УДК 517.5, 519.6

Рамазанов А.-Р. К., Рамазанов А. К.

О приближенном решении краевой задачи с разрывным решением

Через сплайн-функции по трехточечным рациональным интерполянтам построено приближенное решение краевой задачи: $y' + p(x)y = f(x)$, $y(a) = A$, $y(b) = B$. При этом функции $p(x)$ и $f(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[a, b]$ и допускается, что существует решение $y(x)$, которое может иметь разрыв первого рода со скачком в заданной точке $\tau \in (a, b)$.

Библиография: 10 названий.

Using spline-functions for three-point rational interpolants an approximate solution of the boundary value problem: $y' + p(x)y = f(x)$, $y(a) = A$, $y(b) = B$ is constructed. In this case, the functions $p(x)$ and $f(x)$ are assumed to be continuous on the segment $[a, b]$ and it is allowed, that there exists a solution $y(x)$ that can have a discontinuity of the first kind with a jump at a given point $\tau \in (a, b)$.

Bibliography: 10 items.

Ключевые слова: рациональная сплайн-функция, дифференциальное уравнение, приближенное решение.

Keywords: rational spline-function, differential equation, approximate solution.

Введение

Различные методы приближенного решения дифференциальных уравнений с помощью полиномиальных сплайнов можно найти в работах [1–4].

Известно также, что явление Гиббса, обнаруженное как свойство частичных сумм Фурье разрывных со скачком функций, в настоящее время исследовано и для некоторых других аппаратов приближения функций (см., напр., [5–7] и цитированную в них литературу).

В данной работе на примере краевой задачи для одного дифференциального уравнения с разрывным решением изучается вопрос о построении приближенного решения с помощью рациональных сплайн-функций специального вида, для которых нехарактерно явление Гиббса в окрестностях точек разрыва.

Такие сплайн-функции определяются ([8]) для конечной дискретной функции $\varphi(x)$, заданной в точках некоторой сетки на данном отрезке $[a, b]$.

Пусть дана сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ и пусть $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, N)$.

Для данной сетки Δ и произвольного числа $\lambda > 0$ возьмем набор точек $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ таких, что $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ при $h_{i+1} \leqslant h_i$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ при $h_i < h_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$.

Тогда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ однозначно определяется рациональная функция

$$R_i(x) = R_i(x, \varphi) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i} \tag{1}$$

такая, что $R_i(x_j) = \varphi(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$. Будем считать также, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ из (1) легко выражаются через разделенные разности функции $\varphi(x)$ равенствами

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i),\\
\beta_i &= \varphi(x_{i-1}, x_{i+1}) + \varphi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i),\\
\gamma_i &= \varphi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).
\end{aligned}$$

На отрезке $[a, b]$ с использованием рациональных интерполянтов $R_i(x)$ построим сплайн-функцию $R_{N,1}(x, \varphi) = R_{N,1}(x, \varphi, \Delta, g)$, которая при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ задается формулой

$$R_{N,1}(x, \varphi) = R_i(x)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}. \tag{2}$$

Как показано в работе [8], сплайн-функция $R_{N,1}(x, \varphi)$ принадлежит классу $C^{(1)}_{[a,b]}$, а в работе [9] показано, что для последовательностей рациональных сплайн-функций данного вида при легко проверяемых условиях на соответствующие последовательности сеток узлов нехарактерно явление Гиббса в окрестностях точек разрыва первого рода со скачком.

1. О приближенном решении краевой задачи

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{3}$$

с непрерывными на данном отрезке $[a, b]$ функциями $p(x)$ и $f(x)$ и заданной точкой $\tau \in (a, b)$.

Предполагаем, что существует единственное непрерывно дифференцируемое на промежутках $[a, \tau)$ и $(\tau, b]$ решение $y(x)$ с краевыми условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{4}$$

при этом решение $y(x)$ в точке τ непрерывно или может иметь разрыв первого рода со скачком.

Для поиска приближенного решения задачи (3), (4) в форме рациональных сплайн-функций вида (1) рассмотрим сетки узлов $\Delta_N : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 5)$, для которых $x_{m-1} < \tau < x_m$ при некотором $m = m(N)$ с $3 \leqslant m \leqslant N - 2$.

Всюду ниже положим $h(\tau) = h(\tau, N) = x_{m(N)} - x_{m(N)-1}$. Пусть также для узлов каждой сетки Δ_N выполнены условия $0 < h < h(\tau)$ и $x_i - x_{i-1} \leqslant h$ для $1 \leqslant i \leqslant N$, $i \neq m(N)$.

Если точка $x \in [a, \tau) \cup (\tau, b]$, то найдутся a_1, b_1 такие, что $x \in [a, a_1] \cup [b_1, b]$, причем при всех достаточно малых $h(\tau)$ и h можно считать, что a_1 и b_1 входят в состав узлов сеток Δ_N и $a_1 \leqslant x_{m(N)-1}$, $x_{m(N)} \leqslant b_1$. Решение $y = y(x)$ задачи (3), (4) предполагается непрерывно дифференцируемой функцией на $[a, \tau) \cup (\tau, b]$. Поэтому благодаря конструкции сплайн-функции $R_{N,1}(x, y) = R_{N,1}(x, y, \Delta_N, g)$ (при $\lambda = 1$) по теореме 0.1 из [10] непосредственно получим, что при $x \in [\alpha, \beta]$, где $[\alpha, \beta]$ — любой из отрезков $[a, a_1]$ и $[b_1, b]$, выполняются неравенства

$$|y(x) - R_{N,1}(x, y)| \leqslant 6h\omega(h, y', [\alpha, \beta]), \tag{5}$$

$$|y'(x) - R'_{N,1}(x, y)| \leqslant 14\omega(h, y', [\alpha, \beta]), \tag{6}$$

где $\omega(h, y', [\alpha, \beta])$ означает, как обычно, модуль непрерывности функции $y'(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Используя равенство (3), при $x \in [\alpha, \beta]$ получим

$$\begin{aligned} G_N(x) &= R'_{N,1}(x, y) + p(x)R_{N,1}(x, y) - f(x) \\ &= [R'_{N,1}(x, y) - y'(x)] + p(x)[R_{N,1}(x, y) - y(x)]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5), (6) вытекает, что $G_N(x) \to 0$ при $h(\tau) = h(\tau, N) \to 0$.

В силу интерполяционности сплайн-функций $R_{N,1}(x, y)$ выполняются краевые условия $R_{N,1}(a, y) = y(a) = A$, $R_{N,1}(b, y) = y(b) = B$.

Как показано в [9], если брать такие последовательности сеток узлов Δ_N, что $h = \bar{\bar{o}}(h(\tau, N))$, $h(\tau, N) \to 0$ $(N \to \infty)$, то для соответствующей последовательности сплайн-функций $R_{N,1}(x, y) = R_{N,1}(x, y, \Delta_N, g)$ в окрестности точки τ отсутствует явление Гиббса.

Это свойство сплайн-функций $R_{N,1}(x, y)$ можно использовать для нахождения скачка решения в точке разрыва τ. Дело в том, что ввиду отсутствия явления Гиббса для любых точек $\tau_N \in (x_{m(N)}, x_{m(N)+1})$ и $\tau_{N-1} \in (x_{m(N)-2}, x_{m(N)-1})$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} R_{N,1}(\tau_N, y) = y(\tau + 0), \quad \lim_{N\to\infty} R_{N,1}(\tau_{N-1}, y) = y(\tau - 0).$$

В выражении сплайн-функции $R_{N,1}(x, y) = R_{N,1}(x, y, \Delta_N, g)$ (с $\lambda = 1$) вместо значений $y(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ решения $y = y(x)$ задачи (3), (4) возьмем $y_0 = y(x_0) = A$, $y_N = y(x_N) = B$ и соответственно неизвестные y_i $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$, а полученную при этом новую рациональную сплайн-функцию обозначим через $R_{N,1}(x)$. Тогда $R_{N,1}(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$. Относительно неизвестных y_i составим следующую систему уравнений:

$$R'_{N,1}(x_i) + p(x_i)R_{N,1}(x_i) = f(x_i), \tag{7}$$

где $0 \leqslant i \leqslant N$ и $i \neq m(N) - 1$, $i \neq m(N)$ при $x_{m(N)-1} < \tau < x_{m(N)}$.

В соответствии с (1) и (2) при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ имеем

$$R_{N,1}(x) = R_i(x)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}, \tag{8}$$

причем $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ и для $i = 1, 2, \dots, N-1$ коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ рациональной функции $R_i(x)$ вида (1) определяются условиями $R_i(x_j) = y_j$ при $j = i-1, i, i+1$.

Значит, при $i = 1, 2, \dots, N-1$ получим

$$R'_{N,1}(x_i) = R'_i(x_i); \quad R'_{N,1}(x_0) = R'_1(x_0), \quad R'_{N,1}(x_N) = R'_{N-1}(x_N).$$

Чтобы выразить правые части этих равенств через y_j, вполне аналогично с [8] при $i = 1, 2, \dots, N-1$ и $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ находим

$$\begin{aligned} R'_i(x) = {} & \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \\ & + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \frac{x_i - g_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \left(1 - \frac{(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i)}{(x - g_i)^2} \right). \end{aligned}$$

Если теперь подставить соответствующие значения для $R'_i(x_i)$, $R'_1(x_0)$ и $R'_{N-1}(x_N)$ в систему (7), то получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых y_j, т.е. конечно-разностную схему решения задачи (3), (4).

Вычисления сокращаются, если выберем последовательность сеток узлов Δ_N, для которых $x_{m(N)-1} < \tau < x_{m(N)}$ при каждом N, $x_i - x_{i-1} = h$ при $1 \leqslant i \leqslant N$ и $i \neq m(N)$, $h(\tau, N) = x_{m(N)} - x_{m(N)-1}$. Будем считать, что $h = \bar{\bar{o}}(h(\tau, N))$, $h(\tau, N) \to 0$ $(N \to \infty)$.

Тогда при $1 \leqslant i \leqslant N-1$ и $i \neq m(N) - 1$ и $i \neq m(N)$ получим

$$\begin{gathered} R'_i(x_i) = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) - \frac{1}{4h}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = -\frac{3}{4h} y_{i-1} + \frac{1}{2h} y_i + \frac{1}{4h} y_{i+1}, \\ R'_1(x_0) = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0) - \frac{2}{3h}(y_2 - 2y_1 + y_0) = -\frac{7}{6h} y_0 + \frac{4}{3h} y_1 - \frac{1}{6h} y_2, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} R'_{N-1}(x_N) = {} & \frac{1}{2h}(y_N - y_{N-2}) + \frac{2}{h}(y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2}) \\ & = \frac{3}{2h} y_{N-2} - \frac{4}{h} y_{N-1} + \frac{5}{2h} y_N. \end{aligned}$$

Зная $y_0 = A$, из первых двух уравнений системы (7) можно найти y_1 и y_2. Действительно, подставляя выражения для $R'_{N,1}(x_0) = R'_1(x_0)$ и

$R'_{N,1}(x_1) = R'_1(x_1)$ в два первых уравнения из (7), получим

$$\begin{cases} 8y_1 - y_2 = 6hf(x_0) + (7 - 6hp(x_0))y_0, \\ (2 + 4hp(x_1))y_1 + y_2 = 4hf(x_1) + 3y_0. \end{cases}$$

Теперь, зная y_1 и y_2, из последующих уравнений системы (7), соответствующих $i = 2, 3, \dots, m(N) - 2$, с использованием (9) легко найти $y_3, y_4, \dots, y_{m(N)-1}$ последовательной подстановкой предыдущих найденных пар значений.

Аналогично, подставляя $R'_{N,1}(x_{N-1}) = R'_{N-1}(x_{N-1})$ и $R'_{N,1}(x_N) = R'_{N-1}(x_N)$, из последних двух уравнений системы (7) получим

$$\begin{cases} -3y_{N-2} + (2 + 4hp(x_{N-1}))y_{N-1} = 4hf(x_{N-1}) + y_N, \\ 3y_{N-2} - 8y_{N-1} = 2hf(x_N) - (5 + 2hp(x_N))y_N. \end{cases}$$

Отсюда находим значения y_{N-1} и y_{N-2} ($y_N = B$), затем из уравнений системы (7), соответствующих $i = N-2, N-3, \dots, m(N)+1$, с использованием (9) последовательно находим $y_{N-3}, y_{N-4}, \dots, y_{m(N)}$.

Следовательно, найдены все искомые значения $y_0, y_1, \dots, y_N$. По ним и соответствующим узлам сетки $\Delta_N : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ строим трехточечные рациональные интерполянты $R_0(x), R_1(x), \dots, R_N(x)$, а затем в соответствии с (8) строим искомую рациональную сплайн-функцию $R_{N,1}(x)$ в качестве приближенного решения задачи (3), (4).

При этом последовательность сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ на множествах вида $E = [a, a_1] \cup [b_1, b]$ с $a < a_1 < \tau < b_1 < b$ равномерно сходится к решению $y = y(x)$ задачи (3), (4) (при условии его существавния).

Это следует из неравенства

$$|y(x) - R_{N,1}(x)| \leqslant |y(x) - R_{N,1}(x, y)| + |R_{N,1}(x, y) - R_{N,1}(x)|.$$

Действительно, первое слагаемое правой части в силу неравенств (5) и (6) стремится к нулю равномерно на E.

Покажем, что второе слагаемое также обладает этим свойством. При $0 \leqslant i \leqslant N$ и $i \neq m(N) - 1$, $i \neq m(N)$ выполняются равенства

$$R'_{N,1}(x_i, y) - R'_{N,1}(x_i) + p(x_i)[R_{N,1}(x_i, y) - R_{N,1}(x_i)] = G_N(x_i),$$

которые представим в виде

$$-3[y(x_{i-1}) - y_{i-1}] + [2 + 4hp(x_i)][y(x_i) - y_i] + [y(x_{i+1}) - y_{i+1}] = 4hG_N(x_i)$$

и учтем, что $y(x_0) = y_0$, $y(x_N) = y_N$. Тогда для узлов $x_j \in E$ (начиная с концов $j = 1$ и $j = N - 1$) последовательно получим, что разности $y(x_j) - y_j$ можно сделать сколь угодно малыми за счет роста N.

Остается заметить, что из конструкции сплайн-функций $R_{N,1}(x, y)$ и $R_{N,1}(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ легко получается неравенство

$$|R_{N,1}(x, y) - R_{N,1}(x)| \leqslant |y(x_{i-2}) - y_{i-2}| \\ + 3|y(x_{i-1}) - y_{i-1}| + 3|y(x_i) - y_i| + |y(x_{i+1}) - y_{i+1}|.$$

Значит, требуемая сходимость установлена.

Список литературы

[1] Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972. 319 с.

[2] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. 1976. 248 с.

[3] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1980. 352 с.

[4] де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь. 1985. 304 с.

[5] Jerri A. J. The Gibbs phenomenon in Fourier analysis, splines and wavelet approximations // Mathematics and its Applications. Kluwer Academic publishers. 1998. Vol. 446. pp. 312–317. doi: 10.1007/978-1-4757-2847-7 .

[6] Richards F. B. A Gibbs phenomenon for spline functions // Journal of approximation theory. 1991. Vol. 66. pp. 344–351. doi: 10.1016/0021-9045(91)90034-8 .

[7] Zhimin Zhang, Clyde F. Martin. Convergence and Gibbs phenomenon in cubic spline interpolation of discontinuous functions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1997. Vol. 87. pp. 359–371. doi: 10.1016/s0377-0427(97)00199-4 .

[8] Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г. Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 4. С. 588–599. doi: https://doi.org/10.4213/mzm11201 .

[9] Рамазанов А.-Р. К., Рамазанов А. К., Магомедова В. Г. О явлении Гиббса для рациональных сплайн-функций // Тр. Ин–та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 238–251. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-238-251 .

[10] Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г. Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. С. 16–28. doi: 10.21538/0134-4889-2016-44-4-233-246 .

Рамазанов А.-Р. К. (Ramazanov A.-R. K.)
Дагестанский государственный университет, Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН
E-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила в редакцию
28.04.2021

Рамазанов А. К. (Ramazanov A. K.)
Калужский филиал МГТУ им. Н.Э.Баумана
E-mail: akramazanov@mail.ru