УДК 517.946

М. М. Сиражудинов

О непрерывных периодических решениях уравнения Бельтрами в полуплоскости

В работе изучена периодическая задача в верхней полуплоскости для уравнения Бельтрами с измеримым ограниченным 2π -периодическим коэффициентом.

Библиография: 5 названий.

In this paper we describe a general procedure for the derivation of the homogenized equation for the Beltrami equation.

Bibliography: 5 items.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, периодические решения.

Keywords: Beltrami equation, homogenization, method of asymptotic expansions.

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

$$\partial_{\bar{z}} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i \mathcal{D}_2), \quad \partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i \mathcal{D}_2), \quad \mathcal{D}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{D}_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad z = x + iy.$$

$\zeta = \xi + i\eta$, i — мнимая единица.

Пусть $g(z) = g(x, y)$ периодическая по x (периода 2π) функция, тогда $\langle g \rangle_x$ — среднее значение по x функции g , т. е.

$$\langle g \rangle_x = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} g(x, y) dx.$$

Периодическая задача на всей плоскости для эллиптических систем первого порядка, в частности, для систем Бельтрами, изучена нами в работе [1]. Здесь изучается периодическая задача в верхней полуплоскости для уравнения Бельтрами, т. е. задача периодическая по первой переменной x . Такого рода задачи возникают в некоторых вопросах усреднения дифференциальных операторов.

1. Весовые пространства

1.1. Весовые пространства Лебега $L_q(sqcup; \rho_0)$, $\rho_0 = e^{-2y}$

Пусть

$$\sqcup = \{z = x + iy \mid x \in [\alpha, \alpha + 2\pi), \quad y \in [0, +\infty)\}$$

— полуполоса периодов, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — любое действительное число. При помощи конформного отображения $\zeta = e^{-iz}$ полуполосу $\sqcup$ можно преобразовать в единичный круг $\{|\zeta| \leq 1\}$ (без центра) на комплексной плоскости ($\zeta = \xi + i\eta$). Обратное отображение единичного круга на полуполосу периодов дается равенством $z = -i \ln \zeta$. Якобианы этих отображений такие: $J(z) = e^{-2y}$ — Якобиан отображения $\zeta = e^{-iz}$, $J_1(\zeta) = |\zeta|^{-2}$ — Якобиан обратного отображения $z = -i \ln \zeta$. Заметим, что $J_1(\zeta) = |\zeta|^{-2} = e^{2y}$.

Обозначим через $L_q(\sqcup; \rho_0)$, $q \geq 2$, весовое пространство Лебега с весом $\rho_0(z) = e^{-2y}$. Норма элемента $u \in L_q(\sqcup; \rho_0)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_q(\sqcup; \rho_0)} &= \left((2\pi)^{-1} \int_{\sqcup} e^{-2y} |u(z)|^q dx dy \right)^{1/q} = \\ &= \left(\left\langle \int_0^\infty e^{-2y} |u(z)|^q dy \right\rangle_x \right)^{1/q}. \quad (1) \end{aligned}$$

После замены переменных под интегралом в (1) по формуле $z = -i \ln \zeta$, с учетом того, что Якобиан $J_1(\zeta) = |\zeta|^{-2} = e^{2y}$, получим

$$\|u\|_{L_q(\sqcup; \rho_0)} = \|v\|_{L_q(|\zeta| < 1)} = \left((2\pi)^{-1} \int_{|\zeta| < 1} |v(\zeta)|^q d\xi d\eta \right)^{1/q}, \quad (2)$$

где $v(\zeta) = v(e^{-iz}) = u(z)$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Очевидно, что имеют место равенства

$$\int_{\sqcup} |-ie^{-i\bar{z}} u(z)|^q e^{(q-2)y} dx dy = \int_{\sqcup} |u(z)|^q e^{-2y} dx dy = \int_{|\zeta| < 1} |v(\zeta)|^q d\xi d\eta. \quad (3)$$

Аналогично (2), после замены переменных под интегралом по формуле $\zeta = e^{iz}$, для любого $v \in L_q(|\zeta| < 1)$ получим

$$\|v\|_{L_q(|\zeta| < 1)} = \left((2\pi)^{-1} \int_{|\zeta| < 1} |v(\zeta)|^q d\xi d\eta \right)^{1/q} = \|u\|_{L_q(\sqcup; \rho_0)}, \quad (4)$$

где $u(z) = u(-i \ln \zeta) = v(\zeta)$.

Из соотношений (2), (4) следует, что соответствие $L_q(\sqcup; \rho_0) \ni u \mapsto v \in L_q(|\zeta| < 1)$, которое является следствием конформности отображения $\zeta = e^{iz}$ полуполосы на единичный круг, есть изоморфизм. Следовательно, $L_q(\sqcup; \rho_0)$ — банахово пространство.

1.2. Весовые пространства Соболева $L_q(\sqcup; \rho_0, \rho_1)$, $\rho_0 = e^{-2y}$, $\rho_1 = e^{(q-2)y}$

Пусть $\zeta = w(z)$, $z \in Q$, гладкая (класса C^1) функция диффеоморфно отображающая область Q на область Q^* , причем якобиан отображения нигде не обращается в нуль. Тогда, как известно, производные сложной функции $v(\zeta) = v(w(z)) = u(z)$ даются равенствами

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} u(z) = \partial_{\zeta} v(\zeta) \partial_{\bar{z}} w + \partial_{\bar{\zeta}} v(\zeta) \partial_{\bar{z}} \bar{w} \\ \partial_z u(z) = \partial_{\zeta} v(\zeta) \partial_z w + \partial_{\bar{\zeta}} v(\zeta) \partial_z \bar{w}. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $Q = \sqcup$ — полуполоса периодов, $Q^* = \{|\zeta| < 1\}$ и $\zeta = e^{iz}$ — конформное отображение полуполосы на единичный круг, тогда, ввиду аналитичности $w = e^{iz}$, из (5) имеем:

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} u(z) = -ie^{-i\bar{z}} \partial_{\bar{\zeta}} v(\zeta) = -i\bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} v(\zeta) \\ \partial_z u(z) = ie^{iz} \partial_{\zeta} v(\zeta) = i\zeta \partial_{\zeta} v(\zeta). \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим через $W_q^1(\sqcup; \rho_0, \rho_1)$, где $\rho_0(z) = e^{-2y}$, $\rho_1(z) = e^{(q-2)y}$ — веса, линейное пространство комплекснозначных периодических по x функций с нормой

$$\|u\|_{W_q^1(\sqcup; \rho_0, \rho_1)} = \|u\|_{L_q(\sqcup; \rho_0)} + \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_q(\sqcup; \rho_1)} + \|\partial_z u\|_{L_q(\sqcup; \rho_1)}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_q(\mathbb{L}; \rho_0)} &= \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{L}} e^{-2y} |u(z)|^q dx dy \right)^{1/q} = \\ &= \left(\left\langle \int_0^\infty e^{-2y} |u(z)|^q dy \right\rangle_x \right)^{1/q}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_q(\mathbb{L}; \rho_1)} &= \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{L}} e^{(q-2)y} |\partial_{\bar{z}} u(z)|^q dx dy \right)^{1/q} = \\ &= \left(\left\langle \int_0^\infty e^{(q-2)y} |\partial_{\bar{z}} u(z)|^q dy \right\rangle_x \right)^{1/q}, \\ \|\partial_z u\|_{L_q(\mathbb{L}; \rho_1)} &= \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{L}} e^{(q-2)y} |\partial_z u(z)|^q dx dy \right)^{1/q} = \\ &= \left(\left\langle \int_0^\infty e^{(q-2)y} |\partial_z u(z)|^q dy \right\rangle_x \right)^{1/q}. \quad (9) \end{aligned}$$

Заметим, что пространство $W_q^1(\mathbb{L}; \rho_0, \rho_1)$ — весовое пространство Соболева периодических по переменной x функций. *Докажем полноту этого пространства.*

Совершим в интегралах из формул (8), (9) замену переменных по формуле $z = -i \ln \zeta$, $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда, с учетом того, что Якобиан $J_1(\zeta) = |\zeta|^{-2} = e^{2y}$, аналогично формуле (2) получим

$$\|u\|_{L_q(\mathbb{L}; \rho_0)} = \|v\|_{L_q(|\zeta| < 1)} = \left((2\pi)^{-1} \int_{|\zeta| < 1} |v(\zeta)|^q d\xi d\eta \right)^{1/q}, \quad (10)$$

$$\|\partial_z u\|_{L_q(\mathbb{L}; \rho_1)} = \|\partial_\zeta v\|_{L_q(|\zeta| < 1)} = \left((2\pi)^{-1} \int_{|\zeta| < 1} |\partial_\zeta v(\zeta)|^q d\xi d\eta \right)^{1/q}, \quad (11)$$

$$\|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_q(\mathbb{L}; \rho_1)} = \|\partial_{\bar{\zeta}} v\|_{L_q(|\zeta| < 1)} = \left((2\pi)^{-1} \int_{|\zeta| < 1} |\partial_{\bar{\zeta}} v(\zeta)|^q d\xi d\eta \right)^{1/q}. \quad (12)$$

Из соотношений (7) – (12) вытекает равенство

$$\|u\|_{W_q^1(\sqcup; \rho_0, \rho_1)} = \|v\|_{W_q^1(|\zeta| < 1)}, \quad (13)$$

где $v(\zeta) = v(e^{iz}) = u(z)$, $W_q^1(|\zeta| < 1)$ — обычное пространство Соболева.

Аналогично (13), заменой переменных под интегралами по формуле $\zeta = e^{iz}$, для любого $v \in W_q^1(|\zeta| < 1)$, $v = v(\zeta)$, имеем

$$\|v\|_{W_q^1(|\zeta| < 1)} = \|u\|_{W_q^1(\sqcup; \rho_0, \rho_1)}, \quad (14)$$

где $u(z) = u(-i \ln \zeta) = v(\zeta)$.

2. Периодическая задача в верхней полуплоскости

Пусть показатель суммируемости $q = 2$, тогда вес ρ_1 равен единице, $\rho_1 = 1$. Рассмотрим следующую периодическую задачу:

$$\begin{cases} ie^{i\bar{z}} Au \equiv ie^{i\bar{z}} (\partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u) = f \in L_2(\sqcup; \rho_0), \\ u \in W_2^1(\sqcup; \rho_0, 1), \\ \operatorname{Re} u = 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, 2\pi], \quad y = 0, \\ \int_{\sqcup} e^{-2y} \operatorname{Im} u(z) dx dy = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где коэффициент $\mu = \mu(z)$ — измеримая периодическая (периода 2π по x) функция, удовлетворяющая оценке

$$\operatorname{vrai} \sup_{z \in \sqcup} |\mu(z)| \leq k_0 < 1, \quad (16)$$

$k_0 > 0$ — постоянная (*константа эллиптичности*).

После конформного преобразования $\zeta = e^{iz}$ полуполосы $\sqcup$ в единичный круг $|\zeta| \leq 1$, с учетом формул (6), задача (15) переходит в эквивалентную ей задачу Римана-Гильберта

$$\begin{cases} A_0 v \equiv \partial_{\bar{\zeta}} v(\zeta) + \tilde{\mu}(\zeta) \partial_{\zeta} v(\zeta) = g \in L_2(|\zeta| < 1), \\ v \in W_2^1(|\zeta| < 1), \\ \operatorname{Re} v = 0 \quad \text{на окружности} \quad |\zeta| = 1, \\ \int_{\{|\zeta| < 1\}} \operatorname{Im} v(\zeta) d\xi d\eta = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $\tilde{\mu}(\zeta) = -\zeta\bar{\zeta}^{-1}\mu(-i\ln\zeta)$, $g = f(-i\ln\zeta)$. Из условия эллиптичности (16), очевидно, следует условие эллиптичности задачи Римана-Гильберта (17):

$$\operatorname{vrai\,sup}_{\zeta \in \{|\zeta| < 1\}} |\mu(\zeta)| \leq k_0 < 1.$$

Как известно, (см. [2–5]), для задачи (17) справедливы следующие утверждения:

- 1) Задача (17) однозначно разрешима для любой правой части $g \in L_2(|\zeta| < 1)$.
- 2) Пусть правая часть g в (17) принадлежит $L_q(|\zeta| < 1)$, $q > 2$, тогда найдется показатель $p_0 = p_0(k_0)$ повышенной суммируемости, такой, что p_0 зависит только от постоянной эллиптичности k_0 , $2 < p_0 \leq q$, решение v задачи (17) принадлежит пространству Соболева $W_p^1(|\zeta| < 1)$, $2 < p \leq p_0$, причем имеет место априорная оценка

$$c_0 \|v\|_{W_p^1(|\zeta| < 1)} \leq \|A_0 v\|_{L_p(|\zeta| < 1)}, \quad (18)$$

где $c_0 > 0$ — постоянная, зависящая только от k_0 . Ввиду теоремы вложения, из (18) следует, что v есть непрерывная функция, принадлежащая пространству Гельдера $H^\alpha(|\zeta| \leq 1)$, где $\alpha = (p - 2)/p$.

Из отмеченных выше в 1) и 2) свойств решений задачи (17) и эквивалентности задач (15), (17) следует справедливость следующей леммы

ЛЕММА 1. *Задача (15) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(\mathbb{D}; \rho_0)$.*

Пусть $f \in L_p(\mathbb{D}; \rho_0)$, где $2 < p \leq p_0$, p_0 показатель повышенной суммируемости из 2), тогда решение v задачи (17) принадлежит весовому пространству Соболева $W_p^1(\mathbb{D}; \rho_0, \rho_1)$, причем имеет место априорная оценка

$$c_0 \|v\|_{W_p^1(\mathbb{D}; \rho_0, \rho_1)} \leq \|A_0 v\|_{L_p(\mathbb{D}; \rho_0)}, \quad (19)$$

где $c_0 > 0$ — постоянная, зависящая только от k_0 . Кроме того, решение v есть непрерывная функция, принадлежащая пространству Гельдера $H^\alpha(\mathbb{D}; \rho_0, \rho_1)$, где $\alpha = (p - 2)/p$.

2.1. Непрерывные периодические решения в верхней полуплоскости

Теперь рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Au \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u = f \in L_2(\sqcup; \rho_0), \\ u \in W_2^1(\sqcup; \rho_0, 1), \\ \operatorname{Re} u = 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, 2\pi], \quad y = 0, \\ \int_{\sqcup} e^{-2y} \operatorname{Im} u(z) dx dy = 0, \end{cases} \quad (20)$$

Обозначим через $W_0(\sqcup; \rho_0, 1)$ подпространство пространства $W_2^1(\sqcup; \rho_0, 1)$, элементы которого удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Re} u = 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, 2\pi], \quad y = 0$$

$$\text{и} \quad \int_{\sqcup} e^{-2y} \operatorname{Im} u(z) dx dy = 0.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Все утверждения из леммы 1 справедливы и для задачи (20).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 1, отображение $B = ie^{i\bar{z}} \circ A : W_0(\sqcup; \rho_0, 1) \rightarrow L_2(\sqcup; \rho_0)$ есть изоморфизм. Оператор умножения элементов $L_2(\sqcup; \rho_0)$ на $ie^{i\bar{z}}$, ввиду (3), также есть изоморфизм. Следовательно, оператор $A : W_0(\sqcup; \rho_0, 1) \rightarrow L_2(\sqcup; \rho_0)$ — изоморфизм. Первая часть теоремы доказана. Для доказательства второй части, куда входит, в частности, гильдеровость решения, достаточно рассмотреть задачу $Bu = g$, $g = ie^{i\bar{z}} f$, $u \in W_0(\sqcup; \rho_0, 1)$ и воспользоваться леммой 1. $\square$

Список литературы

- [1] М. М. Сиражудинов. О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка // Матем. заметки. 1990. Т. 48. Вып. 5. стр. 153–155.
- [2] М. М. Сиражудинов. О G-сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сб.. 2008. Т. 199. Вып. 5. стр. 124–155.

- [3] М. М. Сиражудинов, Р. М. Сиражудинов. О G -сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами // Труды МИАН. 2008. Т. 121. Вып. . стр. 268–276.
- [4] М. М. Сиражудинов. О G -компактности одного класса эллиптических систем первого порядка // Дифф. уравн. 1990. Т. 26. Вып. 2 . стр. 298–305.
- [5] М. М. Сиражудинов. О краевой задаче Римана–Гильберта // Дифф. уравн. 1989. Т. 25. Вып. 8 . стр. 1400–1406.

М. М. Сиражудинов (M. M. Sirazhudinov)
ДФИЦ РАН, ДГУ, ДГУНХ
E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Поступила в редакцию
02.09.2020