

УДК 519.1

А. М. Магомедов, С. А. Лавренченко

Вычислительные аспекты задачи перечисления разбиений

Рассмотрены вопросы выполнения точных вычислений по классической формуле Кастелейна для подсчета количества совершенных паросочетаний решеточного графа. Сформулированы два теста, обеспечивающие программному обеспечению автоматическую коррекцию точности вычислений.

Библиография: 12 названий.

The problems of performing exact calculations using the classical Kasteleyn formula for calculating the number of perfect matching of a lattice graph are considered. Two tests are formulated that provide the software with automatic correction of the calculation accuracy.

Bibliography: 12 items.

Ключевые слова: формула, вычисления, погрешность, тестирование, программирование.

Keywords: formula, calculations, error, testing, programming.

Введение

Обозначим через $T(m, n)$ число способов разбиения $m \times n$ -прямоугольника на «домино» — 1×2 -прямоугольники, расположенные вертикально или горизонтально. Задача подсчета $T(m, n)$ рассмотрена Kasteleyn P. W. в 1961 г. в связи с исследованием физической задачи [1].

В разделе 1 показаны связи с задачей подсчета совершенных паросочетаний решеточного графа, а также с существованием у графа пфафовой ориентации.

⁰Работа выполнена при поддержке Отдела математики и информатики ДФИЦ РАН

В разделе 2 рассмотрен вопрос вычисления перманента кососимметричной матрицы смежности вершин специальным образом ориентированного решеточного графа и изложена подробная схема вывода формулы Кастелейна. Эти два раздела носят в основном обзорный характер.

В разделе 3 предложено упрощение формулы Кастелейна, приведена схема выполнения вычислений, получены тригонометрические тождества.

В разделе 4 предложено решение проблем выполнения вычислений по упрощенной формуле, рассмотрены рекуррентные соотношения для эффективного вычисления точных значений $T(m, n)$ и сформулированы тесты, обеспечивающие автоматизацию выбора нужных параметров точности вычислений самим программным обеспечением.

1. Ориентация решеточного графа

1.1. Эквивалентная задача о решеточном графе

Поскольку $T(m, n) = 0$ при нечетном $m \cdot n$, то будем считать, что хотя бы одно из m и n четно. Задаче посвящены десятки работ и многие из них начинаются с доказательства того, что при $m = 2$ искомые $T(m, n)$ — числа Фибоначчи. Из рис. 1.1 видно, что задача сводится к подсчету

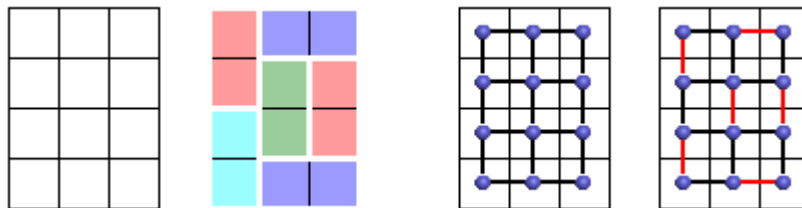


Рис. 1.1: Прямоугольнику (а) соответствует решеточный граф (в), а разбиению (б) — совершенное паросочетание (г).

количества совершенных паросочетаний в решеточном графе с числом вершин $Q = mn = 2q$.

1.2. Перечисление совершенных паросочетаний и перманент

Набор всех разбиений $\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_q, j_q)\}$ множества $\{1, 2, \dots, Q\}$ на пары будем обозначать через R .

На рис. 1.2 приведен пример. Справа размещена $(Q \times Q)$ -матрица смежности A решеточного графа: $a_{ij} = 1$, если вершины i и j соединены ребром, в противном случае $a_{ij} = 0$; $a_{ij} = a_{ji}$; элементы главной диагонали равны нулю. Совершенное паросочетание, соответствующее рассматриваемому разбиению, выделено и в графе, и в матрице: в каждой линии (строке и столбце) выделена в точности одна единица.

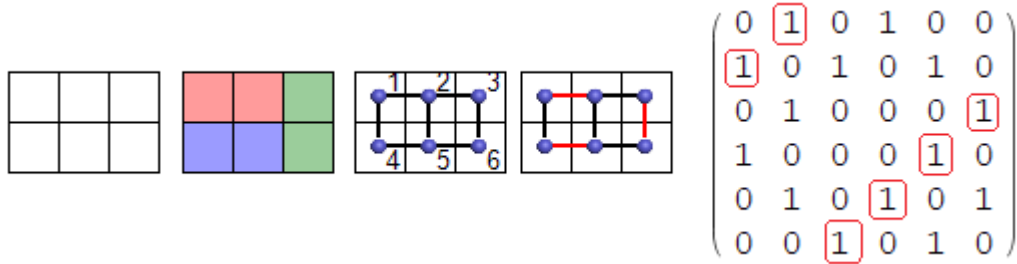


Рис. 1.2: Разбиение множества $1,2,3,4,5,6$ на пары: $\{(1, 2), (3, 6), (4, 5)\}$.

Каждому совершенному паросочетанию соответствует разбиение. Но разбиению $\alpha \in R$ совершенное паросочетание соответствует лишь тогда, когда каждая пара из α образует ребро:

$$a_{i_1, j_1} = a_{i_2, j_2} = \dots = a_{i_q, j_q} = 1,$$

т.е. когда

$$a_{i_1, j_1} \cdot a_{i_2, j_2} \cdot \dots \cdot a_{i_q, j_q} = 1. \tag{1}$$

Итак, получена формула

$$T(m, n) = \sum_{\alpha \in R} a_{i_1, j_1} \cdot a_{i_2, j_2} \cdot \dots \cdot a_{i_q, j_q}. \tag{2}$$

Сумма в правой части называется *перманентом*. Если для $\alpha \in R$ условие (1) не выполнено, разбиение не вносит вклад в перманент. Если же выполнено, т.е. слагаемому соответствует совершенное паросочетание, то вклад разбиения α равен единице, а сумма этих единиц и есть искомый результат.

Таким образом, задача сведена к вычислению перманента $(mn \times mn)$ -матрицы A . Однако в [2] доказана следующая теорема (L. Valiant, 1979 г.).

ТЕОРЕМА 1. *Вычисление перманента является $\#P$ -полной задачей.*

Более точно, в [2] доказана $\#P$ -полнота задачи о подсчете числа различных совершенных паросочетаний в двудольном графе и эквивалентность данной задачи вычислению перманента матрицы 0-1. Отметим, что класс $\#P$ -полных задач, включающий многие задачи перечисления, был введен с целью подчеркнуть дополнительную сложность задач перечисления, см. [3, с. 208-212].

Для планирования наших дальнейших действий понадобится понятие *пфаффиана*. Несколько забегаая вперед, заметим, что планы базируются на эффективной вычислимости $\det(A)$ (за время $O(Q^3)$).

1.3. Пфаффиан, детерминант и пфаффова ориентация графа

Матрица A' смежности вершин орграфа G' , полученного произвольной ориентацией всех ребер графа G , является кососимметричной: $a'_{ij} = -a'_{ji}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под *пфаффианом* кососимметричной матрицы A' чётного порядка $Q = 2q$ понимают сумму

$$Pf(A') = \sum_{\alpha \in R} \text{sgn}(\alpha) a'_{i_1, j_1} \cdot a'_{i_2, j_2} \cdot \dots \cdot a'_{i_q, j_q}, \quad (3)$$

где суммирование выполняется по всем разбиениям

$$\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_q, j_q)\}$$

множества $\{1, 2, \dots, Q\}$ на пары, а $\text{sgn}(\alpha)$ обозначает знак подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2q \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & j_q \end{pmatrix},$$

т.е. +1 или -1 в зависимости от четности количества транспозиций, требуемых для восстановления нижней строки к исходному виду.

Для $\alpha \in R$ слагаемые в суммах (2) и (3) будут одновременно нулевыми или отличными от нуля, ведь a_{ij} и a'_{ij} отличаются разве лишь знаком в зависимости от ориентации ребра (v_i, v_j) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ориентация графа G , при которой все ненулевые слагаемые в (3) одного знака, называется пфаффовою ориентацией.

Чем помогло бы существование пфаффовой ориентации? Тогда перманент был бы равен $|Pf(A')|$ и, как видно из следующей теоремы Кэли (1849 г.), его вычисление не составило бы труда.

ТЕОРЕМА 2. Для любой кососимметричной матрицы A

$$|Pf(A)|^2 = \det(A).$$

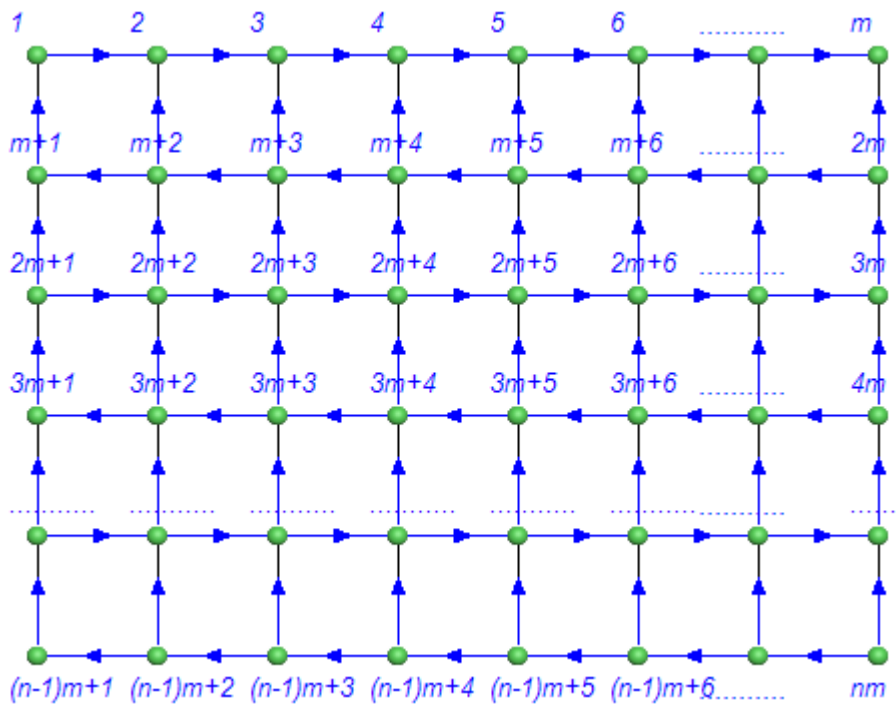


Рис. 1.3: Ленточная ориентация G' решеточного графа.

Достаточные условия существования пфаффовой ориентации были получены Кастелейном (1961 г.).

ТЕОРЕМА 3. 1) У любого плоского графа есть пфаффовая ориентация, причем вычислимая за полиномиальное время. 2) Граф, полученный из плоского графа G такой ориентацией ребер, что для любой грани (за исключением, может быть, бесконечной) против часовой стрелки ориентировано нечётное число рёбер, является пфаффовой ориентацией.

Согласно приведенной теореме, «ленточная» ориентация решеточного графа, изображенная на рис. 1.3, является пфаффовою.

Поскольку $T(m, n)$ равно абсолютной величине пфаффиана, а последняя — после ленточной ориентации графа — равна квадратному корню из детерминанта и поэтому допускает эффективное вычисление, то проблему нахождения $T(m, n)$ «в принципе» можно считать решенной.

Но мы продолжим рассмотрение до получения замкнутой формулы для $T(m, n)$, затем исследуем актуальные вопросы точных вычислений по ней.

2. Блочная структура матрицы (G')

2.1. Структуризация матрицы (G')

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Характеристическим многочленом $Q \times Q$ -матрицы A называется многочлен $\det(\lambda E - A)$. Все его Q корней называются собственными числами A .

Приведем теорему Виета.

ТЕОРЕМА 4. *Детерминант равен произведению собственных чисел и $(-1)^Q$.*

(Напомним, что в данном контексте Q — четное).

Кососимметрическую матрицу полученного орграфа G' разобьем на n горизонтальных и n вертикальных полос по m линий (строк или столбцов) в каждой полосе.

(i, j) -блок, образованный пересечением i -й горизонтальной полосы с j -й вертикальной полосой, есть $m \times m$ -подматрица с элементами $-1, 0, +1$; она описывает связи между вершинами i -й строки ленточно-ориентированной решетки G' из рис. 1.3 и вершинами j -й строки.

Каждый (i, i) -блок отображает внутренние связи между вершинами

i -й строки ориентированной решетки G' на рис. 1.3 и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & -1 & \\ & & & 1 & 0 & \end{pmatrix} \text{ или } -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

в случае четного или нечетного i соответственно, $i = 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим внутреннюю вершину $v_{(i-1)m+j}$ ориентированной решетки G' из j -й позиции i -й строки. Ее связи с вершинами в позициях $j - 1$ и $j + 1$ той же строки i будут отражены в (i, i) -блоке в двух ячейках с «локальными координатами» $(j, j - 1)$ и $(j, j + 1)$ соответствующей $m \times m$ -матрицы значениями $+1$ и -1 — при четном i и значениями -1 и $+1$ — при нечетном i .

Дуге $(v_{(i-1)m+j}, v_{(i-2)m+j})$ отвечает $+1$ в ячейке, имеющей в блоке $(i, i - 1)$ локальные координаты (j, j) , а дуге $(v_{im+j}, v_{(i-1)m+j})$ отвечает -1 в ячейке, имеющей в блоке $(i, i + 1)$ локальные координаты (j, j) .

Описание связей вершины, принадлежащей границе решетки, также не представляет труда.

Кроме (i, i) -блоков ненулевые элементы могут содержать лишь блоки вида $(i, i - 1)$ и $(i, i + 1)$; $m \times m$ -матрицы последних имеют вид соответственно

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & \end{pmatrix} \text{ и } -E = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ 0 & -1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & -1 & \\ & & & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Блочная структура всей матрицы (G') достаточно сложна:

$$(G') = \begin{pmatrix} A & E & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -E & -A & E & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -E & A & \cdot & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & (-1)^{n-2}A & E \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -E & (-1)^{n-1}A \end{pmatrix}.$$

2.2. Упрощение структуры матрицы

Абсолютная величина дискриминанта матрицы (G') инвариантна относительно умножения вертикальных и горизонтальных полос на -1 . Следуя [4], выберем для умножения полосы таким образом, чтобы в результате все блоки по главной диагонали были равны $-A$, а все блоки обеих соседних ей диагоналей равны E .

	-1	2	3	-4	-5	6	7	-8	-9	10	11	-12
1	A	E										
2	-E	-A	E									
-3		-E	A	E								
-4			-E	-A	E							
5				-E	A	E						
6					-E	-A	E					
-7						-E	A	E				
-8							-E	-A	E			
9								-E	A	E		
10									-E	-A	E	
-11										-E	A	E
-12											-E	-A

Рис. 2.1: Преобразование матрицы.

Вот нужный выбор: горизонтальные полосы 3,4,7,8,11,12,15,16, ... (желтая краска), вертикальные полосы 1, 4,5, 8,9, 12,13, 16, 17, ... (красный цвет). Правильность выбора следует из того, что каждая краска единожды меняет знак блока.

Для полученной матрицы

$$M = \begin{pmatrix} -A & E & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ E & -A & E & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & E & -A & \cdot & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -A & E \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & E & -A \end{pmatrix}$$

выполняется равенство

$$M = -E_n \otimes A + B \otimes E_m,$$

Многочлен $U_{m+1}(x)$ Чебышёва второго рода — многочлен степени m со старшим коэффициентом 2^m , интеграл абсолютного значения которого по интервалу $[-1, 1]$ наименьший возможный. Из трех стандартных способов его определения выберем рекуррентный способ:

$$U_1(x) = 1, U_2(x) = 2x, U_m(x) = 2xU_{m-1}(x) - U_{m-2}(x).$$

Корни характеристических многочленов матриц A и B :

$$C_m(\lambda) = \det(\lambda E_m - A) \quad \text{и} \quad D_n(\mu) = \det(\mu E_n - B)$$

получаются умножением корней многочленов Чебышева второго рода $U_{m+1}(x)$ и $U_{n+1}(x)$ в первом случае — на $-2i$, а во втором — на 2. Действия в обоих случаях вполне однообразны. Подробное изложение приведем, например, для $D_n(\mu)$.

2.3. Собственные числа матриц A , B и M . Рекуррентное соотношение для $D_n(\mu)$

Разложим $D_n(\mu) = |\mu E_n - B|$ по первой строке:

$$\begin{vmatrix} \mu & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & \mu & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \mu & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \mu \cdot \begin{vmatrix} \mu & -1 & 0 & \dots \\ -1 & \mu & -1 & \dots \\ 0 & -1 & \mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -1 & \dots \\ 0 & -1 & \mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

затем последний определитель — по первому столбцу. Получим рекуррентное соотношение:

$$D_n(\mu) = \mu D_{n-1}(\mu) - D_{n-2}(\mu); \quad D_1(\mu) = \mu, D_2(\mu) = \mu^2 - 1.$$

Заменим переменную $\mu = 2x$:

$$D_1(\mu) = 2x = U_2(x), \quad D_2(\mu) = \mu^2 - 1 = 4x^2 - 1 = U_3(x).$$

Покажем методом индукции, что $D_n(\mu) = U_{n+1}(x)$.

$$\begin{aligned} D_n(\mu) &= \mu D_{n-1}(\mu) - D_{n-2}(\mu) = \mu U_n(x) - U_{n-1}(x) = \\ &= 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x) = U_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Корни многочлена $U_{n+1}(x)$ известны: $x_i = \cos \frac{\pi i}{n+1}, i = 1, \dots, n$. Следовательно, собственные числа матрицы B равны

$$\mu_i = 2 \cdot \cos \frac{\pi i}{n+1}, i = 1, \dots, n.$$

В первом случае действия отличаются лишь заменой переменной: $\lambda = 2ix$.

$$C_1(\lambda) = \lambda, \quad C_2(\lambda) = \lambda^2 + 1;$$

$$C_m(\lambda) = \lambda C_{m-1}(\lambda) + C_{m-2}(\lambda) = i^m U_{m+1}(x);$$

следовательно, собственные числа матрицы A равны

$$\lambda_j = 2i \cdot \cos \frac{\pi j}{m+1}, j = 1, \dots, m.$$

Собственные значения матрицы M найдены:

$$\mu_k - \lambda_j = 2 \cdot \cos \frac{\pi k}{n+1} - 2i \cdot \cos \frac{\pi j}{m+1}, k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Модуль определителя матрицы M равен произведению всех

$$|\mu_k - \lambda_j| = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}}, k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m,$$

а для получения пфаффиана следует еще извлечь квадратный корень:

$$T(m, n) = |Pf(A')| = \sqrt{\det(A')} = \sqrt{\det(M)} = \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(4 \cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4)$$

Получили классическую формулу Кастелейна.

Формула корректна и для случая, когда m и n нечетные, т.к. в этом случае найдется сомножитель со значением 0:

$$\cos^2 \frac{\pi \lceil m/2 \rceil}{m+1} + \cos^2 \frac{\pi \lceil n/2 \rceil}{n+1} = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0.$$

3. Упрощение формулы Кастелейна

3.1. m и n четные

Если множества значений

$$\left\{ \cos^2 \frac{\pi j}{m+1}; j = j_1, \dots, j_2 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \cos^2 \frac{\pi j}{m+1}; j = j_3, \dots, j_4 \right\}$$

отличаются разве лишь направлением следования элементов, будем говорить об *инверсном равенстве* этих множеств. Обозначение: $(m; j_1, j_2, j_3, j_4)$. Например, из очевидного

$$\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} = \cos^2 \frac{\pi(m+1-j)}{m+1}$$

следует инверсное равенство $(m; 1, m/2, m/2+1, m)$. Аналогично доказывается и $(n; 1, n/2, n/2+1, n)$. Следовательно, значения всех четырех блоков множителей, на которые разбивается двойное произведение в формуле (4) при

$j = 1, \dots, m/2;$ $k = 1, \dots, n/2$	$j = 1, \dots, m/2;$ $k = n/2 + 1, \dots, n$
$j = m/2 + 1, \dots, m;$ $k = 1, \dots, n/2$	$j = m/2 + 1, \dots, m;$ $k = n/2 + 1, \dots, n$

равны между собой. Поэтому с учетом показателя степени $\frac{1}{4}$ в записи формулы остается любой один из четырех блоков и формула принимает вид:

$$T(m, n) = \prod_{j=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(4 \cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right). \quad (5)$$

3.2. m чётно, n нечётно

Разобьем произведение в (4) на блоки $j \in \{1, \dots, m/2\}$ и $j \in \{m/2 + 1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} T(m, n) &= \prod_{j=1}^{m/2} \prod_{k=1}^n \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \\ &\quad \prod_{j=m/2+1}^m \prod_{k=1}^n \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{\frac{1}{4}} = \\ &\quad \prod_{j=1}^{m/2} \prod_{k=1}^n \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались инверсным равенством $(m; 1, m/2, m/2 + 1, m)$, из которого вытекает равенство значений двух выделенных блоков.

Для каждого $j = 1, \dots, m/2$, разобьем произведение на три блока, соответствующие $k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$; $k = \lceil n/2 \rceil$ и $k = \lceil n/2 \rceil + 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} T(m, n) &= \prod_{j=1}^{m/2} \prod_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \prod_{j=1}^{m/2} \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi \lceil n/2 \rceil}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \prod_{j=1}^{m/2} \prod_{k=\lceil n/2 \rceil + 1}^n \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6) \end{aligned}$$

Ввиду инверсного равенства множеств

$$\left\{ 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1}; k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \right\} \text{ и } \left\{ 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1}; k = \lceil n/2 \rceil + 1, \dots, n \right\}$$

значения первого и третьего блоков равны между собой, и с учетом показателя степени $1/2$ остается один из них. Во втором блоке второе слагаемое равно нулю, при этом значение второго блока равно 1.

3.3. Тригонометрические тождества

В самом деле, последнее утверждение немедленно следует из тождества (m — четное)

$$\prod_{j=1}^{m/2} 4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} = 1, \quad (7)$$

что равносильно

$$\prod_{j=1}^{m/2} \cos \frac{\pi j}{m+1} = \frac{1}{2^{m/2}}.$$

Отметим здесь же и тождество (m — четное):

$$\prod_{j=1}^m \cos \frac{\pi j}{m+1} = -\frac{1}{2^m}.$$

Последние два тождества доказываются без труда, для частных случаев они приведены в [5] (упражнения 3.421 и 3.422).

Формулу

$$T(m, n) = \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right) \quad (8)$$

также будем называть *формулой Кастелейна*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В статье [11] приведена формула, отличающаяся от (8) лишь тем, что в качестве верхних границ изменения j и k вместо $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ и $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ указаны $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ и $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Интересно, что из сказанного в конце предыдущего пункта о равенстве значения второго блока единице следует, что обе формы записи эквивалентны.

Сформулируем алгоритм выполнения вычислений по формуле (8).

Вход: натуральные m и n , хотя бы одно из которых четно.

Выход: значение $T(m, n)$.

$p := 1$;

Для $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ выполнить:

{

$$a := 4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1};$$

для $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ выполнить:

$$p := p \cdot \left(a + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right);$$

}

Вывод p .

4. Проблема точных вычислений по формуле Кастелейна

4.1. Приведение к рекуррентному соотношению

Вхождение тригонометрических функций в формулу Кастелейна и операции с числами в форме с плавающей запятой затрудняют получение точных результатов при больших значениях m и n .

Например, в таблице для $T(m, n)$, $m \leq 12$, $n \leq 8$, построенной в [6], в качестве значений $T(10, 8)$, $T(11, 8)$ и $T(12, 8)$ приведены 1031151240, 8940739821 и 82741005789 соответственно, тогда как их истинные значения равны соответственно 1031151241, 8940739824 и 82741005829; последние совпадают со значениями, приведенными в [7], а также со значениями, вычисленными авторской компьютерной программой по формуле (8).

Системы взаимно-рекуррентных формул (в.р.ф.), полученные в [8] с привлечением программного обеспечения, содержат лишь операции сложения и умножения целых чисел и свободны от отмеченного недостатка формулы (8).

Однако эти системы в.р.ф. весьма громоздки при больших значениях параметров. Например, при $m = 6$ система содержит 10 в.р.ф., а при $m = 13$ их число равно 3050.

При $m = 2$ решение дается рекуррентной формулой (с *порядком рекурсии*, равном двум):

$$a_r = a_{r-1} + a_{r-2}, \quad a_1 = a_0 = 1,$$

т.е. числами Фибоначчи; здесь и далее a_r — сокращенное обозначение для $T(m, r)$ при фиксированном в конкретном контексте значении m .

При $m = 3$ система в.р.ф. содержит две формулы:

$$\begin{cases} b_{r-1} = a_{r-2} + b_{r-3}, \\ a_r = a_{r-2} + 2b_{r-1}, \end{cases}$$

(где b_r — количество разбиений на домино фигуры, полученной из $m \times r$ -прямоугольника удалением угловой клетки) и легко может быть приведена к рекуррентному соотношению с порядком рекурсии, равном четырем:

$$a_r = 4a_{r-2} - a_{r-4}.$$

Приведение системы в.к.р. к одному рекуррентному соотношению будем называть *нормализацией*. Сформулируем *задачу нормализации* системы в.к.р. при некотором фиксированном m : найти натуральное R (порядок рекурсии) и целочисленные коэффициенты x_1, x_2, \dots, x_R , такие, что

$$a_r = x_1 a_{r-1} + x_2 a_{r-2} + x_3 a_{r-3} + \dots + x_R a_{r-R} \quad (9)$$

для произвольного r .

Для решения задачи нормализации можно применить следующий подход.

Пусть выбрано некоторое m и известны значения a_1, \dots, a_{2R} , где по поводу R можно утверждать лишь, что это — «достаточно большое» число. Для определения R и коэффициентов x_1, x_2, \dots, x_R рекуррентной формулы (9) используем следующее рабочее правило: вначале положим $R = m$; если система линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.)

$$\begin{cases} a_{R+1} = x_1 a_R + x_2 a_{R-1} + \dots + x_R a_1, \\ \dots \\ a_{2R} = x_1 a_{2R-1} + x_2 a_{2R-2} + \dots + x_R a_R \end{cases}$$

или, в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} a_R & \dots & a_1 \\ \dots & & \\ a_{2R-1} & \dots & a_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{R+1} \\ \dots \\ a_{2R} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

имеет целочисленное решение, то искомые коэффициенты найдены, в противном случае увеличим R на единицу и повторим попытку найти целочисленное решение системы (10).

Следующая гипотеза сформулирована в результате численных экспериментов.

ГИПОТЕЗА. Порядок рекурсии R в (9) можно выбрать равным $2^{\lceil m/2 \rceil}$.

Суть предлагаемого двухшагового подхода к вычислению чисел a_r такова. Пусть выбрано некоторое небольшое значение m .

На первом шаге средствами языка $C\#$ с применением классов *BigInteger* и *BigFloat* (из библиотек `System.Numerics` и `Extreme.Mathematics` соответственно) вычислить по формуле (8) значения

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2R}, a_{2R+1}, \tag{11}$$

где $R = 2^{\lceil m/2 \rceil}$, и для формирования рекуррентной формулы (9) решить с.л.а.у. (10); относительно a_{2R+1} ограничимся пока замечанием, что он не принимает участие в операциях первого шага.

По полученной рекуррентной формуле (9) на втором шаге вычислить числа a_r для произвольного $r > 2R$, используя только операции сложения и умножения целых чисел.

Для решения с.л.а.у. (10) можно применить одну из систем компьютерной математики, например, `Wolfram Mathematica`. Для небольших значений m результаты выполнения первого шага приведены в следующей таблице.

m	R	Вектор коэффициентов x
3	4	0,4,0,-1
4	4	1,5,1,-1
5	8	0,15,0,-32,0,15,0,-1
6	8	1,20,10,-38,-10,20,-1,-1
7	16	0,56,0,-672,0,2632,0,-4094,0,2632,0,-672,0,56,0,-1
8	16	1,76,69,-921,-584,4019,829,-7012,829,4019,-584,-921,69,76,1,-1

В третьем столбца размещены решения с.л.а.у.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 («принцип беззнаковой симметрии»). При $m > 2$ в структуре вектора x наблюдается любопытная особенность: самым правым ненулевым элементом вектора x является -1 ; если, начиная с него, удалить все последние элементы, то абсолютные значения элементов оставшейся части образуют симметрию.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Не всегда самый правый элемент -1 занимает в век-

торе x позицию $2^{\lceil m/2 \rceil}$. Например, при $m = 9, 10$ последние две позиции заняты нулевыми элементами, что, в частности, служит уточнением гипотезы 1: порядок рекурсии формулы (9), не превышая $2^{\lceil m/2 \rceil}$, не всегда в точности равен ему. Таким образом, можно допустить, что в текст работы [9], где утверждается, что минимальное значение порядка рекурсии равно $2^{\lceil m/2 \rceil}$, вкралась опечатка.

4.2. Тестирование точности вычислений

Как уже сказано выше, для вычисления точных значений a_1, \dots, a_{2R} по формуле (8) предлагается использовать класс *BigFloat*. Данный класс позволяет выполнять вычисления над вещественными числами с практически неограниченным количеством десятичных знаков после запятой. Количество этих знаков Accuracy задается во втором параметре методов, реализующих операции с объектами класса *BigFloat*, например, $\frac{\pi}{m+1}$ вычисляется так:

```
ad1 = BigFloat.Divide(pi, m+1, AccuracyGoal.Relative(Accuracy),
RoundingMode.TowardsNearest).
```

Проблема заключается в том, что при увеличении значения Accuracy до 10000–20000 компьютерные расчеты занимают много времени, а при малых значениях Accuracy (например, 3000-4000) вычисленные по формуле (8) значения неточны даже при $m = 16$.

Но каким образом распознается неточность вычисленных значений, если априори неизвестны их точные значения? Для этой цели мы встроили в программное обеспечение два теста.

ТЕСТ 1. Если вектор x , вычисленный на первом шаге, не удовлетворяет принципу беззнаковой симметрии, то считается, что тест не пройден. В этом случае программа возвращается к пункту, где устанавливается значение Accuracy, увеличивает Accuracy и повторно выполняет первый шаг.

ТЕСТ 2. На первом шаге дополнительно к $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2R}$ (см. (11)) вычисляется также и a_{2R+1} в качестве «контрольного значения». Если тест 1 пройден и коэффициенты рекуррентной формулы (11) найдены, то второй шаг начать с вычисления a_{2R+1} . Если полученное значение не совпадает с вычисленным на первом шаге «контрольным значением», то считается, что тест 2 не пройден: после увеличения Accuracy снова

повторяется выполнение первого шага и т.д.

4.3. Пример

$$m = 16; \quad n = 1, 2, \dots, 10240.$$

1. При *Accuracy* = 5200 программа успешно прошла оба теста, в частности, значение a_{513} , вычисленное в начале второго шага по рекуррентной формуле, совпало с контрольным значением, вычисленным на первом шаге по формуле Кастелейна:

$a_{513} = 5694479264722796978546908733679751224045653550265349007596268$
 $551181232511694130200157080590267015312315663584748613869246232356$
 $348178724966851021184920615227803924178617419399305848560298844357$
 $259772289822217555613508741258078504860959812698439525380221736607$
 $636125781993564620234361537920389554805793685888009005560987367064$
 $139735236562211320704712940131669931373708911989275815891575290906$
 $002337119456511670559777827397517309108642530489119019439377236319$
 $552580603108688187645598740183222017165591342487041312646316943393$
 $936592333879599975683875272188939069773012942447494136174557349236$
 $074989648179578914841879691707644795504212623454122484237441178797$
 $251129377633383347067188908288870971214636624203765952982584513636$
 $585490729209674321210905018881062808168000863002835062478218075111$
 $250049070840774328541660961301310854725816672251395092682492199010$
 $299864275529080524994205158527459173491158040610020329796652049281$
 $974394692949916569907933572320006703371547910902820592463669879547$
 $5663063506308955209969.$

$x_{128} = -52214178420209295677761273644931307121669632591687461374789$
 $83773770850235103579669335872.$

Все вычисления на первом шаге заняли около 44 часов на компьютере с характеристиками: Surface, Windows 10 Pro, Processor: Intel(R) Core(TM) i5-4300U CPU 1.90GHz 2.50 GHz, RAM: 8.00 GB, System type: 64-bit Operating System, x64-based.

2. Вычисление значений $a_{513}, \dots, a_{10240}$ на втором шаге заняло около четырех минут; при этом вычисление a_{513}, \dots, a_{1024} — около двух секунд.

Некоторые подробности: число цифр в десятичной записи a_{513} равно 1007, а в десятичной записи a_{10240} — 20117.

Заключение

Оправдывает ли себя стремление к точным вычислениям с тысячами разрядов в записи результатов?

Э. В. Монтролл отвечает на этот вопрос утвердительно: «Источником многих проблем статистики решеток является физика твердого тела. Можно отличать проблемы, посвященные физике твердого тела, от проблем, посвященных решающим устройствам, однако в том и другом случае нужно руководствоваться поиском точных решений... Задачи, связанные с решающими устройствами, предъявляют особые требования к граничным условиям; решение должно быть точным, даже если при этом теряется физический смысл задачи и приходится погружаться в дебри математики» [12, с. 9].

Слова К. Гаусса: «Недостатки математического образования с наибольшей отчётливостью проявляются в чрезмерной точности численных расчётов» относятся к принципиально иной ситуации и означают, что точность практических вычислений следует выбирать с учетом погрешности исходных данных.

Список литературы

- [1] Kasteleyn P. W. The statistic of dimers on a lattice I: The number of dimer ar-rangements on quadratic lattice // *Physica*. 1961. Vol. 27. P. 1209–1225.
- [2] Valiant L. G. The complexity of computing the permanent // *Theoretical Computer Science*. 1979. V. 8. P. 189–201.
- [3] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.– 416с.
- [4] Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии // М.: Мир, 1998. – 653 с.
- [5] Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; под ред. М.М. Сканава. – 6-е изд. М.: ООО «Издательство «Мир и образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013. – 608 с.

- [6] Klarner D. and Pollack J. Domino tilings of rectangles with fixed width // Discrete Mathematics, 1980. Vol. 32. P. 45–52.
- [7] Read Ronald C. A note on tiling rectangles with dominoes // Fib. Q., 1980. Vol. 18. No. 1. P. 24–27.
- [8] Магомедов А.М., Магомедов Т.А., Лавренченко С.А. Взаимно-рекуррентные формулы для перечисления разбиений прямоугольника // Прикладная дискретная математика, 2019. № 46. С. 108–121.
- [9] Jean-Luc Michel. Domino tilings of rectangles with fixed width // Universite Libre de Bruxelles, Faculte des Sciences Appliquees Service de Mathematiques.
- [10] Extreme.Numerics [электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.nuget.org/packages/Extreme.Numerics> (дата обращения: 08.11.2020).
- [11] Domino tiling [электронный ресурс]. Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Domino_tiling (дата обращения: 08.11.2020).
- [12] Эллиот В. Монтролл. Статистика решеток // Прикладная комбинаторная математика. Сборник статей под редакцией Э.Беккенбаха. – М.: Мир, 1968.

А. М. Магомедов (A. M. Magomedov)

ОМИ ДФИЦ РАН

E-mail: magomedtagirl@yandex.ru

Поступила в редакцию

08.10.2020

С. А. Лавренченко (S. Lawrencenko)

Российский государственный университет туризма и сервиса

E-mail: lawrencenko@hotmail.com