УДК 517.587:519.1

А. М. Магомедов

Непрерывное участие объектов в расписании с предписанными операциями

Получены эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия существования непрерывного расписания длительности 3. Рассмотрены некоторые связи между расписаниями, реберными раскрасками графа и паросочетаниями.

Библиография: 20 названий.

Effectively verifiable necessary and sufficient conditions for existence of continuous schedule by length 3 were obtained. Some relationships between scheduling, edge coloring and graph matchings were considered.

Bibliography: 20 items.

Ключевые слова: расписание, интервальная реберная раскраска, двудольный граф, паросочетание.

Keywords: schedule, interval edge coloring, bipartite graph, matching.

Введение

Все использованные в данной статье, но не определенные в ней обозначения и понятия соответствуют принятым в монографии [18]. Множества вершин и рёбер графа G будем обозначать $V(G)$ и $E(G)$ соответственно, степень вершины v и максимальную степень вершины графа — $d_G v$ и $\Delta(G)$.

Методы теории графов успешно применяются для исследования задач о расписаниях. В свою очередь, исследования в области теории расписаний приводят к появлению новых методов и даже целых направлений в теории графов. Например, проблема 4-х красок возникла в связи с задачами теории расписаний и разбиений [11; с. 110].

Для расписания взаимодействия объектов множества двудольной природы с предписанными операциями важное значение имеет проблема оптимизации как общей длительности расписания, так и времени участия в расписании каждого из объектов.

В пункте 1 для оптимизации некоторых частных случаев расписаний применены методы интервальной реберной раскраски.

В пункте 2 задача оптимизации расписания длительности 3 решена с применением реберно-вершинных инцидентных паросочетаний.

1. Реберные раскраски

1.1. Правильная и интервальная раскраски. Задачу составления расписания можно свести к задаче правильной раскраски графа G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Правильной t -раскраской графа $G = (V, E)$ называется сюръекция

$$c: E \rightarrow \{1, \dots, t\},$$

такая, что $c(e_i) \neq c(e_j)$ для любых смежных ребер $e_i, e_j \in E$. При этом $c(e)$ называется цветом ребра $e \in E$.

Наименьшее t , для которого правильная t -раскраска графа существует, обозначается через χ' (реберное хроматическое число). Задача составления расписания наименьшей длительности равносильна задаче правильной раскраски графа $G = (X, Y, E)$ в цвета $1, \dots, \chi'$.

Мощность множества вершин и наибольшую степень вершины графа будем обозначать через n и Δ соответственно, полный граф с 3 вершинами — через K_3 . Известно [10], что $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$.

Для графа K_3 $\chi' = \Delta + 1$. Согласно теореме Кенига о реберной раскраске [12; с. 80] $\chi' = \Delta$ для любого двудольного графа.

В [8] доказано, что задача проверки равенства $\chi' = \Delta$ NP -полна даже для кубических графов.

В условиях запрета простоев для объектов, участвующих в расписании, приходим к задаче *об интервальной раскраске*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Правильная t -раскраска c графа $G = (V, E)$ называется интервальной в вершине $v \in V$, если цвета, представленные в вершине v , образуют интервал, и интервальной t -раскраской графа G , если раскраска c интервальна в каждой вершине $v \in V$. Если для заданного t интервальная t -раскраска графа существует, то граф называется интервально t -раскрашиваемым. Если при каком-либо t граф интервально t -раскрашиваем, то граф называется интервально-раскрашиваемым.

Граф K_3 не является интервально-раскрашиваемым. Любой однородный двудольный граф интервально Δ -раскрашиваем.

Термин «интервальная раскраска» впервые был введен в [9] в связи с задачей устранения «окон» в расписании учебных занятий. NP -полнота ряда задач раскраски графов доказывается сведением к ним известной NP -полной задачи «Составление учебного расписания» [2].

Всякий интервально-раскрашиваемый граф допускает правильную Δ -раскраску [9]. Задача об интервальной раскраске графа NP -полна [9]; более того, задача NP -полна и в случае двудольного графа [19].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Двудольный граф $G = (X, Y, E)$ называется (α, β) -бирегулярным, если степень каждой вершины множества X равна α , степень каждой вершины множества Y равна β .

В [4] показано, что задача об интервальной Δ -раскрашиваемости двудольного графа разрешима за полиномиальное время при $\Delta \leq 4$ и NP -полна при

$\Delta = 5$. В [1] установлена NP -полнота задачи об интервальной Δ -раскрашиваемости $(6,3)$ -бирегулярного графа.

В [13] упоминается $(6,3)$ -бирегулярный граф $G = (X, Y, E)$ с $n = 60$, не обладающий кубическим подграфом, включающим множество вершин X (легко доказать, что такой граф не допускает интервальной 6-раскраски). При нечетном Δ любой $(\Delta, 2)$ -бирегулярный граф интервально $(\Delta + 1)$ -раскрашиваем [7].

С привлечением компьютерных вычислений в [3] доказано, что каждый двудольный граф с $n \leq 14$ интервально-раскрашиваем. Двудольные графы $G = (X, Y, E)$ с небольшими значениями Δ и n , не допускающие интервальной раскраски, были построены следующими авторами: С.В. Севастьянов ($\Delta = 21, n = 28$), М. Malafiejcki ($\Delta = 15, n = 19$), А. Hertz ($\Delta = 14, n = 23$), D. de Werra ($\Delta = 14, n = 21$), Р. Erdős ($\Delta = 13, n = 27$).

Заметим, что в каждом из перечисленных примеров $\min\{|X|, |Y|\} > 3$. В [5] доказано, что если $|X| \leq 3$, то для любого простого двудольного графа $G = (X, Y, E)$ существует интервальная раскраска.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ни в одном из этих примеров граф $G = (X, Y, E)$ не является бирегулярным, но каждый из них «близок» к бирегулярному графу в следующем смысле: степени всех вершин множества X (за исключением малого количества вершин) равны некоторому α , а степени всех вершин множества Y равны некоторому β .

В одной из первых работ по интервальной раскраске двудольных графов [6] указаны следующие классы интервально-раскрашиваемых двудольных графов: полные графы, графы с $\Delta \leq 3$ и $(\Delta, 2)$ -бирегулярные графы с четным Δ .

1.2. Интервальная Δ -раскраска двудольного мультиграфа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Набор всех ребер заданного двудольного мультиграфа $G = (X, Y, E)$ с концами в вершинах x_i и y_j будем называть пучком и обозначать через E_{ij} . Интервальную раскраску мультиграфа будем называть интервальной в пучке, если цвета ребер пучка различны и образуют интервал.

Задача об интервальной Δ -раскрашиваемости двудольного мультиграфа

Условие. Задан двудольный мультиграф $G = (X, Y, E)$, $X = \{x_1, x_2\}$, $d_G x_1 = d_G x_2 = \Delta$, $d_G y \leq \lceil \Delta/2 \rceil$ для каждой вершины $y \in Y$.

Вопрос. Существует ли интервальная Δ -раскраска мультиграфа G , интервальная в каждом пучке?

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Задача об интервальной Δ -раскрашиваемости двудольного мультиграфа $G = (X, Y, E)$ NP -полна (даже при $|X| = 2$).*

До сих пор неизвестно, верна ли гипотеза об интервальной раскрашиваемости любого простого бирегулярного графа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Существует простой $(6,3)$ -бирегулярный граф G , не допускающий интервальной 6-раскраски.*

Построение $(6,3)$ -бирегулярного мультиграфа, не обладающего интервальной Δ -раскраской, тривиально. Например, граф $G = (X, Y, E)$, где

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, множество ребер E задано списками смежности: $y_1(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3)$, $y_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_4)$, не обладает интервальной 6-раскраской.

2. Рёберно-вершинные инцидентные паросочетания

2.1. Сбалансированное разбиение на примитивы. Для цикломатического числа $|E(G)| - |V(G)| + 1$ связного графа G примем обозначение $\gamma(G)$.

Задача построения непрерывных расписаний в общем виде относится к классу NP-полных задач. Для одного частного случая, когда количество занятий в каждом классе равно пяти, а количество занятий каждого учителя — двум, условия существования расписания длины 5 без «окон» для учителей получены в [15].

Связный граф G будем называть *примитивом*, если $\gamma(G) \leq 1$ и $\Delta(G) = 3$. Пусть G — связный граф, такой, что $\Delta(G) = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}^+$. Разбиение графа G на p рёберно-непересекающихся примитивов G_i ($i = 1, \dots, p$) будем называть *сбалансированным разбиением на примитивы*, если для каждой вершины v графа G и для каждого $i = 1, \dots, p$ в примитив G_i включены $\lceil d_G v / p \rceil$ либо $\lfloor d_G v / p \rfloor$ рёбер, инцидентных вершине v . Сбалансированные разбиения на примитивы востребованы в задачах оптимизации расписаний и интервальных раскрасок графов.

ТЕОРЕМА 1 [16]. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{Z}^+$). Граф G допускает сбалансированное разбиение на примитивы тогда и только тогда, когда для каждого подграфа G' графа G справедливо неравенство

$$|E(G')| \leq p|V(G')|. \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2 [17]. Проверка условий (2.1) для всех подграфов графа G может быть выполнена за время $O(|V(G)|^3 \log |V(G)|)$.

Из теоремы 1 видна актуальность рассмотрения случая, когда граф G является примитивом. Этому случаю и посвящен данный пункт. Найдены эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия существования непрерывного расписания длительности 3, показано применение рёберно-вершинных инцидентных паросочетаний к решению задачи оптимизации расписания.

2.2. Рёберно-вершинные инцидентные паросочетания и оптимизация расписания. Пусть исходные данные к школьному расписанию учебных занятий заданы связным графом G , $\Delta(G) = 3$; каждое ребро e соответствует учителю $t = t(e)$, а концевые вершины ребра e — классам $c_1(t)$ и $c_2(t)$, в каждом из которых учитель t должен провести по одному занятию. Требуется выяснить существование расписания длины 3, в котором учителя и классы не имеют «окон».

Инъективное отображение $E(G) \rightarrow V(G)$ множества рёбер графа в множество вершин, такое, что каждое ребро отображается в одну из своих инцидентных вершин, называется *рёберно-вершинным инцидентным паросочетанием* (*rpn*) графа G . Понятно, что для существования у графа G *rpn* необходимо

выполнение неравенства $|E(G)| \leq |V(G)|$, равносильного, очевидно, неравенству

$$\gamma(G) \leq 1. \quad (2.2)$$

Другими словами, для существования *рвп* необходимо, чтобы граф G содержал не более одного цикла. Это условие оказывается и достаточным.

Предложение. Условие (2.2) необходимо и достаточно для существования *рвп* у графа G .

Замечание 2. Заметим, что ограничение $\Delta(G) = 3$ в доказательстве утверждения не использовано, другими словами, утверждение 1 справедливо для любого $\Delta(G)$. Вопросы существования *рвп* и других, близких по смыслу паросочетаний рассмотрены в [18; с. 93-94].

ТЕОРЕМА 3. Для существования непрерывного расписания длины 3, соответствующего связному графу G с $\Delta(G) = 3$, необходимо и достаточно выполнение условия $\gamma(G) \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть условие (2.2) выполнено. Если G не является деревом, то существует непрерывное расписание длины 3, во втором занятии которого задействованы не только все учителя (для непрерывного расписания длины 3 и с двумя занятиями у каждого учителя это свойство, очевидно, всегда выполнено), но и все классы. Если же G — дерево, v_0 — произвольно выбранная вершина G , а c_0 — класс, соответствующий вершине v_0 , то существует непрерывное расписание длины 3, во втором занятии которого задействованы все учителя и все классы, отличные от c_0 .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если условие (2.2) выполнено, то существует непрерывное расписание длины 3, где третье занятие проводится лишь в тех классах, которые соответствуют вершинам степени 3.

2.3. Непрерывные расписания длины $\Delta = 2^p$. Пусть теперь исходные данные к «школьному» расписанию учебных занятий заданы регулярным связным графом G степени $\Delta = 4$ или, в более общем случае, $\Delta = 2^p$, где $p \in \mathbb{Z}^+$. Утверждение о существовании непрерывного расписания длины Δ в общем случае четного Δ равносильно известной теореме Петерсена о факторизации (по-прежнему предполагается, что каждому учителю запланированы точно два урока). Для нетривиального частного случая $\Delta = 2^p$ предложим элементарное доказательство этой классической теоремы.

Напомним формулировку теоремы: для разбиения связного графа $G = (V, E)$ на 2-факторы необходимо и достаточно, чтобы G был регулярным графом четной степени Δ .

Условие необходимости тривиально. При $\Delta = 4$ доказательство достаточности также несложно. В самом деле, тогда граф G является эйлеровым. Из очевидных соотношений:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G v = 4|V|$$

следует, что $|E|$ чётно. Выполним обход эйлера цикла, начиная с произвольной вершины v_0 и поочередно помечивая ребра цикла метками 1 и 2. Из чётности $|E|$ следует, что каждой вершине графа (в частности, и v_0) инцидентны два ребра, помеченных 1, и два ребра, помеченных 2. Таким образом, граф G разбивается на два 2-фактора: $G_i = (V, E_i)$, где E_i — набор ребер, помеченных i ; $i = 1, 2$.

Пусть теперь $\Delta = 2^p$, где p — целое положительное. Пока $p > 1$, выполним, как и выше, помечивание ребер метками 1 и 2 и присвоение

$$p := p - 1,$$

получая каждый раз разбиение графа на два 2^p -фактора (с уменьшенным значением p). В результате получим искомое разбиение исходного графа на 2-факторы.

Список литературы

- [1] Asratian A.S., Casselgren C.J. Some results on interval edge colorings of (α, β) -biregular bipartite graphs // Department Math. 2007. Linköping University S-581 83. Linköping, Sweden.
- [2] Even S., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and integral multi-commodity flow problems // SIAM J. Comput. 1976. V. 5. N 4. Pp. 691–703.
- [3] Giaro K. Compact task scheduling on dedicated processors with no waiting period (in Polish) / PhD thesis, Technical University of Gdansk, IETI Faculty. Gdansk. 1999.
- [4] Giaro K. The complexity of consecutive Δ -coloring of bipartite graphs: 4 is easy, 5 is hard // Ars Combin. 1997. V. 47. Pp. 287–298.
- [5] Giaro K., Kubale M., Malafiejcki M. On the deficiency of bipartite graphs // Discrete Appl. Math. 94. Gdansk. 1999. Pp. 193–203.
- [6] Hansen H.M. Scheduling with minimum waiting periods (In Danish) // Master Thesis, Odense University. Odense, Denmark. 1992.
- [7] Hanson D., Loten C.O.M., Toft B. On interval colourings of bi-regular bipartite graphs // Ars Combinat. 1998. V. 50. Pp. 23–32.
- [8] Holyer I. The NP -completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10. N 4. Pp. 718–720.
- [9] Асратян А.С., Камалян Р.Р. Интервальные раскраски рёбер мультиграфа / Прикладная математика. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. 1987. С. 25–34.
- [10] Визинг В.Г. Об оценке хроматического класса p -графа // Дискретный анализ. Сб. науч. тр. Вып. 3. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1964. С. 25–30.
- [11] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
- [12] Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. Пер. с англ. М.: Мир, 1998.
- [13] Магомедов А.М. К вопросу об условиях уплотнения матрицы из 6 столбцов. М., 1991. Деп. в ВИНТИ.
- [14] Магомедов А.М. Условия и алгоритм уплотнения матрицы из 4 столбцов. М., 1992. Деп. в ВИНТИ, № 175–В92.
- [15] Магомедов А.М., Магомедов Т.А. Интервальная на одной доле правильная рёберная 5-раскраска двудольного графа // ПДМ / Раздел «Прикладная теория графов». Томск. 2011. № 5. С. 85–91.

- [16] Магомедов А.М., Сапоженко А.А. Условия существования непрерывных расписаний длительности пять // Вестник МГУ, сер. Вычислительная математика и кибернетика. 2010. № 1. С. 39–44.
- [17] Магомедов А.М., Магомедов Т.А. О приложении алгоритма вычисления подграфа максимальной плотности к задаче оптимизации расписания // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 2. С. 313–315.
- [18] Оре О. Теория графов. М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.
- [19] Севастьянов С.В. Об интервальной раскрашиваемости рёбер двудольного графа // Методы дискретного анализа. 1990. Т. 50. С. 61–72.
- [20] Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989.

А. М. Магомедов (A. M. Magomedov)

Дагестанский научный центр РАН

E-mail: magomedtagirl@yandex.ru

Поступила в редакцию

13.11.2014