УДК 519.64+519.65

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма методом коллокационных рациональных сплайн-функций

Для произвольных сеток узлов получено приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода в виде коллокационной рациональной сплайн-функции. Представлены оценки скорости равномерной сходимости приближенных решений к точному решению из класса гладкости C^r для $r = 0, 1, 2$.

Библиография: 14 названий.

For arbitrary grids of nodes, an approximate solution of the integral equation Fredholm of the second kind in the form of a collocation rational spline function is obtained. Estimates of the rate of uniform convergence of approximate solutions to the exact solution from the smoothness class C^r for $r = 0, 1, 2$ are presented.

Bibliography: 14 items.

Ключевые слова: рациональные сплайн-функции, интерполяционные сплайн-функции, интегральное уравнение Фредгольма, приближенное решение интегральных уравнений

Keywords: rational spline-function, interpolating spline functions, Fredholm integral equations, approximate solution of integral equations

Введение

Многие непрерывно текущие процессы физического характера, химических реакций, экологии и др., как хорошо известно, моделируются с привлечением интегральных уравнений. Учитывая, что к таким уравнениям точные методы решения не всегда применимы, актуальным остается вопрос об эффективных приближенных методах их решения. При этом в случае наличия элементов неопределенности в изучаемых процессах востребованы уравнения с параметрами, а если предлагается приближенное решение, то желательно, чтобы это решение также содержало некоторые управляемые параметры.

В данной работе изучается вопрос приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = \varphi(x), \quad x \in [a,b], \tag{1}$$

с помощью сплайн-функций относительно рациональных интерполянтов с параметрами.

Правую часть $\varphi(x)$ и ядро $K(x,t)$ полагаем непрерывными функциями соответственно на отрезке $[a,b]$ и прямоугольнике $[a,b] \times [a,b]$, а величину λ – действительным параметром, и при этом считаем, что уравнение (1) имеет единственное решение $y(x)$, непрерывное на отрезке $[a,b]$.

Схема приближенного решения интегральных уравнений вида (1) с помощью кубических сплайнов в общих чертах описана в [1, гл. II, п.2.8].

В [2, гл.VI, п.3] с помощью периодических кубических и параболических сплайнов в случае равномерных сеток узлов дано приближенное решение уравнений вида (1) и изучена скорость сходимости приближенных решений к точному.

Оценка погрешности приближенного решения уравнений вида (1) периодическими полиномиальными сплайнами по равномерным сеткам узлов в интегральных метриках исследована в [3, гл. 5, п.5.1].

Как известно [2, 4], классические полиномиальные сплайны непрерывных функций в случае последовательностей произвольных сеток узлов с диаметрами, стремящимися к нулю, могут не сходиться.

Известно также [5], что последовательность сплайн-функций относительно рациональных трехточечных интерполянтов для любой непрерывной на данном отрезке функции в случае любой последовательности сеток узлов с диаметрами, стремящимися к нулю, сходится равномерно на этом отрезке.

В данной работе рассматриваются произвольные узлы, точнее, предлагается приближенное решение интегральных уравнений вида (1), имеющих единственное решение, с помощью рациональных сплайн-функций в случае произвольных сеток узлов и получена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному в зависимости от гладкостных свойств точного решения.

Отметим, что интегральные уравнения имеют многочисленные приложения самого разного характера. В связи, в частности, с этим разработаны различные методы их решения, некоторые из которых приведены также в [6–12].

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Для сетки произвольных узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ положим $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$, и с параметром $\mu > 0$ построим набор чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ таких, что

$$g_i = \begin{cases} x_{i+1} + \mu h_{i+1}, & \text{если } h_{i+1} \leqslant h_i, \\ x_{i-1} - \mu h_i, & \text{при } h_{i+1} > h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \tag{2}$$

Для функции $f(x)$, определенной на сетке узлов Δ, при $i = 1, 2, \dots, N-1$ рассмотрим рациональные интерполянты

$$R_i(x) = R_i(x, f) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i} \tag{3}$$

такие, что $R_i(x_j) = f(x_j)$ для $j = i-1, i, i+1$. Из этих условий с использованием разделенных разностей имеем

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned}$$

Будем считать также, что

$$\begin{aligned} R_0(x, f) &\equiv R_1(x, f), \\ R_N(x, f) &\equiv R_{N-1}(x, f). \end{aligned}$$

Всюду ниже для натурального r при $i = 1, 2, \ldots, N$ обозначим

$$A_{i,r}(x) = \frac{(x - x_{i-1})^r}{(x - x_{i-1})^r + (x_i - x)^r}, \quad B_{i,r}(x) = 1 - A_{i,r}(x)$$

и рассмотрим рациональные сплайн-функции

$$R_{N,r}(x, f) = R_{N,r}(x, f, \Delta, g, \mu)$$

такие, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, выполняется равенство

$$R_{N,r}(x, f) = R_i(x, f)A_{i,r}(x) + R_{i-1}(x, f)B_{i,r}(x). \tag{4}$$

Как следует из [5], $R_{N,r}(x, f)$ представляет собой гладкую функцию класса $C^r_{[a,b]}$. При этом из (4) имеем

$$R_{N,r}(x_i, f) = R_i(x_i, f) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{5}$$

В [13] показано, что для любой непрерывной на данном отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, произвольной сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$, любого $\mu > 0$ и соответствующей интерполяционной сплайн-функции $R_{N,r}(x, f) = R_{N,r}(x, f, \Delta, g, \mu)$ для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - R_{N,r}(x, f)| \leqslant (3 + \mu)\omega(\|\Delta\|, f), \tag{6}$$

где $\|\Delta\| = \max\{h_i | i = 1, 2, \ldots, N\}$ и, как обычно,

$$\omega(\delta, f) = \sup\{|f(x + h) - f(x)| : |h| \leqslant \delta; x, x + h \in [a, b]\}$$

означает равномерный модуль непрерывности функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$.

Заметим, что рациональные интерполянты $R_i(x, f)$ из (3) для всех $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ допускают в силу интерполяционности следующее представление:

$$R_i(x, f) = a_i(x)f(x_{i-1}) + b_i(x)f(x_i) + c_i(x)f(x_{i+1}), \tag{7}$$

в котором

$$a_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x_{i-1}-g_i)}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})(x-g_i)},$$
$$b_i(x) = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x_i-g_i)}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x-g_i)},$$
$$c_i(x) = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x_{i+1}-g_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x-g_i)},$$

причем $a_i(x) + b_i(x) + c_i(x) = 1$. Далее будут использоваться также неравенства

$$|a_i(x)| < 1+\mu, \quad |b_i(x)| < 2(1+\mu), \quad |c_i(x)| < 1+\mu, \tag{8}$$

которые справедливы при $\mu > 0$ для $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Эти неравенства проще получаются, если воспользоваться другими представлениями для коэффициентов $a_i(x)$ и $b_i(x)$, которые получаются [13] из (3). Так, в случае $h_{i+1} \leqslant h_i$ последовательно имеем:

$$|a_i(x)| = \left|\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x_{i+1}-g_i)}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})(x-g_i)}\right| =$$
$$= \frac{|x-x_i|}{x_i-x_{i-1}}\left[1 - \frac{(x-x_{i-1})(g_i-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(g_i-x)}\right] \leqslant 1 < 1+\mu;$$

$$|b_i(x)| = \left|\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x_{i+1}-g_i)}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x-g_i)}\right| =$$
$$= \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \cdot \frac{|g_i-x-\mu(x-x_i)|}{g_i-x} =$$
$$= (1+\mu)\frac{(x-x_{i-1})(x_{i+1}-x)}{(x_i-x_{i-1})(g_i-x)} < 2(1+\mu);$$

$$|c_i(x)| = \mu\frac{(x-x_{i-1})|x-x_i|}{(x_{i+1}-x_{i-1})(g_i-x)},$$

отсюда

$$|c_i(x)| = \mu\frac{x-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}} \cdot \frac{x-x_i}{g_i-x} \leqslant 1 < 1+\mu,$$

если $x \in [x_i, x_{i+1}]$, и

$$|c_i(x)| = \mu \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot \frac{x_i - x}{g_i - x} \leqslant \mu < 1 + \mu,$$

если $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Случай, когда $h_{i+1} > h_i$, рассматривается вполне аналогично. Неравенства (8) доказаны.

2. Основные результаты

Пусть интегральное уравнение (1) для данных λ, непрерывной на $[a, b]$ правой части $\varphi(x)$ и непрерывном на прямоугольнике $[a, b] \times [a, b]$ ядре $K(x, t)$ имеет единственное решение $y(x)$, непрерывное на $[a, b]$.

Рассмотрим дискретную функцию $Y(x)$, определенную на данной сетке с произвольными узлами $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$, со значениями $Y(x_i) = y_i$ для $i = 0, 1, \ldots, N$.

Для этой функции $Y(x)$, параметра $\mu > 0$ и набора полюсов $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ в соответствии со значениями (2) построим рациональные интерполянты $R_i(x, Y)$ вида (3) и соответствующую им сплайн-функцию $R_{N,r}(x, Y) = R_{N,r}(x, Y, \Delta, g, \mu)$ типа (4) для значений $r = 1, 2$.

Как следует из (5) и конструкции рациональной сплайн-функции $R_{N,r}(x, Y)$, будут выполняться равенства

$$R_{N,r}(x_i, Y) = R_i(x_i, Y) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Составим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y_0, y_1, \ldots, y_N$ с помощью следующих условий коллокации узлов сетки:

$$R_{N,r}(x_i, Y) - \lambda \int_a^b K(x_i, t) R_{N,r}(t, Y) dt = \varphi(x_i), \tag{10}$$

$i = 0, 1, \ldots, N$.

Тогда имеет место

Теорема 1. *Если для данных значений λ и $\mu > 0$ и ядра $K(x, t)$ выполняется неравенство*

$$|\lambda| \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |K(x, t)| dt < \frac{1}{8(1 + \mu)}, \tag{11}$$

то системой (10) *однозначно определяется коллокационная рациональная сплайн-функция* $R_{N,r}(x,Y) = R_{N,r}(x,Y,\Delta,g,\mu)$ $(N \geqslant 2; r = 1,2)$ *вида* (4).

Доказательство. Исключая тривиальный случай $\lambda = 0$, систему уравнений (10) относительно $y_0, y_1, \ldots, y_N$ запишем в развернутом виде. При $i = 0,1,\ldots,N$ из (10) с использованием (4), (9) и (7) имеем

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i,t)\,\{[a_j(t)y_{j-1} + b_j(t)y_j + c_j(t)y_{j+1}]A_{i,r}(t)+ \\ +[a_{j-1}(t)y_{j-2} + b_{j-1}(t)y_{j-1} + c_{j-1}(t)y_j]B_{i,r}(t)\}\,dt = \varphi(x_i). \quad (12)$$

Если это уравнение запишем выделив коэффициенты при каждом из неизвестных $y_0, y_1, \ldots, y_N$, то получим уравнения вида

$$(1 - \lambda\alpha_{ii})y_i - \lambda \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} \alpha_{ij} y_j = \varphi(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,N. \quad (13)$$

При этом, как следует из левой части равенства (12) выражение для коэффициента α_{ij} содержит в слагаемых с интегралами коэффициенты видов $a_m(x), b_m(x)$ и $c_m(x)$ самое большое по два раза.

Поэтому, используя оценки (8) и неравенства $0 \leqslant A_{i,r}(x) \leqslant 1$, $0 \leqslant B_{i,r}(x) \leqslant 1$, получим

$$\sum_{j=0}^{N} |\alpha_{ij}| \leqslant 8(1+\mu)\int_a^b |K(x_i,t)|dt, \quad i = 0,1,\ldots,N. \quad (14)$$

Если для краткости обозначим

$$M(K) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} \int_a^b |K(x,t)|dt,$$

то по условию (11) из теоремы имеем $8(1+\mu)M(K) < \dfrac{1}{|\lambda|}$, а значит, из (14) при каждом $i = 0,1,\ldots,N$ получим

$$\sum_{j=0}^{N} |\alpha_{ij}| < \frac{1}{|\lambda|}, \quad \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} |\alpha_{ij}| < \frac{1}{|\lambda|} - |\alpha_{ii}| \leqslant \left|\frac{1}{\lambda} - \alpha_{ii}\right|.$$

Отсюда вытекают неравенства

$$|\lambda| \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} |\alpha_{ij}| < |1 - \lambda \alpha_{ii}|, \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$

которые выражают доминирование диагональных элементов по строкам определителя системы уравнений (13), а поэтому она имеет единственное решение $(y_0, y_1, \ldots, y_N)$.

Если это решение возьмем в качестве значений функции $Y(x)$ в соответствующих узлах $x_0, x_1, \ldots, x_N$ и в равенстве (4) положим $f(x) = Y(x)$, то получим искомую коллокационную рациональную сплайн-функцию $R_{N,r}(x, Y) = R_{N,r}(x, Y, \Delta, g, \mu)$.

Теорема 1 доказана. □

В условиях теоремы 1 имеет место также

Теорема 2. *Если для данных значений λ и $\mu > 0$ и ядра $K(x,t)$ выполняется неравенство (11), то для непрерывного решения $y(x)$ интегрального уравнения (1) и коллокационной рациональной сплайн-функции $R_{N,r}(x, Y)$ $(N \geqslant 2; r = 1, 2)$, определяемой системой (10), при любом $x \in [a, b]$ выполняется неравенство*

$$|y(x) - R_{N,r}(x, Y)| \leqslant (10 + 8\mu)(3 + \mu)\omega(\|\Delta\|, y).$$

Доказательство. Пусть сплайн-функция $R_{N,r}(x, Y)$ $(N \geqslant 2; r = 1, 2)$ определяется системой (10) для сетки произвольных узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ и набором полюсов $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ с данным значением параметра μ. Если в уравнение (1) вместо точного решения $y(x)$ подставим сплайн-функцию $R_{N,r}(x, y) = R_{N,r}(x, y, \Delta, g, \mu)$, которая определяется равенством (4) путем замены в нем $f(x)$ на $y(x)$, то при $x \in [a, b]$ получим равенство

$$R_{N,r}(x, y) - \lambda \int_a^b K(x, t) R_{N,r}(t, y) dt = \varphi(x) + G_r(x), \tag{15}$$

где с учетом (1) при $x \in [a, b]$ имеем

$$G_r(x) = [R_{N,r}(x, y) - y(x)] - \lambda \int_a^b K(x, t)[R_{N,r}(t, y) - y(t)] dt.$$

Для краткости введем обозначение равномерной нормы

$$\|F\| = \sup\{|F(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Тогда получим

$$\|G_r\| \leqslant (1 + |\lambda| M(K)) \|R_{N,r}(\cdot, y) - y\|. \tag{16}$$

Из равенства (15) при $x = x_i$, $0, 1, \ldots, N$, и равенства (10) имеем

$$R_{N,r}(x_i, y) - R_{N,r}(x_i, Y) = \lambda \int_a^b K(x_i, t)[R_{N,r}(t, y) - R_{N,r}(t, Y)]dt + G_r(x_i).$$

Если равенства (5) применить к решению $y(x)$ вместо $f(x)$, то отсюда и из (9) при $i = 0, 1, \ldots, N$ получим

$$|y(x_i) - y_i| \leqslant |\lambda| M(K) \|R_{N,r}(\cdot, y) - R_{N,r}(\cdot, Y)\| + \|G_r\|. \tag{17}$$

Пусть теперь $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ для данного $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Тогда, применяя равенство (7) к интерполянтам для функций $y(x)$ и $Y(x)$ (вместо $f(x)$), а затем оценки (8) для коэффициентов и неравенство (17), последовательно имеем

$$\begin{aligned}
&|R_i(x, y) - R_i(x, Y)| \leqslant \\
&\quad \leqslant |a_i(x)||y(x_{i-1}) - y_i| + |b_i(x)||y(x_i) - y_i| + |c_i(x)||y(x_{i+1}) - y_{i+1}| \leqslant \\
&\qquad \leqslant 4(1+\mu)|\lambda| M(K) \|R_{N,r}(\cdot, y) - R_{N,r}(\cdot, Y)\| + 4(1+\mu)\|G_r\|.
\end{aligned}$$

Если учесть еще тождества $R_0(x, f) \equiv R_1(x, f)$ и $R_N(x, f) \equiv R_{N-1}(x, f)$, то при $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, по равенству (4) получим

$$\begin{aligned}
&|R_{N,r}(x, y) - R_{N,r}(x, Y)| \leqslant |R_i(x, y) - R_i(x, Y)| A_{i,r}(x) + \\
&\qquad + |R_{i-1}(x, y) - R_{i-1}(x, Y)| B_{i,r}(x) \leqslant \\
&\qquad \leqslant 4(1+\mu)|\lambda| M(K) \|R_{N,r}(\cdot, y) - R_{N,r}(\cdot, Y)\| + 4(1+\mu)\|G_r\|.
\end{aligned}$$

Следовательно, отсюда и из (16) имеем

$$\begin{aligned}
\|R_{N,r}(\cdot, y) - R_{N,Y}(\cdot, Y)\| &\leqslant \frac{4(1+\mu)}{1 - 4(1+\mu)|\lambda| M(K)} \|G_r\| \leqslant \\
&\leqslant \frac{4(1+\mu)(1 + |\lambda| M(K))}{1 - 4(1+\mu)|\lambda| M(K)} \|R_{N,r}(\cdot, y) - y\|.
\end{aligned}$$

Тогда при любом $x \in [a,b]$ получим

$$|y(x) - R_{N,r}(x,Y)| \leqslant \|y - R_{N,r}(\cdot,y)\| + \|R_{N,r}(\cdot,y) - R_{N,r}(\cdot,Y)\| \leqslant \\ \leqslant \frac{5+4\mu}{1-4(1+\mu)|\lambda|M(K)}\|y - R_{N,r}(\cdot,y)\|.$$

По условию теоремы имеем $|\lambda|M(K) < \dfrac{1}{8(1+\mu)}$. Поэтому для непрерывного решения $y(x)$ интегрального уравнения (1), интерполяционной рациональной сплайн-функции $R_{N,r}(x,y) = R_{N,r}(x,y,\Delta,g,\mu)$ $(N \geqslant 2; r = 1,2)$ вида (4) для $y(x)$ и коллокационной рациональной сплайн-функции $R_{N,r}(x,Y) = R_{N,r}(x,Y,\Delta,g,\mu)$ вида (4), определяемой системой уравнений (10), выполняется неравенство

$$\|y - R_{N,r}(\cdot,Y)\| \leqslant (10+8\mu)\|y - R_{N,r}(\cdot,y)\|. \tag{18}$$

Отсюда, применив (6) к непрерывному решению $y(x)$, получим требуемое неравенство

$$\|y - R_{N,r}(\cdot,Y)\| < (10+8\mu)(3+\mu)\omega(\|\Delta\|,y).$$

Теорема 2 доказана. □

Отметим, что из неравенства (18) можно получить также оценки скорости сходимости приближенных решений $R_{N,r}(x,Y)$ интегрального уравнения (1) к его точному решению $y(x)$ класса $C^r_{[a,b]}$ в случаях $r=1$ и $r=2$.

Действительно, по теореме 1.1 из [13] для решения $y(x)$ из класса $C^1_{[a,b]}$ и его интерполяционной рациональной сплайн-функции $R_{N,1}(x,y)$ вида (4) получим

$$|y(x) - R_{N,1}(x,y)| \leqslant \left(4 + \frac{2}{\mu}\right)\|\Delta\|\omega(\|\Delta\|,y'), \quad x \in [a,b].$$

Если же решение $y(x)$ принадлежит классу $C^2_{[a,b]}$, то для его интерполяционной рациональной сплайн-функции $R_{N,2}(x,y)$ вида (4) по теореме 1 из [14] при $\rho_\Delta = \max\{h_i h_j^{-1} \,|\, |i-j| = 1, 1 \leqslant i,j \leqslant N\}$ имеем

$$|y(x) - R_{N,2}(x,y)| \leqslant \|\Delta\|^2\left(2\omega(\|\Delta\|,y'') + \frac{1}{4\mu}\rho_\Delta\|y''\|\right), \quad x \in [a,b].$$

Подставляя правые части последних двух неравенств в правую часть неравенства (18), получим соответствующие оценки равномерной сходимости на отрезке $[a, b]$ коллокационных сплайн-функций $R_{N,r}(x, Y)$ к решению $y(x)$ в случаях $r = 1$ и $r = 2$.

Список литературы

[1] Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972. 319 с.

[2] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. 1976. 248 с.

[3] Сендов Б., Попов В.А. Усредненные модули гладкости. М.: Мир. 1988. 328 с.

[4] Nord S. Approximation properties of the spline fit // BIT. 1967. V. 7. P. 132–144.

[5] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Мат. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 4. С. 588–599.

[6] Полянин А.Д., Манжиров А.В. Интегральные уравнения. Часть 1: справочник для вузов. 2-е изд. М.: Юрайт. 2017. 365 с.

[7] Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э.Баумана. 2006. 700 с.

[8] Арушанян И.О. Применение метода квадратур для численного решения интегральных уравнений второго рода. М.: Изд-во ЦПИ мех.-мат. МГУ. 2018. 61 с.

[9] Габбасов Н.С. Коллокационный метод решения интегральных уравнений первого рода в классе обобщенных функций // Известия вузов. Математика. 1993. № 2. С. 12–20.

[10] Соловьева С.А. К вопросу о решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Научно-техн. вестник Поволжья. 2014. № 1. С. 37–40.

[11] Dagnino C., Lamberti P., Sablonniere P. On the solution of Fredholm integral equations based on spline quasiinterpolating projectors // BIT Numer. Math. 2014. V. 54. P. 979–1008.

[12] Bellaura A., Sbibih D., Zidna A. Two cubic spline methods for solving Fredholm integral equations // Appl. Math. Comput. 2016. V. 276. № 5. P. 1–11.

[13] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. С. 16–28.

[14] Магомедова В.Г., Рамазанов А.-Р.К. О приближенном решении дифференциальных уравнений с помощью рациональных сплайн–функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 579–586.

А.-Р. К. Рамазанов (A.-R. K. Ramazanov)
Дагестанский государственный университет,
Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН
E-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила в редакцию
27.02.2022

В. Г. Магомедова (V. G. Magomedova)
Дагестанский государственный университет
E-mail: vazipat@rambler.ru