УДК 517.521

М. Г. Магомед-Касумов

Приближение кусочно гладких функций тригонометрическими суммами Фурье

Получены точные по порядку оценки скорости приближения кусочно гладких функций тригонометрическими суммами Фурье. Показано, что в точках непрерывности ряд Фурье кусочно липшицевой функции сходится к ней со скоростью $\ln n/n$. Если же функция f имеет кусочно абсолютно непрерывную производную, то доказано, что в точках непрерывности порядок убывания остатка $R_n(f, x)$ ряда Фурье такой функции равен $1/n$. Кроме того, получены точные по порядку оценки для q -раз дифференцируемых функций, q -я производная которых является кусочно гладкой. В частности, если $f^{(q)}(x)$ является кусочно липшицевой, то $|R_n(f, x)| \leq c(x) \frac{\ln n}{n^{q+1}}$ в точках непрерывности функции $f^{(q)}(x)$ и $\sup_{x \in [0, 2\pi]} |R_n(f, x)| \leq \frac{c}{n^q}$. В случае, когда $f^{(q)}(x)$ имеет кусочно абсолютно непрерывную производную, $|R_n(f, x)| \leq \frac{c(x)}{n^{q+1}}$ в точках непрерывности функции $f^{(q)}(x)$. Как следствие последнего результата получена оценка скорости сходимости ряда Фурье к непрерывным кусочно линейным функциям.

Библиография: 8 названий.

We obtain exact order-of-magnitude estimates of piecewise smooth functions approximation by trigonometric Fourier sums. It is shown that in continuity points Fourier series of piecewise Lipschitz function converges with rate $\ln n/n$. If function f has a piecewise absolutely continuous derivative then it is proven that in continuity points decay order of Fourier series remainder $R_n(f, x)$ for such function is equal to $1/n$. We also obtain exact order-of-magnitude estimates for q -times differentiable functions with piecewise smooth q -th derivative. In particular, if $f^{(q)}(x)$ is piecewise Lipschitz then $|R_n(f, x)| \leq c(x) \frac{\ln n}{n^{q+1}}$ in continuity points of $f^{(q)}(x)$ and $\sup_{x \in [0, 2\pi]} |R_n(f, x)| \leq \frac{c}{n^q}$. In case

when $f^{(q)}(x)$ has piecewise absolutely continuous derivative it is shown that $|R_n(f, x)| \leq \frac{c(x)}{n^{q+1}}$ in continuity points of $f^{(q)}(x)$. As a consequence of the last result convergence rate estimate of Fourier series to continuous piecewise linear functions is obtained.

Bibliography: 8 items.

Ключевые слова: кусочно гладкие функции, ряд Фурье, скорость сходимости, кусочно линейные функции.

Keywords: piecewise smooth functions, Fourier series, convergence rate, piecewise linear functions

1. Введение

Пусть $f(x)$ — некоторая суммируемая 2π -периодическая функция. Для каждой такой функции можно определить частичную сумму Фурье порядка n :

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

где $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt$. Через $W_p^r([a, b])$ обозначим пространство Соболева, состоящее из $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, а $f^{(r)}(x) \in L^p([a, b])$, где $L^p([a, b])$ — это пространство функций с интегрируемой p -й степенью и нормой $\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Символом $\widetilde{W}_p^r([a, b])$ будем обозначать подпространство функций $f(x) \in W_p^r([a, b])$, которые можно периодически продолжить на всю ось с сохранением гладкости. Другими словами,

$$\widetilde{W}_p^r([a, b]) = \{f(x) \in W_p^r([a, b]) : f^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(b), \nu = \overline{0, r-1}\}.$$

Напомним также, что если для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ выполняется соотношение $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, $x, y \in [a, b]$, то говорят, что она удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица с показателем α

и коэффициентом M , и пишут $f \in \text{Lip}_M \alpha$ или $f \in \text{Lip} \alpha$, если коэффициент M не существует. Отметим, что множество функций $\text{Lip} 1$ совпадает со множеством абсолютно непрерывных функций с существенно ограниченной производной, т. е. $\text{Lip} 1 = W_\infty^1$.

Как известно, если функция f принадлежит классу $\text{Lip} 1$, то по теореме Джексона и неравенству Лебега имеет место следующая оценка:

$$|R_n(f, x)| = |S_n(f, x) - f(x)| \leq c E_n(f) \ln n \leq c \frac{\ln n}{n}.$$

А. Н. Колмогоров [1] получил асимптотическую формулу для остатка тригонометрических сумм Фурье функции $f \in \text{Lip}_1 1$:

$$\sup_{\substack{\|f'\|_\infty \leq 1, \\ x \in [0, 2\pi]}} |R_n(f, x)| = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2)$$

Более того, если $f \in \widetilde{W}_\infty^r([0, 2\pi])$, $r \geq 1$, то

$$\sup_{\substack{\|f^{(r)}\|_\infty \leq 1, \\ x \in [0, 2\pi]}} |R_n(f, x)| = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \quad (3)$$

Указанные оценки справедливы, когда функция удовлетворяет определённым условиям гладкости одинаково на всем рассматриваемом отрезке $[0, 2\pi]$. Но если у функции имеются в некоторых точках особенности в виде разрыва или отсутствия производной, то приведённые выше оценки перестают быть точными (или становятся вовсе не применимыми). Например, у функции $f(x) = |x - \pi|$ отсутствует производная в точке $x = \pi$, поэтому если рассматривать её на всем отрезке, то мы можем утверждать лишь, что $f \in \widetilde{W}_\infty^1([0, 2\pi])$. Следовательно, согласно приведённой выше оценке остаток ряда Фурье данной функции будет стремиться к нулю со скоростью $\ln n/n$. В то же время можно непосредственно показать, что $\sup_{x \in [0, 2\pi]} |R_n(f, x)| \leq c/n$. Кроме того, если исключить точки, в которых отсутствует производная, скорость сходимости ряда Фурье к функции $f(x) = |x - \pi|$ увеличивается на порядок: $|R_n(f, x)| \leq c(x)/n^2$, $x \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$. Оказывается, подобная картина наблюдается для целого класса так называемых кусочно гладких функций. Целью данной работы является исследование вопросов, связанных

с получением точных оценок скорости приближения кусочно гладких функций частичными суммами тригонометрических рядов Фурье.

Пространство кусочно гладких функций определяется следующим образом. Пусть дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$

$$\Omega = \{0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_s = 2\pi\}. \quad (4)$$

Символом ΩW_p^r обозначим пространство 2π -периодических функций, которые на каждом отрезке $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ можно превратить в функции из $W_p^r([\theta_i, \theta_{i+1}])$ путем переопределения (доопределения) их значений на концах рассматриваемого отрезка. Отметим, что пространство ΩW_p^r содержит и разрывные функции. Например, функция $f(x) = \text{sign} \sin x \in \Omega W_p^r$ при $\Omega = \{0, \pi, 2\pi\}$ и любых $r, p \geq 0$. Заметим также, что если функция $f \in \Omega W_p^r$ имеет в некоторой точке разбиения θ_i разрыв, то, как правило, значение функции f в данной точке является несущественным для рассматриваемых в статье задач: можно даже считать такую функцию неопределённой в этих точках.

Локальные аппроксимативные свойства тригонометрических сумм Фурье $S_n(f, x)$ и средних Валле Пуссена $V_m^n(f, x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_{n+k}(f, x)$ по ним для функций из пространства ΩW_p^r исследованы в работах [2, 3]. В них было показано, что суммы Фурье и средние Валле Пуссена вдали от точек разбиения Ω приближают указанные функции со скоростью $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{nm}$ соответственно. Приведённые оценки являются неулучшаемыми по порядку, если рассматривать все пространство ΩW_p^r , которое, как уже отмечалось, содержит и разрывные функции. Возникает вполне естественный вопрос о том, нельзя ли уточнить упомянутые оценки, если сузить рассматриваемое пространство, ограничившись, к примеру, только непрерывными или дифференцируемыми функциями из ΩW_p^r . Основная задача работы заключается в получении оценок скорости приближения суммами Фурье функций $f(x) \in \widetilde{W}_1^q([0, 2\pi])$, $q \geq 1$, таких что $f^{(q)}(x) \in \Omega W_p^r$. Кроме того, нам удалось усилить некоторые оценки, полученные в [2, 3] для функций из ΩW_p^r .

2. Вспомогательные утверждения

Важную роль в дальнейшем играет ядро следующего вида:

$$\mathcal{K}_n^\nu(u) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(ku + \frac{\pi\nu}{2})}{k^\nu}, \quad \nu \geq 1. \quad (5)$$

Приведем некоторые свойства этого ядра, которые используются при доказательстве основных теорем. В работе [4] доказана следующая

ЛЕММА А. *Справедливо следующее равенство*

$$\mathcal{K}_n^\nu(u) = - \sum_{k=1}^{\infty} \Delta g_\nu(k+n) \frac{\sin \frac{ku}{2} \cos \left[(2n+k+1) \frac{u}{2} + \frac{\pi\nu}{2} \right]}{\sin \frac{u}{2}},$$

где $g_\nu(t) = t^{-\nu}$, $\Delta\varphi(t) = \varphi(t+1) - \varphi(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место оценка*

$$|\mathcal{K}_n^\nu(u)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{u}{2}| n^\nu}, \quad u \neq 2\pi m, \quad \nu \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление, полученное в лемме А, можно записать

$$|\mathcal{K}_n^\nu(u)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{u}{2}|} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta g_\nu(k)|. \quad (6)$$

Поскольку по теореме Лагранжа $\Delta g_\nu(k) = g'_\nu(\tau)$, $k < \tau < k+1$, то $|\Delta g_\nu(k)| \leq \frac{\nu}{k^{\nu+1}}$. Остается подставить данное неравенство в (6) и применить оценку для обобщенного гармонического ряда из книги [5, п. 373, формула (11), с. 284]. $\square$

Отметим, что непосредственно из (5) можно получить также следующую равномерную оценку для $\mathcal{K}_n^\nu(u)$

$$\sup_{u \in [0, 2\pi]} |\mathcal{K}_n^\nu(u)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\nu} \leq \frac{1}{(\nu-1)n^{\nu-1}}, \quad \nu > 1. \quad (7)$$

Далее нам также понадобится следующий результат, полученный в статье [1].

ЛЕММА В. *Справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_n^\nu(x)| dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^\nu} + O\left(\frac{1}{n^\nu}\right), \quad \nu \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого равенства для $\nu = 2j + 1$ можно найти в статье [1]. Случай $\nu = 2j$ доказывается аналогично. $\square$

При доказательстве основных результатов существенную роль играют также следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $f \in W_1^q([a, b])$, $q \geq 1$. Тогда*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cos(k(t-x) + \alpha) dt &= - \sum_{\nu=1}^q \frac{f^{(\nu-1)}(t) \cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi\nu}{2})}{k^\nu} \Big|_a^b + \\ &\quad \frac{1}{k^q} \int_a^b f^{(q)}(t) \cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi q}{2}) dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом математической индукции. Справедливость утверждения при $q = 1$ непосредственно устанавливается с помощью интегрирования по частям. Полагая теперь истинным равенство (8) при q , докажем его верность для $q + 1$. Для этого применим интегрирование по частям к интегралу в правой части формулы (8):

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(q)}(t) \cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi q}{2}) dt &= - \frac{f^{(q)}(t) \cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi(q+1)}{2})}{k} + \\ &\quad \frac{1}{k} \int_a^b f^{(q+1)}(t) \cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi(q+1)}{2}) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), убеждаемся в справедливости утверждения для $q + 1$. $\square$

ЛЕММА 2.2. Пусть $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_s = 2\pi$. Если $\varphi(t), \psi(t)$ – 2π -периодические функции, причем $\psi(t)$ еще и непрерывная, то

$$\sum_{j=1}^s \varphi(t)\psi(t) \Big|_{\theta_{j-1}+0}^{\theta_j-0} = \sum_{j=1}^s [\varphi(\theta_j - 0) - \varphi(\theta_j + 0)] \psi(\theta_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если раскрыть двойную подстановку, разбить на две суммы получившееся выражение, выполнить замену $j = j + 1$ индекса суммирования в одной из сумм и учесть, что $\varphi(\theta_0+0) = \varphi(\theta_s+0)$ (периодичность φ), $\psi(\theta_j \pm 0) = \psi(\theta_j)$ (непрерывность ψ) и $\psi(\theta_0) = \psi(\theta_s)$ (периодичность ψ), то для получения требуемого равенства останется только перегруппировать слагаемые. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы можем опустить требование периодичности функции $\varphi(t)$, если просто введем обозначение $\varphi(\theta_s + 0) \doteq \varphi(\theta_0 + 0)$.

ЛЕММА 2.3. Если $f \in {}_{\Omega}W_1^r$, $r \geq 1$, то имеет место следующее равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k(t-x) + \alpha) dt = \\ \sum_{\nu=1}^r \sum_{j=1}^s [f^{(\nu-1)}(\theta_j + 0) - f^{(\nu-1)}(\theta_j - 0)] \frac{\cos(k(\theta_j - x) + \alpha + \frac{\pi\nu}{2})}{k^\nu} + \\ \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \frac{\cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi r}{2})}{k^r} dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим интеграл, находящийся в левой части доказываемой формулы, в виде суммы по промежуткам разбиения Ω :

$$I = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k(t-x) + \alpha) dt = \sum_{j=1}^s \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} f(t) \cos(k(t-x) + \alpha) dt = \sum_{j=1}^s I_j. \quad (10)$$

Зафиксируем теперь j и рассмотрим величину I_j . Из $f \in {}_{\Omega}W_1^r([0, 2\pi])$ следует, что функция f будет принадлежать $W_1^r([\theta_{j-1}, \theta_j])$, если пере-

определить её на концах отрезка $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ по непрерывности. Тогда согласно лемме 2.1 мы можем I_j представить в следующем виде:

$$I_j = - \sum_{\nu=1}^r \frac{f^{(\nu-1)}(t) \cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi\nu}{2})}{k^\nu} \Big|_{\theta_{j-1}+0}^{\theta_j-0} + \frac{1}{k^r} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} f^{(r)}(t) \cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi r}{2}) dt. \quad (11)$$

Если подставить (11) в (10), получим

$$I = - \sum_{\nu=1}^r \sum_{j=1}^s f^{(\nu-1)}(t) \frac{\cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi\nu}{2})}{k^\nu} \Big|_{\theta_{j-1}+0}^{\theta_j-0} + \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \frac{\cos(k(t-x) + \alpha + \frac{\pi r}{2})}{k^r} dt. \quad (12)$$

Доказательство завершается применением леммы 2.2 к сумме по переменной j в (12). $\square$

3. Основные результаты

Введем некоторые обозначения, которые будут применяться при формулировке и доказательстве приведённых далее теорем. Символом $D = D(\Omega)$ будем обозначать отрезок $[0, 2\pi]$, из которого исключены точки разбиения Ω :

$$D = D(\Omega) = \bigcup_{j=1}^s (\theta_{j-1}, \theta_j). \quad (13)$$

Ниже мы будем оценивать остаток тригонометрического ряда Фурье функции f

$$R_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k(t-x) dt \quad (14)$$

при различных условиях на функцию f , и для упрощения записей нам будет удобно ввести обозначение

$$A_k(f, x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos k(t - x) dt. \quad (15)$$

Тогда остаток $R_n(f)$ запишется в следующем виде:

$$R_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k(f, x). \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in {}_{\Omega}W_{\infty}^1$, то для $x \in D$ имеет место оценка

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{4\|f'\|_{\infty} \ln n}{\pi^2 n} + \left(c\|f'\|_{\infty} + \sum_{j=1}^s \frac{|f(\theta_j + 0) - f(\theta_j - 0)|}{|\sin \frac{\theta_j - x}{2}|} \right) \frac{1}{\pi n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $f \in {}_{\Omega}W_1^1$, поэтому к $A_k(f, x)$ можно применить лемму 2.3:

$$A_k(f, x) = \sum_{j=1}^s (f(\theta_j + 0) - f(\theta_j - 0)) \frac{\cos(k(\theta_j - x) + \frac{\pi}{2})}{k} + \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{\cos(k(t - x) + \frac{\pi}{2})}{k} dt. \quad (17)$$

Отсюда и из представления (16) для $R_n(f)$, учитывая обозначение (5), выводим:

$$\pi R_n(f, x) = \sum_{j=1}^s (f(\theta_j + 0) - f(\theta_j - 0)) \mathcal{K}_n^1(\theta_j - x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{\cos(k(t - x) + \frac{\pi}{2})}{k} dt = \mathcal{A} + \mathcal{B}. \quad (18)$$

С помощью следствия 1 величина $\mathcal{A}$ оценивается следующим образом:

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s \frac{|f(\theta_j + 0) - f(\theta_j - 0)|}{|\sin \frac{\theta_j - x}{2}|}, \quad x \in D. \quad (19)$$

Займемся теперь оценкой величины $\mathcal{B}$. Отметим, что последовательность

$$r_m = \sum_{k=n+1}^m \frac{\cos(ku + \frac{\pi}{2})}{k} = - \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin ku}{k}$$

равномерно ограничена на $[0, 2\pi]$. Поэтому теорема Лебега позволяет нам внести знак суммирования под знак интеграла. Но тогда, пользуясь леммой В, выводим

$$|\mathcal{B}| \leq \|f'\|_{\infty} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_n^1(t)| dt \leq \|f'\|_{\infty} \left(\frac{4 \ln n}{\pi n} + \frac{c}{n} \right). \quad (20)$$

Для завершения доказательства теоремы остаётся только подставить оценки (19) и (20) в (18). $\square$

Во введении мы отмечали известный результат, заключающийся в том, что для липшицевой функции остаток ряда Фурье стремится к нулю со скоростью $\ln n/n$. В теореме 1 этот результат обобщается на «кусочно липшицевые» функции, а именно, утверждается, что в точках непрерывности ряд Фурье кусочно липшицевой функции сходится к ней по-прежнему со скоростью $\ln n/n$. Заметим, что в силу результатов А. Н. Колмогорова (см. (2)) оценка, полученная в данной теореме, является неулучшаемой по порядку в классе всех кусочно липшицевых функций. Однако в этом классе можно встретить и такие функции f , для которых $R_n(f, x) \leq \frac{c(x)}{n}$ в точках непрерывности x функции f . Примером такой функции является $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$, остаток ряда Фурье которой имеет вид $R_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$, причём, как это видно из следствия 1,

$$|R_n(f, x)| = |\mathcal{K}_n^1(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \cdot \frac{1}{n}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Оказывается, это не единичный случай, и аналогичная по порядку оценка верна для всех кусочно гладких функций, которые на каждом куске имеют абсолютно непрерывную первую производную.

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in {}_{\Omega}W_1^2$, то для $x \in D$ справедлива оценка

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{1}{\pi n} \left[\sum_{j=1}^s \frac{|f(\theta_j + 0) - f(\theta_j - 0)|}{\left| \sin \frac{\theta_j - x}{2} \right|} + \sum_{j=1}^s |f'(\theta_j + 0) - f'(\theta_j - 0)| + \|f''\|_1 \right].$$

Для сравнения отметим, что в теореме 1 от функции на каждом куске требуется лишь наличие существенно ограниченной производной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На этот раз функция f принадлежит ${}_{\Omega}W_1^2$, поэтому применение той же леммы 2.3 к $A_k(f, x)$ и подстановка полученного для $A_k(f, x)$ выражения в (16) приводит в данном случае к следующей формуле:

$$\begin{aligned} \pi R_n(f, x) = & \sum_{j=1}^s (f(\theta_j + 0) - f(\theta_j - 0)) \mathcal{K}_n^1(\theta_j - x) + \\ & \sum_{j=1}^s (f'(\theta_j + 0) - f'(\theta_j - 0)) \mathcal{K}_n^2(\theta_j - x) + \int_0^{2\pi} f''(t) \mathcal{K}_n^2(t - x) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Применяя неравенство (7) ко второму и третьему членам в (21) и оценивая первый член с помощью следствия 1, приходим к требуемой оценке. $\square$

Отметим, что приведённая в теореме оценка является точной по порядку, поскольку для функции $f = \frac{\pi - x}{2} \in {}_{\Omega}W_1^2$, $\Omega = \{0, 2\pi\}$, оценка снизу остатка ряда Фурье, как это нетрудно показать, имеет вид: $|R_n(f, \frac{\pi}{2})| \geq \frac{c}{n+1}$. Далее, заметим, что $f = \frac{\pi - x}{2} \in {}_{\Omega}W_p^r$, для любых $p, r \geq 1$. Отсюда можно сделать вывод, что дальнейшее улучшение гладкости функции на кусках не приводит к увеличению порядка скорости стремления остатка ряда Фурье для таких функций к нулю. Другими словами, наличие разрыва у функции (напомним, что пространства ${}_{\Omega}W_p^r$ включают в себя и разрывные функции) ограничивает возможности ряда Фурье, не позволяя ему приближаться к такой функции быстрее, чем $1/n$. Поэтому на всем множестве ${}_{\Omega}W_p^r$ получить более высокий порядок сходимости, чем в теореме 2, не удастся, какие бы r и p мы ни брали.

Однако если исключить из рассмотрения разрывные функции и ограничиться классами непрерывных или даже дифференцируемых функций, то можно получить более точные оценки. В приведённых ниже теоремах 3 и 4 выведены равномерные и поточечные оценки остатков сумм Фурье для функций $f \in \widetilde{W}_1^q([0, 2\pi])$, $q \geq 1$, с различными условиями на $f^{(q)}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in \widetilde{W}_1^q([0, 2\pi])$, $q \geq 1$. Тогда

1) если $f^{(q)} \in \Omega W_\infty^1$, то для $x \in D$

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{4\|f^{(q+1)}\|_\infty \ln n}{\pi^2 n^{q+1}} + \left(c\|f^{(q+1)}\|_\infty + \sum_{j=1}^s \frac{|f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)|}{|\sin \frac{\theta_j - x}{2}|} \right) \frac{1}{\pi n^{q+1}};$$

2) если $f^{(q)} \in \Omega W_\infty^1$, то

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |R_n(f, x)| \leq \frac{1}{\pi q n^q} \sum_{j=1}^s |f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)| + \frac{1}{\pi n^{q+1}} \left(\frac{4\|f^{(q+1)}\|_\infty \ln n}{\pi} + c \right);$$

3) если $f^{(q)} \in \Omega W_1^1$, то для $x \in D$

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{\|f^{(q+1)}\|_1}{\pi q n^q} + \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{j=1}^s \frac{|f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)|}{|\sin \frac{\theta_j - x}{2}|};$$

4) если $f^{(q)} \in \Omega W_1^1$, то

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |R_n(f, x)| \leq \frac{1}{\pi q n^q} \left(\|f^{(q+1)}\|_1 + \sum_{j=1}^s |f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)| \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in W_1^q([0, 2\pi])$, то в силу леммы 2.1

имеем

$$A_k(f, x) = - \sum_{\nu=1}^q \frac{f^{(\nu-1)}(t) \cos(k(t-x) + \frac{\pi\nu}{2})}{k^\nu} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k^q} \int_0^{2\pi} f^{(q)}(t) \cos(k(t-x) + \frac{\pi q}{2}) dt. \quad (22)$$

Так как функции $f^{(\nu-1)}(t)$, $\cos(k(t-x) + \frac{\pi\nu}{2})$, $\nu = 1, \dots, q$, являются 2π -периодическими, то все слагаемые под знаком суммирования в (22) обращаются в ноль. Следовательно,

$$A_k(f, x) = \frac{1}{k^q} \int_0^{2\pi} f^{(q)}(t) \cos(k(t-x) + \frac{\pi q}{2}) dt. \quad (23)$$

Но $f^{(q)} \in {}_\Omega W_1^1$, поэтому в силу леммы 2.3 имеем

$$A_k(f, x) = \sum_{j=1}^s (f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)) \frac{\cos(k(\theta_j - x) + \frac{\pi(q+1)}{2})}{k^{q+1}} + \int_0^{2\pi} f^{(q+1)}(t) \frac{\cos(k(t-x) + \frac{\pi(q+1)}{2})}{k^{q+1}} dt.$$

Подставляя полученное выражение в (14), выводим

$$\pi R_n(f, x) = \sum_{j=1}^s (f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)) \mathcal{K}_n^{q+1}(\theta_j - x) + \int_0^{2\pi} f^{(q+1)}(t) \mathcal{K}_n^{q+1}(t - x) dt. \quad (24)$$

Выпишем, используя лемму В и неравенство (7), две оценки для инте-

гнала $J = \int_0^{2\pi} f^{(q+1)}(t) \mathcal{K}_n^{q+1}(t-x) dt$ из правой части (24):

$$|J| \leq \|f^{(q+1)}\|_\infty \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_n^{q+1}(t)| dt \leq \|f^{(q+1)}\|_\infty \left(\frac{4 \ln n}{\pi n^{q+1}} + \frac{c}{n^{q+1}} \right), \quad f^{(q)} \in {}_\Omega W_\infty^1, \quad (25)$$

$$|J| \leq \|\mathcal{K}_n^{q+1}\|_\infty \int_0^{2\pi} |f^{(q+1)}(t)| dt \leq \frac{\|f^{(q+1)}\|_1}{qn^q}, \quad f^{(q)} \in {}_\Omega W_1^1. \quad (26)$$

Утверждение 1) теоремы следует из (24) и (25) с помощью следствия 1. Утверждение 2) получается также из (24) и (25), если для оценки величин $\mathcal{K}_n^{q+1}(\theta_j - x)$ под знаком суммы применить неравенство (7). И, наконец, утверждения 3) и 4) выводятся из (24) и (26) с использованием следствия 1 и неравенства (7) соответственно. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in \widetilde{W}_1^q([0, 2\pi])$, $q \geq 1$, и $f^{(q)} \in {}_\Omega W_1^2$. Тогда
1) для $x \in D$ имеет место оценка

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{1}{\pi n^{q+1}} \left[\sum_{j=1}^s \frac{|f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)|}{|\sin \frac{\theta_j - x}{2}|} + \frac{\|f^{(q+2)}\|_1}{(q+1)} \right] +$$

$$\frac{1}{\pi n^{q+2}} \sum_{j=1}^s \frac{|f^{(q+1)}(\theta_j + 0) - f^{(q+1)}(\theta_j - 0)|}{|\sin \frac{\theta_j - x}{2}|};$$

2) имеет место равномерная оценка

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |R_n(f, x)| \leq \frac{1}{\pi q n^q} \sum_{j=1}^s |f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)| +$$

$$\frac{1}{\pi(q+1)n^{q+1}} \left[\sum_{j=1}^s |f^{(q+1)}(\theta_j + 0) - f^{(q+1)}(\theta_j - 0)| + \|f^{(q+2)}\|_1 \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, мы придем к представлению (23) для $A_k(f, x)$.

Далее, так как $f^{(q)} \in {}_\Omega W_1^2([0, 2\pi])$, то применение леммы 2.3 к интегралу в (23) даёт

$$\begin{aligned} A_k(f, x) = & \sum_{j=1}^s (f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)) \frac{\cos(k(\theta_j - x) + \frac{\pi(q+1)}{2})}{k^{q+1}} + \\ & \sum_{j=1}^s (f^{(q+1)}(\theta_j + 0) - f^{(q+1)}(\theta_j - 0)) \frac{\cos(k(\theta_j - x) + \frac{\pi(q+2)}{2})}{k^{q+2}} + \\ & \int_0^{2\pi} f^{(q+2)}(t) \frac{\cos(k(t - x) + \frac{\pi(q+2)}{2})}{k^{q+2}} dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из (16) выводим

$$\begin{aligned} \pi R_n(f, x) = & \sum_{j=1}^s (f^{(q)}(\theta_j + 0) - f^{(q)}(\theta_j - 0)) \mathcal{K}_n^{q+1}(\theta_j - x) + \\ & \sum_{j=1}^s (f^{(q+1)}(\theta_j + 0) - f^{(q+1)}(\theta_j - 0)) \mathcal{K}_n^{q+2}(\theta_j - x) + \\ & \int_0^{2\pi} f^{(q+2)}(t) \mathcal{K}_n^{q+2}(t - x) dt. \quad (27) \end{aligned}$$

Оба утверждения теоремы следуют из (27) с использованием следствия 1 и неравенства (7) соответственно. $\square$

Из соотношения (3) вытекает, что оценка 1) теоремы 3 является неулучшаемой по порядку. В точности по порядку оценок 2), 4) теоремы 3 и 2) теоремы 4 можно убедиться, рассмотрев функции ($q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$)

$$f_q(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{q+1}}, & q = 2p + 1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{q+1}}, & q = 2p. \end{cases}$$

Действительно, в силу теоремы о почленном дифференцировании функциональных рядов (см., например, [5, п. 435, теорема 7, с. 438]) функции f_q при $q \geq 2$ непрерывно-дифференцируемы $q - 1$ раз, причём

$(-1)^{[\frac{q-1}{2}]} f_q^{(q-1)}(x) = f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}$, $x \in [0, 2\pi]$, абсолютно непрерывна, поэтому $f_q \in \widetilde{W}_1^q([0, 2\pi])$, $q \geq 1$. Кроме того,

$$f_1'(x) = \frac{x - \pi}{2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = -f_0(x), \quad x \in (0, 2\pi),$$

следовательно, $f_q^{(q)} \in {}_{\Omega}W_1^2$. Но для $f_q(x)$, $q \geq 1$, можно показать, что $\max_{x \in [0, 2\pi]} |R_n(f_q, x)| \geq \frac{c}{n^q}$ [7, теорема 1].

Пример этой же функции f_q , рассмотренной в точках $x = \pi$ при $q = 2p + 1$ и $x = \pi/2$ при $q = 2p$, показывает, что оценка 1) теоремы 4 также является неулучшаемой по порядку. Остается пока открытым вопрос о точности по порядку оценки 3) теоремы 3.

Теорема 4 позволяет также дать точную по порядку оценку скорости приближения 2π -периодических непрерывных кусочно-линейных функций тригонометрическими суммами Фурье. В самом деле, всякая кусочно-линейная функция f удовлетворяет условиям теоремы 4 при $q = 1$. Следовательно, справедливо следующее утверждение (аналогичная оценка, но с другой константой, получена в [8, теорема 1]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть f — непрерывная кусочно-линейная функция вида

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x + b_1, & 0 = \theta_0 \leq x \leq \theta_1, \\ k_2 x + b_2, & \theta_1 \leq x \leq \theta_2, \\ \dots & \\ k_s x + b_s, & \theta_{s-1} \leq x \leq \theta_s = 2\pi. \end{cases}$$

Имеют место следующие оценки остатка ряда Фурье функции f ($k_{s+1} = k_1$):

$$\begin{aligned} 1) \quad |R_n(f, x)| &\leq \frac{1}{\pi n^2} \sum_{j=1}^s \frac{|k_{j+1} - k_j|}{|\sin \frac{\theta_j - x}{2}|}, \quad x \in \bigcup_{j=1}^s (\theta_{j-1}, \theta_j), \\ 2) \quad \sup_x |R_n(f, x)| &\leq \frac{1}{\pi n} \sum_{j=1}^s |k_{j+1} - k_j|. \end{aligned}$$

Указанное следствие даёт, в частности, точную по порядку оценку для функции $f(x) = |x - \pi|$, которая упоминалась во введении. А именно,

$|R_n(f, x)| \leq \frac{2}{\pi n^2} \left(\frac{1}{|\sin \frac{x-\pi}{2}|} + \frac{1}{|\sin \frac{x-2\pi}{2}|} \right)$, если $x \in (0, 2\pi) \setminus \pi$, и $|R_n(f, x)| \leq \frac{4}{\pi n}$, если $x \in [0, 2\pi]$.

Список литературы

- [1] A. N. Kolmogoroff. Zur Grossenordnung Des Restgliedes Fourierscher Reihen Differenzierbarer Funktionen // Annals of Mathematics. 1935. Т. 36, № 2. С. 521–526.
- [2] М. Г. Магомед-Касумов. Аппроксимативные свойства классических средних Валле-Пуссена для кусочно гладких функций // Вестник Дагестанского научного центра РАН. 2014. Т. 54. С. 5-12.
- [3] М. Г. Магомед-Касумов. Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Математические заметки. 2016. Том 100, № 2. С. 229-247.
- [4] И. И. Шарапудинов, М. Г. Магомед-Касумов, Т. И. Шарапудинов. Аппроксимативные свойства повторных средних Валле Пуссена для кусочно-гладких функций // Сибирский математический журнал (отправлена в печать).
- [5] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Т. 2. 810 с.
- [6] А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Москва: Издательство «Мир», 1965. Т. 1. 615 с.
- [7] М. Г. Магомед-Касумов. Оценка скорости сходимости рядов по синусам и косинусам с коэффициентами вида $1/k^q$ // Дагестанские электронные математические известия. Вып. 7. 2017 г. С. 47-51. URL: <http://www.jstor.org/stable/1968585>.
- [8] Г. Г. Акниев. Аппроксимативные свойства сумм Фурье для 2π -периодических кусочно-линейных непрерывных функций // Дагестанские электронные математические известия. Вып. 5. 2016 г. С. 13-19.

М. Г. Магомед-Касумов (M. G. Magomed-Kasumov) Поступила в редакцию
Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, 22.08.19
Владикавказский научный центр РАН
E-mail: rasuldev@gmail.com