператор $\mathcal{B} = P \circ A \circ (\partial_{z\bar{z}}^2)^{-1} : \widehat{L} \rightarrow \widehat{L}$ – коэрцитивный и следовательно, по лемме Лакса – Мильграма [1; гл. 1, § 1], отображение $\mathcal{B} : \widehat{L} \rightarrow \widehat{L}$ – изоморфизм. Тогда и отображение $P \circ A : \widehat{H} \rightarrow \widehat{L}$ – изоморфизм. Отсюда следует, что сужение P на образ $A - \text{Im } A$ устанавливает изоморфизм между подпространствами $\text{Im } A$ и $\widehat{L}$. (Замкнутость $\text{Im } A$ есть следствие (3.4)). Действительно, если $f_1, f_2 \in \text{Im } A$, $f_1 \neq f_2$ и $Pf_1 = Pf_2$, то из (3.4) для $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 такие, что $Au_1 = f_1$, $Au_2 = f_2$, получим $\|u\| = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. Тогда $Au_1 = Au_2 = f_1 = f_2$.

У изоморфных подпространств одинаковые коразмерности. Так как $\widehat{L}$ коразмерности два (напомним, мы рассматриваем пространства над полем $\mathbb{R}$), то образ $\text{Im } A$ также коразмерности два.

Для завершения доказательства теоремы 9 осталось показать, что один из базисов ядра A^* имеет структуру, отмеченную в теореме 9.

Пусть $\{p_1, p_2\}$ – базис $\text{Ker } A^*$, тогда средние $\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle$ одновременно не равны нулю. Иначе, периодическая задача $Au = 1$, $u \in H^2(\Omega; \mathbb{C})$ разрешима. И тогда из (3.4) получим $u = \text{const}$, что невозможно, так как $Au = 1$.

Пусть $\{p_1, p_2\}$ – базис $\text{Ker } A^*$, тогда произведение $\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle \neq 0$. Пусть это не так, $\langle p_1 \rangle = 0$, $\langle p_2 \rangle = a + ib \neq 0$. Положим константу c равной $-b + ia$. Тогда

периодическая задача $Au = c$, $u \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{C})$ разрешима, так как $\operatorname{Re} \langle c \bar{p}_1 \rangle = \operatorname{Re} \langle c \bar{p}_2 \rangle = 0$, но это невозможно в силу (3.4).

Средние значения базисных векторов p_1, p_2 одновременно не могут быть действительными (мнимыми) числами. Иначе, рассмотрим базис $\{q_1, q_2\}$, $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2 - \langle p_2 \rangle \langle p_1 \rangle^{-1} p_1$. Тогда $\langle q_2 \rangle = 0$, что противоречит предыдущему.

Таким образом, любой из базисов $\{p_1, p_2\}$ удовлетворяет условиям: произведение $\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle \neq 0$, $\langle p_1 \rangle = a_1 + ib_1$, $\langle p_2 \rangle = a_2 + ib_2$, a_1 или a_2 не нуль и b_1 или b_2 не нуль. Если $a_1 \neq 0$, то для базиса $\{q_1, q_2\}$, $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2 - a_2 a_1^{-1} p_1$ имеем $\operatorname{Re} \langle q_1 \rangle = a_1 \neq 0$, $\operatorname{Re} \langle q_2 \rangle = 0$. Так что можно считать, с самого начала $\langle p_2 \rangle = ib_2 \neq 0$. Аналогично можно считать, что $b_1 = 0$.

Итак, существует базис $\{q_1, q_2\}$ со свойствами: $\langle q_1 \rangle = a$, $\langle q_2 \rangle = ib$, $ab \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Заменив его на $p_1 = a^{-1} q_1$, $p_2 = b^{-1} q_2$ получим требуемый базис: $\langle p_1 \rangle = 1$, $\langle p_2 \rangle = i$.

Пусть теперь A – оператор Бельтрами ($\nu = 0$). Тогда, в силу линейности A и A^* над полем $\mathbb{C}$, вместе с вектором p_1 и вектор $\bar{p}_2 = ip_1$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker} A^*$. Осталось заметить, что p_1 и ip_1 линейно независимы над полем $\mathbb{R}$. Теорема доказана.

3.4. Об одном интегральном тождестве. В силу того, что $(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \bar{\psi} dx$, $\varphi, \psi \in L_2(\Omega, \mathbb{C})$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega, \mathbb{C})$, имеем

$$\begin{aligned} \langle A^* p, u \rangle &= (Au, p) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} Au \bar{p} dx = \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu \partial_{zz}^2 u + \nu \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \bar{u}) \bar{p} dx = \langle \partial_{z\bar{z}}^2 p + \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 (\bar{\mu} p + \nu \bar{p}), u \rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – значение функционала; производные понимаются в смысле (периодических) распределений.

Из соотношения (3.10) стандартной процедурой, использующей разбиение единицы, получим равенство

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{z\bar{z}}^2 \varphi + \mu \partial_{zz}^2 \varphi + \nu \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \bar{\varphi}) \bar{p} dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \quad (3.11)$$

где p – любой элемент ядра оператора A^* .

Действительно, пусть носитель функции φ есть подмножество ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$. Покроем Q конечным числом областей Q_j , $j = 1, \dots, n$, замыкание каждой из которых принадлежит квадрату периодов Ω_j . И пусть $\psi_1, \dots, \psi_n$ – разбиение единицы, соответствующее этому покрытию, т.е. $\psi_j \in C_0^\infty(Q_j; \mathbb{C})$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1$, $\forall x \in Q$. Обозначим выражение слева в (3.11) через I . Тогда имеем

$$I = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\partial_{z\bar{z}}^2 \sum_{j=1}^n (\varphi \psi_j(x)) + \mu \partial_{zz}^2 \sum_{j=1}^n (\varphi \psi_j(x)) + \overline{\nu \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \sum_{j=1}^n (\varphi \psi_j(x))} \right) \bar{p} dx =$$

$$= \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \int_{\Omega_j} \left(\partial_{z\bar{z}}^2 \Theta_j + \mu \partial_{z\bar{z}}^2 \Theta_j + \nu \overline{\partial_{z\bar{z}}^2 \Theta_j} \right) \bar{p} dx,$$

где $\Theta_j = \varphi \psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j; \mathbb{C})$. Функцию Θ_j , $j = 1, \dots, n$, периодически продолжим на всю плоскость. Тогда в силу (3.10) и $p \in \operatorname{Ker} A^*$ имеем

$$I = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \int_{\Omega_j} \bar{p} A \Theta_j dx = \sum_{j=1}^n |\Omega_j| \operatorname{Re} \langle \bar{p} A \Theta_j \rangle = 0.$$

Соотношение (3.11) доказано.

Отсюда следует, что сопряженное однородное уравнение дается равенством

$$-A^* p \equiv \partial_{z\bar{z}}^2 p + \partial_{z\bar{z}}^2 (\bar{\mu} p + \nu \bar{p}) = 0, \quad (3.12)$$

где производные понимаются в смысле обычных распределений.

3.5. Усреднение. Сформулируем теперь теорему об усреднении.

ТЕОРЕМА 10. *Для семейства (3.1) имеет место усреднение, причем коэффициенты усредненного оператора*

$$A_0 u \equiv \partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu^0 \partial_{z\bar{z}}^2 u + \nu^0 \partial_{z\bar{z}}^2 \bar{u}, \quad u \in \mathcal{W}(Q),$$

постоянные μ^0 и ν^0 даются равенствами

$$\mu^0 = \langle \mu \mathcal{L} + \bar{\nu} \mathcal{P} \rangle, \quad \nu^0 = \langle \bar{\mu} \mathcal{P} + \nu \mathcal{L} \rangle,$$

где

$$\mathcal{P} = 2^{-1} (p_1 + ip_2), \quad \mathcal{L} = 2^{-1} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2),$$

p_1, p_2 – базисные векторы из теоремы 9.

При $\nu = 0$ коэффициент ν^0 усредненного оператора также равен нулю, а $\mu^0 = \langle \mu \bar{p}_1 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{A} \in \mathcal{B}_2(k_0; Q)$ любой из G -предельных в области операторов семейства $\{A_\varepsilon\}$, т. е. $A_{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} \hat{A}$. Достаточно показать, что $\hat{A} = A_0$. С этой целью рассмотрим задачу Пуанкаре

$$\partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu^\varepsilon \partial_{z\bar{z}}^2 u + \nu^\varepsilon \partial_{z\bar{z}}^2 \bar{u} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \quad u_\varepsilon \in W(Q), \quad (3.13)$$

где $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, $0 < \varepsilon \leq 1$.

Пусть u_ε – решение этой задачи. Умножим равенство (3.13) на функцию

$$\overline{p_1^\varepsilon(x)} \psi(x) = \overline{p_1(\varepsilon^{-1}x)} \psi(x),$$

где $p_1 = p_1(x)$, $\langle p_1 \rangle = 1$ – первый из базисных элементов ядра $\operatorname{Ker} A^*$ (см. теорему 9), $\psi \in C_0^\infty(Q)$ – действительная функция. Тогда после интегрирования по Q в силу равенства $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$ легко получим

$$\operatorname{Re} \int_Q \left(\partial_{z\bar{z}}^2 (u_\varepsilon \psi) + \mu^\varepsilon \partial_{z\bar{z}}^2 (u_\varepsilon \psi) + \nu^\varepsilon \partial_{z\bar{z}}^2 (\bar{u}_\varepsilon \psi) \right) \overline{p_1^\varepsilon} dx -$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{Re} \int_Q (\overline{p_1^\varepsilon} u_\varepsilon \partial_{z\bar{z}} \psi + \overline{p_1^\varepsilon} \partial_z u_\varepsilon \partial_{\bar{z}} \psi + \overline{p_1^\varepsilon} \partial_z \psi \partial_{\bar{z}}^2 u_\varepsilon + \\
& + \overline{p_1^\varepsilon} \mu^\varepsilon u_\varepsilon \partial_{zz}^2 \psi + \overline{p_1^\varepsilon} \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon \partial_z \psi + \overline{p_1^\varepsilon} \mu^\varepsilon \partial_z \psi \partial_z u_\varepsilon + \\
& + p_1^\varepsilon \overline{\nu^\varepsilon} u_\varepsilon \partial_{z\bar{z}} \psi + p_1^\varepsilon \overline{\nu^\varepsilon} \partial_z u_\varepsilon \partial_z \psi + p_1^\varepsilon \overline{\nu^\varepsilon} \partial_z \psi \partial_z u_\varepsilon) dx = \\
& = \operatorname{Re} \int_Q p_1^\varepsilon \psi f dx.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Покажем, что первое слагаемое слева равняется нулю. Положим в равенстве (3.11) $\phi(x) = \psi(\varepsilon x)$, $0 < \varepsilon \leq 1$, где $\psi(x)$ – финитная функция. Тогда после замены переменной $\varepsilon x \mapsto x$ легко получим

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{z\bar{z}}^2 \psi + \mu(\varepsilon^{-1}x) \partial_{zz}^2 \psi + \nu(\varepsilon^{-1}x) \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \bar{\psi}) \overline{p(\varepsilon^{-1}x)} dx = 0, \tag{3.15}$$

где ψ – любая финитная, бесконечно дифференцируемая функция.

Соотношение (3.15) имеет место и для любой финитной функции $\psi \in W_2^2(Q; \mathbb{C})$, так как в множестве таких функций плотно множество $C_0^\infty(Q; \mathbb{C})$. Теперь заменим в (3.15) ψ на $u_\varepsilon \psi$ и получим, что первое слагаемое в (3.14) равняется нулю.

Отсюда, так как $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, $\partial_z u_{\varepsilon_k} \rightarrow \partial_z u$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, $\partial_{\bar{z}} u_{\varepsilon_k} \rightarrow \partial_{\bar{z}} u$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, где u – решение G -предельной задачи $\hat{A}u = f$, $u \in \mathcal{W}(Q; \mathbb{C})$; $\mu^{\varepsilon_k} \overline{p_1^{\varepsilon_k}} \rightharpoonup \langle \mu \overline{p_1} \rangle$, $\overline{\nu^{\varepsilon_k}} p_1^{\varepsilon_k} \rightharpoonup \langle \bar{\nu} p_1 \rangle$, $\overline{p_1^{\varepsilon_k}} \rightharpoonup \langle \overline{p_1} \rangle$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ после предельного перехода по последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{Re} \int_Q (u \partial_{z\bar{z}} \psi + \partial_z u \partial_{\bar{z}} \psi + \partial_z \psi \partial_z u + \\
& + \langle \overline{p_1} \mu \rangle u \partial_{zz}^2 \psi + \langle \overline{p_1} \mu \rangle \partial_z u \partial_z \psi + \langle \overline{p_1} \mu \rangle \partial_z \psi \partial_z u + \\
& + \langle p_1 \bar{\nu} \rangle u \partial_{z\bar{z}}^2 \psi + \langle p_1 \bar{\nu} \rangle \partial_z u \partial_z \psi + \langle p_1 \bar{\nu} \rangle \partial_z \psi \partial_z u) dx = \\
& = \operatorname{Re} \int_Q \psi f dx.
\end{aligned}$$

Под интегралом слева перебросим производные с u на ψ при помощи интегрирования по частям. В результате получим

$$\operatorname{Re} \int_Q (\partial_{z\bar{z}}^2 u + \langle \overline{p_1} \mu \rangle \partial_{zz}^2 u + \langle p_1 \bar{\nu} \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u) \psi dx = \operatorname{Re} \int_Q \psi f dx.$$

Ввиду того, что ψ – действительная функция, имеем

$$\int_Q \psi \operatorname{Re} (\partial_{z\bar{z}}^2 u + \langle \mu \overline{p_1} + \bar{\nu} p_1 \rangle \partial_{zz}^2 u) dx = \int_Q \psi \operatorname{Re} f dx.$$

Отсюда в силу произвольности ψ , получим

$$\operatorname{Re} (\partial_{z\bar{z}}^2 u + \langle \mu \overline{p_1} + \bar{\nu} p_1 \rangle \partial_{zz}^2 u) = \operatorname{Re} f. \tag{3.16}$$

Аналогично, с учетом того, что $\langle p_2 \rangle = i$, $\langle \bar{p}_2 \rangle = -i$, получим еще одно соотношение

$$\operatorname{Re} \left(-i \partial_{z\bar{z}}^2 u + \langle \mu \bar{p}_2 + \bar{\nu} p_2 \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u \right) = \operatorname{Re}(-if),$$

которое эквивалентно соотношению

$$\operatorname{Re} \left(-i (\partial_{z\bar{z}}^2 u + i \langle \mu \bar{p}_2 + \bar{\nu} p_2 \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u) \right) = \operatorname{Re}(-if)$$

или что тоже самое

$$\operatorname{Im} \left(\partial_{z\bar{z}}^2 u + i \langle \mu \bar{p}_2 + \bar{\nu} p_2 \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u \right) = \operatorname{Im} f. \quad (3.17)$$

Умножим (3.17) на i и прибавим к (3.16), тогда имеем

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\partial_{z\bar{z}}^2 u + \langle \mu \bar{p}_1 + \bar{\nu} p_1 \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u \right) + \\ & + i \operatorname{Im} \left(\partial_{z\bar{z}}^2 u + \langle i \bar{p}_2 \mu + p_2 \bar{\nu} \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u \right) = f. \end{aligned}$$

С учетом того, что $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, а $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, имеем

$$\begin{aligned} & \partial_{z\bar{z}}^2 u + \frac{1}{2} \left(\langle \mu \bar{p}_1 + \bar{\nu} p_1 \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u + \langle \bar{\mu} p_1 + \nu \bar{p}_1 \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 \bar{u} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\langle i \bar{p}_2 \mu + i p_2 \bar{\nu} \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u + \langle i p_2 \bar{\mu} + i \bar{p}_2 \nu \rangle \partial_{z\bar{z}}^2 \bar{u} \right) = f. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} & \partial_{z\bar{z}}^2 u + \left\langle \mu \frac{\bar{p}_1 + i \bar{p}_2}{2} + \bar{\nu} \frac{p_1 + i p_2}{2} \right\rangle \partial_{z\bar{z}}^2 u + \\ & + \left\langle \bar{\mu} \frac{p_1 + i p_2}{2} + \nu \frac{\bar{p}_1 + i \bar{p}_2}{2} \right\rangle \partial_{z\bar{z}}^2 \bar{u} = f, \end{aligned}$$

т. е.

$$\partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu^0 \partial_{z\bar{z}}^2 u + \nu^0 \partial_{z\bar{z}}^2 \bar{u} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}).$$

Отсюда в силу единственности G -предела получим $\hat{A} = A_0$.

Итак, любой из G -пределов семейства $\{A_\varepsilon\}$ совпадает с A_0 . Отсюда легко следует, что $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Действительно, выкинем из семейства $\{A_\varepsilon\}$ все G -сходящиеся подпоследовательности (они сходятся к A_0), в результате останется не более конечного числа элементов (иначе, если количество оставшихся элементов бесконечно, то из него, в силу G -компактности, можно выделить G -сходящуюся подпоследовательность). Конечное число элементов, естественно, не влияет на G -сходимость семейства $\{A_\varepsilon\}$.

В случае, когда $\nu = 0$, то по теореме 9 $p_2 = ip_1$, поэтому $\mathcal{P} = 2^{-1}(p_1 + ip_2) = 2^{-1}(p_1 + i \cdot ip_1) = 0$, $\mathcal{L} = 2^{-1}(\bar{p}_1 + i \bar{p}_2) = 2^{-1}(\bar{p}_1 + \bar{p}_1) = p_1$. Значит $\mu^0 = \langle \mu \mathcal{L} \rangle = \langle \mu \bar{p}_1 \rangle$, $\nu^0 = \langle \bar{\mu} \cdot 0 + 0 \cdot \mathcal{L} \rangle = 0$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть коэффициенты μ и ν оператора (3.1) связаны одним из двух соотношений: $\nu = e^{i\alpha}\mu$, $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$, где $\alpha \in [-\pi, \pi)$ - постоянная. Тогда аналогичную структуру имеет и усредненный оператор. Подробнее:

(i) при $\nu = e^{i\alpha}\mu$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha}\mu^0$;

(ii) при $\nu = e^{i\alpha}\bar{\mu}$ имеем $\nu^0 = e^{i\alpha}\bar{\mu}^0$; если при этом $\alpha \neq -\pi$, то $\mu^0 = \frac{\langle \mu Re(p_1 e^{-i\alpha/2}) \rangle}{\cos(\alpha/2)}$,

если $\alpha \neq 0$, то $\mu^0 = \frac{\langle \mu Re(p_2 e^{-i\alpha/2}) \rangle}{\sin(\alpha/2)}$, где p_1, p_2 - базисные векторы из теоремы 5.

Например, при $\alpha \neq -\pi$ имеем

$$\mu^0 = \langle \mu(F + e^{-i\alpha}P) \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \mu(\bar{p}_1 + e^{-i\alpha}p_1) \left(1 - i \frac{Re q}{Im q}\right) \right\rangle = \frac{\langle \mu Re(p_1 e^{-i\alpha/2}) \rangle}{\cos(\alpha/2)}.$$

Список литературы

- [1] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993. (англ. пер.: V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Olejnik Homogenization of differential operators and integral functionals. Springer-Verlag, Berlin, 1994.)
- [2] Жиков В. В., Сиражуудинов М. М. О G -компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 4. С. 718–733. (англ. пер.: V. V. Zhikov, M. M. Sirazhudinov. On G -compactness of a class of nondivergence elliptic operators of second order // Math. USSR-Izv. 1982. Vol. 19. N 1. Pp. 27–40.)
- [3] Жиков В. В., Сиражуудинов М. М. Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши // Матем. сб. 1981. Т. 116(158), № 2(10). С. 166–186. (англ. пер.: V. V. Zhikov, M. M. Sirazhudinov The averaging of nondivergence second order elliptic and parabolic operators and the stabilization of solutions of the Cauchy problem, Math. USSR-Sb. 1983. Vol. 44. N 2. Pp. 149–166.)
- [4] Сиражуудинов М.М. G -сходимость и усреднение некоторых недивергентных эллиптических операторов высокого порядка // Дифференц. Уравнения. 1983. Т. 19, № 11. С. 1949–1956. (англ. пер.: M. M. Sirazhudinov The G -convergence and averaging of some high-order nondivergence elliptic operators, Differential Equations. 1983. Vol. 19. N 11. Pp. 1429–1435.)
- [5] Сиражуудинов М.М. О G -компактности одного класса эллиптических систем первого порядка // Дифференц. Уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 298–305. (англ. пер.: M. M. Sirazhudinov G -compactness of a class of first-order elliptic systems // Differential Equations. 1990. Vol. 26. N 2. Pp. 229–235.)
- [6] Сиражуудинов М.М. О G -сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами // Мат. сб. 2008. Т. 199, №5. С. 127–158.
- [7] Джамалудинова С. П. Задача Пуанкаре для одного эллиптического уравнения второго порядка // Вестник ДГУ. 2013. Вып. 1. С. 65–67.
- [8] Сиражуудинов М.М., Джамалудинова С.П. О G -компактности одного класса эллиптических операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами // Вестник ДГУ. 2014. Вып. 1. С. 77–80.
- [9] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. 1988.

М. М. Сиражудинов (M. M. Sirazhudinov)

Дагестанский научный центр РАН

E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Поступила в редакцию

24.11.2014

С. П. Джамалудинова (S. P. Dzhamaludinova)

Дагестанский государственный университет