УДК 517.4

Меджидов З.Г.

О восстановлении тензорного поля второго ранга с нулевым следом по неполным данным

Построен алгоритм полного восстановления тензорного поля 2-го ранга в трехмерном евклидовом пространстве по неполным интегральным данным. По линейным интегралам по прямым, пересекающим бесконечно удаленную кривую, строится соленоидальная часть поля, а по линейным интегралам от нормальной составляющей неизвестного поля с нулевым следом строится поле смещения.

Библиография: 6 названий.

An algorithm for the complete reconstruction of a tensor field of rank 2 in three-dimensional Euclidean space on incomplete integral data is constructed. The solenoid part of the field is constructed using linear integrals on straight lines that intersect a curve at infinity, and the displacement field is constructed using the traceless normal ray integrals.

Bibliography: 6 items.

Ключевые слова: лучевое преобразование, тензорное поле второго ранга, восстановление, оператор Сен-Венана, поле смещения, нормальная составляющая с нулевым следом.

Keywords: ray transform, second-rank tensor field, reconstruction, Saint-Venant operator, displacement field, traceless normal part.

1. Обозначения и формулировка теоремы

Символом Σ^m обозначим линейное пространство гладких ковариантных симметричных (класса C^∞) тензорных полей ранга m , $m > 0$, в

евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Определим значение поля Σ^m на векторах $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ как m -линейную симметричную функцию $f(x; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = f_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x) \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ векторных аргументов $x \in \mathbb{R}^3$ и $\xi_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, m$; по повторяющемуся индексу предполагается суммирование от 1 до 3.

Лучевое преобразование поля $f \in \Sigma^m$ определим как совокупность интегралов вдоль прямых $l = \{x + t\theta, t \in R\}$:

$$If(l) = If(x; \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta, \theta, \dots, \theta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta, \theta^m) dt; \quad (1)$$

θ – направляющий вектор прямой l .

В данной работе будут рассматриваться пространства Σ^1 и Σ^2 полей с компактными носителями. Определим симметричный (или внутренний) дифференциал $D : \Sigma^1 \rightarrow \Sigma^2$, действующий по формуле $D\varphi = f$, $f_{ii} = \partial_i \varphi_i$, $f_{ij} = 1/2(\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i)$, $\partial_i = \partial / (\partial x^i)$ (суммирование по повторяющимся индексам не ведется).

Мы будем пользоваться также следующими обозначениями для дифференциальных операций над тензорными полями в $\mathbb{R}^3$, пространств и операторов в этих пространствах (см. [1–5]):

$$\partial_\xi If(x; \theta) = \langle \xi, \nabla_x \rangle If(x; \theta), \partial_\xi If(x; \theta) = \frac{\partial}{\partial t} If(x; \theta + t\xi)|_{t=0};$$

Λ^2 – пространство дифференциальных форм степени 2;

$B^4 = \Lambda^2 \otimes_S \Lambda^2$ – симметрический квадрат пространства Λ^2 , каждый элемент $b \in B^4$ которого представляет собой тензорное поле с компонентами $b_{ij,kl}$, кососимметричными по индексам (i, j) и (k, l) , а также симметричным по отношению к перестановке $(i, j) \longleftrightarrow (k, l)$;

оператор Сен-Венана $V : \Sigma^2 \rightarrow B^4$ действует на поле $f \in \Sigma^2$ по формуле

$$(Vf)_{ij,kl} = \partial_i \partial_k f_{jl} - \partial_i \partial_l f_{jk} - \partial_j \partial_k f_{il} + \partial_j \partial_l f_{ik}.$$

Поля $\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l$ в последней формуле могут быть заменены на произвольные касательные векторы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в R^3 :

$$(Vf)_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \partial_\alpha \partial_\gamma f(\beta, \delta) - \partial_\alpha \partial_\delta f(\beta, \gamma) - \partial_\beta \partial_\gamma f(\alpha, \delta) + \partial_\beta \partial_\delta f(\alpha, \gamma).$$

Для любого потенциального поля $h = D\varphi$ справедливо равенство $Vh = 0$, так как $VD = 0$. Поэтому поле f можно восстановить с точностью до потенциального слагаемого $D\varphi$, где φ – поле с компактным

носителем. Задача восстановления соленоидальной части поля f равносильно определению функции Vf ([6]), а полное восстановление поля f равносильно определению полей Vf и φ .

В работах [1, 2] рассматривается преобразование вида

$$Xf(x; \theta) = \int_0^\infty f(x + t\theta, \theta^2) dt,$$

определенное на семействе лучей $\{y = x + t\theta, t \geq 0\}$, где x – вершина луча, θ – направляющий вектор. Решена задача восстановления поля Vf по данным $Xf(x; \theta)$ для лучей, вершины которых лежат на кусочно-гладкой кривой, удовлетворяющей условию полноты Кириллова-Туя. В статье [3] эта задача решена для тензорного поля любого ранга в пространстве произвольной размерности. В работе [1] приведено полное восстановление поля f при условии, что известны дополнительные интегральные данные о поле f – данные поляризации томографии. Напомним обозначения и определения этой работы, которыми мы тоже будем пользоваться.

Пусть f – тензорное поле 2-го ранга, v – единичный вектор. Нормальная составляющая f с нулевым следом – это тензор 2-го ранга $Q_v f$, определенный на плоскости $P = v^\perp$, ортогональной v , формулой

$$Q_v f|_P = f|_P - \frac{1}{2} \text{tr}(f|_P) i|_P,$$

где $i = (du^1)^2 + (du^2)^2 + (du^3)^2$.

В евклидовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , в которой $v = (0, 0, 1)$

$$Q_v f(u, w) = \frac{1}{2} [(f_{11} - f_{22}) u^1 w^1 + f_{12}(u^1 w^2 + u^2 w^1) + (f_{22} - f_{11}) u^2 w^2].$$

Рассмотрим интегральное преобразование 2-тензора $Q_v f$:

$$T_v f(y; u, w) = \int_0^\infty Q_v f(y + tv; u, w) dt, \quad u, v \in P, \quad (2)$$

где $v \in S^2$, P – плоскость, ортогональная v . Ясно, что можно считать $y \in v^\perp = \{x \in R^3 : \langle x, v \rangle = 0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ_1, Γ_2 – кусочно-гладкие кривые в R^3 , $K \subset R^3 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ – компактное множество такие, что для любой точки

$x \in K$ плоскость H , проходящая через x , пересекает каждую из кривых Γ_1 и Γ_2 трансверсально. Тогда тензорное поле 2-го ранга f может быть восстановлено по следующим данным:

1. интегралам Xf вдоль лучей с вершинами $y \in \Gamma_1$ и вторым производным функции Xf по переменной y ;
2. интегралам $T_v f$ нормальной составляющей f с нулевым следом и вторым производным функции $T_v f$ для лучей с вершинами в точках кривой Γ_2 .

Определим нормальное лучевое преобразование тензора f , отличающееся от преобразования (2) лишь пределами интегрирования:

$$J_v f(y; u, w) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_v f(y + tv; u, w) dt, \quad u, v \in P, \quad (3)$$

Целью данной статьи является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ_1, Γ_2 – кусочно-гладкие кривые (множества направлений) на единичной сфере S^2 , $K \subset R^3 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ – компактное множество такие, что для любой плоскости H , пересекающей K , существуют точки $M_1 \in \Gamma_1$, $M_2 \in \Gamma_2$, радиус-векторы которых параллельны H . Тогда тензорное поле 2-го ранга f может быть восстановлено по следующим данным:

1. интегралам If по прямым, каждая из которых параллельна радиус-вектору какой-нибудь точки кривой Γ_1 ;
2. интегралам $J_v f$ нормальной части f с нулевым следом для направлений v , параллельных радиус-векторам точек кривой Γ_2 .

2. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов.

Шаг 1 состоит в построении поля Vf по данным If из пункта 1) теоремы 2. Эта задача решена в работе [4]. В ней доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in S(R^3, \Sigma^m)$, $\Gamma \subset S^{(n-1)}$ – множество направлений, обладающее свойством: для любой гиперплоскости $H \subset R^n$, пересекающей носитель поля f , существует хотя бы одно направление $\theta \in \Gamma$, параллельное H . Тогда поле Vf может быть восстановлено по заданной функции $If(x, \theta)$ для прямых $l = l(x, \theta)$, $\theta \in \Gamma$.

Основное содержание доказательства этой теоремы составляет вычисление величины

$$R_H(\xi_1, \omega; \xi_2, \omega; \dots; \xi_m, \omega) = \int_H Vf(y; \xi_1, \omega; \dots; \xi_m, \omega) dH. \quad (4)$$

Как показано в [4], для 2-тензора f эту величину $R_H(\alpha, \omega; \beta, \omega)$ можно вычислить по одной формулам из следующих формул в зависимости от того, какие из векторов α, β совпадают с вектором θ :

$$R_H(\theta, \omega; \theta, \omega) = \frac{1}{4} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial^2}{\partial S^2} g(x + s\omega, \theta) \Big|_{s=0} dx;$$

$$R_H(\alpha, \omega; \theta, \omega) = \frac{1}{4} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial^2}{\partial S^2} g(x + s\omega, \theta + q\alpha) \Big|_{\substack{s=0 \\ q=0}} dx, \quad \alpha \neq \theta;$$

$$R_H(\theta, \omega; \beta, \omega) = \frac{1}{4} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial^2}{\partial S^2} g(x + s\omega, \theta + q\beta) \Big|_{\substack{s=0 \\ q=0}} dx, \quad \beta \neq \theta;$$

$$R_H(\alpha, \omega; \beta, \omega) = \frac{1}{4} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial^2}{\partial S^2} g(x + s\omega, \theta + q\alpha + r\beta) \Big|_{\substack{s=0 \\ q=0}} dx, \quad \alpha \neq \theta, \beta \neq \theta;$$

Используя свойства симметричности и кососимметричности функции Vf по разным аргументам, для любых векторов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можно доказать равенство

$$\begin{aligned} R_H(\alpha, \beta; \gamma, \delta) &= R_H(\langle \beta\omega \rangle \alpha, \omega; \langle \delta, \omega \rangle \gamma, \omega) - R_H(\langle \alpha\omega \rangle \beta, \omega; \langle \delta, \omega \rangle \gamma, \omega) \\ &\quad - R_H(\langle \beta\omega \rangle \alpha, \omega; \langle \gamma, \omega \rangle \delta, \omega) + R_H(\langle \alpha\omega \rangle \beta, \omega; \langle \gamma, \omega \rangle \delta, \omega). \end{aligned}$$

В работе [5] доказана формула для вычисления Vf , содержащая двукратное интегрирование для m -тензора f , $m \geq 1$.

Шаг 2. Формула (4) дает нам преобразование Радона (покомпонентное) поля Vf . Само поле Vf может быть построено применением формулы обращения этого преобразования. Полученное поле, вообще говоря, не будет иметь компактный носитель. Следующим шагом строим 2-тензор g с компактным носителем такой, что $Vg = Vf$. Назовем его калибром поля f . Это поле построено в [1] как частное решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \partial_{22}g_{11} - 2\partial_{12}g_{12} + \partial_{11}g_{22} &= h_{33}, \\ \partial_{33}g_{11} - 2\partial_{13}g_{13} + \partial_{11}g_{33} &= h_{22}, \\ -\partial_{23}g_{11} + \partial_{12}g_{13} + \partial_{13}g_{12} - \partial_{11}g_{23} &= h_{23}, \\ \partial_{33}g_{22} - 2\partial_{23}g_{23} + \partial_{22}g_{33} &= h_{11}, \end{aligned}$$

где $h = Vf$, $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j$, $h_{ij} = (Vf)_{ki,kj}$.

Шаг 3. Как было отмечено выше, по данным $If(x, \theta)$ поле f можно восстановить с точностью до потенциального слагаемого $D\varphi$. Третьим шагом мы приведем явные формулы для определения поля φ по интегралам $J_v f$ от 2-тензора f , удовлетворяющего условию $Vf = 0$. Существование и единственность поля φ (поля смещения) следует из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4 ([1]). *Для любого тензорного поля h второго ранга с компактным носителем в R^3 такого, что $Vh = 0$, существует единственное поле смещения φ , удовлетворяющее равенству $D\varphi = h$, такое, что $\varphi = 0$ в неограниченной связной компоненте $R^3 \setminus \text{supp} f$.*

Поле смещения φ мы построим по неполным данным, описанным в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть K – компактное выпуклое множество в R^3 , $\Gamma \subset S^2$ – кусочно-гладкая кривая такая, что для любой плоскости H , пересекающей K , существует направление $v \in \Gamma$, параллельное H . Для любого 2-тензора f с носителем в K , удовлетворяющего условию $Vf = 0$, соответствующее поле смещения $\varphi(D\varphi = f)$ может быть построено по интегралам $J_v f$ с $v \in \Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = H(p, \omega)$ и $v \in S^2$ из условия теоремы. Выберем систему координат (x_1, x_2, x_3) в R^3 так, чтобы $\omega = (1, 0, 0)$. Для любой прямой $L \subset H$ с направляющим вектором $v = (0, v^2, v^3)$ векторы ω и $u = (0, u^1, u^2) = v = (0, -v^3, v^2)$ образуют ортонормированный

базис в плоскости P , ортогональной v . Величина $T_v f(y)$ известна для $v \in \Gamma$ и $x \in v^\perp \cap H$ и имеет две независимые компоненты в этом базисе:

$$J_v f(y; \omega, \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (f_{\omega\omega}(y + tv) - f_{uu}(y + tv)) dt$$

и

$$J_v f(y; \omega, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega u}(y + tv) dt.$$

Из теоремы 4 следует, что существует поле смещения φ такое, что $D\varphi = f : f_{ii} = \partial_i \varphi_i$, $f_{ij} = 1/2(\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i)$. Рассмотрим величины

$$I_1(v, p, \omega) = \int_{v^\perp \cap H} J_v f(x; \omega, \omega) dx,$$

$$I_2(v, p, \omega) = \int_{v^\perp \cap H} J_v f(x; \omega, u) dx,$$

Выразим эти величины через компоненты f_{ij} тензора f и компоненты $\partial_j \varphi_i$ поля φ .

По правилу преобразования компонент ковариантного тензора

$$f_{\omega u} = u_2 f_{12} + u^3 f_{13} = \frac{1}{2} \partial_\omega (u^2 \varphi_2 + u^3 \varphi_3) + \frac{1}{2} (u^2 \partial_2 + u^3 \partial_3) \varphi_1,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega u}(x + tv) dt &= \frac{1}{2} \partial_\omega \int_{-\infty}^{\infty} (-v^2 \varphi_2(x + tv) + v^2 \varphi_3(x + tv)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (-v^3 \partial_2 + v^2 \partial_3) \varphi_1(x + tv) dt. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее равенство по переменной $x \in v^\perp \cap H$ и

положим $y = x + tv$:

$$I_2(v, p, \omega) = \frac{1}{2} \partial_p \int_H (-v^2 \varphi_2(y) + v^2 \varphi_3(y)) dH \\ + \frac{1}{2} \int_H ((-v^3 \partial_2 + v^2 \partial_3) \varphi_1(y)) dH.$$

Второй интеграл обращается в ноль после интегрирования по частям. Запишем производные по v^3 и v^2 от обеих частей полученного равенства:

$$\frac{\partial}{\partial v^3} I_2(v, p, \omega) = -\frac{1}{2} \partial_p \int_H \varphi_2(y) dH;$$

$$\frac{\partial}{\partial v^2} I_2(v, p, \omega) = -\frac{1}{2} \partial_p \int_H \varphi_3(y) dH;$$

Для вычисления I_1 заметим, что по тензорному закону преобразования координат

$$f_{uu} = (u^2)^2 f_{22} + 2u^2 u^3 f_{23} + (u^3)^2 f_{33} \\ = (u^2)^2 \partial_2 \varphi_2 + u^2 u^3 (\partial_2 \varphi_3 + \partial_3 \varphi_2) + (u^3)^2 \partial_3 \varphi_3 \\ = (v^3)^2 \partial_2 \varphi_2 - v^2 v^3 (\partial_2 \varphi_3 + \partial_3 \varphi_2) + (v_2)^2 \partial_3 \varphi_3; \\ f_{\omega\omega} = f_{11}.$$

Имеем

$$2I_1(v, p, \omega) = \partial_p \int_H [(v^2)^2 + (v^3)^2] \varphi_1(y) dH \\ - \int_H [(v^3)^2 \partial_2 \varphi_2(y) - v^2 v^3 (\partial_2 \varphi_3(y) + \partial_3 \varphi_2(y)) + (v^2)^2 \partial_3 \varphi_3(y)] dH.$$

Второй интеграл обращается в ноль после интегрирования по частям. Поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial (v^2)^2} I_1(v, p, \omega) = \frac{\partial^2}{\partial (v^3)^2} I_1(v, p, \omega) = \partial_p \int_H \varphi_1(y) dH$$

Для определения компонент поля φ воспользуемся формулой обращения преобразования Радона:

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial^2 I_1}{\partial (v^2)^2}(p, \omega) \Big|_{p=\langle x, \omega \rangle} d\omega,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial I_2}{\partial v^3}(p, \omega) \Big|_{p=\langle x, \omega \rangle} d\omega,$$

$$\varphi_3(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial I_2}{\partial v^2}(p, \omega) \Big|_{p=\langle x, \omega \rangle} d\omega,$$

Окончание доказательства теоремы 2.

Согласно алгоритму шага 1 строим поле Vf . Пусть g – 2-тензорное поле с компактным носителем такое, что $Vg = Vf$ – калибр поля f (шаг 2). Положим $h = f - g$. Для этого поля имеем $Vh = Vf - Vg = 0$. Согласно теореме 4 существует единственное поле смещения φ такое, что $D\varphi = h$. Используя метод доказательства теоремы 5, построим это поле по неполным данным $Jh = Jf - Jg$ (шаг 3). Для поля f имеем формулу $f = g + D\varphi$. Теорема 2 доказана. $\square$

Список литературы

- [1] Palamodov V.P. On reconstruction of strain fields from tomographic data. 2015. Inverse Problems, 31:8, 85002, 12 pp.
- [2] Palamodov V. P. Reconstruction of a differential form from Doppler transform. SIAM J. Math. Anal. 2009. №41. Pp. 1713-1720.
- [3] Меджидов З.Г. Обращение лучевого преобразования симметричного тензорного поля с источниками на кривой. Вестник ДГУ. Вып 6. 2013. С. 107-113.
- [4] Меджидов З.Г. Обращение лучевого преобразования тензорных полей с бесконечно удаленными источниками. Вестник ДГУ. 2015. Вып. 1. С. 19–26.
- [5] Меджидов З.Г. Формулы обращения тензорной томографии по неполным данным. 2014. ДЭМИ. Вып. 2. С. 75–86

- [6] Шарафутдинов В. А. Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993. – 233 с.

Меджидов З.Г. (Medzhidov Z.G.)

Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию

31.08.2020