УДК 517.5

Меджидов З.Г.

Обращение конического преобразования функции со степенным весом

Мы рассматриваем преобразование Радона, определенное на круглых конусах, называемое коническим преобразованием Радона. В трехмерном пространстве R^3 оно сопоставляет функции ее поверхностные интегралы по круговым конусам, а в R^2 – интегралы по двум лучам с общей вершиной. В данной работе приводятся новые формулы обращения конического и веерного преобразований Радона со степенным весом по полным и неполным данным в R^2 и R^3 .

Библиография: 8 названий.

We consider the Radon transformation defined on circular cones called the conical Radon transform. In the three-dimensional space R^3 , it maps the functions to its surface integrals over a circular cone, and in R^2 to its integrals over two rays with a common vertex. In this paper, we present new formulas for inversion of k-weighted conical and X-ray Radon transformations under complete and incomplete data in R^2 and R^3 .

Bibliography: 8 items.

Ключевые слова: коническое преобразование, k-весовое веерное преобразование, преобразование Радона, формула обращения

Keywords: conical transformation, k-weighted X-ray transformation, Radon transformation, inversion formula

1. Обозначения и постановка задачи

Пусть $S(u, \beta, \psi)$ – круглый конус с вершиной u и единичным направляющим вектором оси β в пространстве, R^n – половина угла при вершине: $x \in S \iff (x - u) \cdot \beta = |x - u| \cos \psi$, $\psi \in (0; \pi)$.

Символом $S(R^n)$ обозначим пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций.

Пусть $k \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $f \in S(R^n)$. **k-весовым коническим преобразованием** функции $f \in S(R^n)$ называется функция

$$C^k f(u, \beta, \psi) = \int_{S(u, \beta, \psi)} f(x) |x - u|^{k-n+2} dS(x), \quad (1)$$

где dS – элемент поверхности конуса.

Задача состоит в том, чтобы по заданной функции $C^k f$ определить неизвестную функцию f .

Конические преобразования возникают в различных математических моделях, связанных с задачами медицинской визуализации, атомной промышленности, национальной безопасности и др.

Преобразование (1) изучено в статьях [1, 2] Кучмента П. А. и Терзиоглу Ф., а также в процитированных в этих статьях работах. Получены различные формулы обращения, использующие преобразование Фурье и формулы обращения преобразования Радона.

В данной работе мы для $k \leq n - 2$ получаем новые формулы обращения. Они также основаны на формулах обращения преобразования Радона.

Напомним, что преобразование Радона R отображает функцию, заданную в R^n , в множество ее интегралов по гиперплоскостям. А именно, если $\omega \in S^{n-1}$ и $s \in R$, то

$$Rf(s, \omega) = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) dx.$$

Альтернативные записи:

$$Rf(s, \omega) = \int_{R^n} \delta(s - x \cdot \omega) f(x) dx,$$

где δ – одномерная дельта-функция Дирака;

$$Rf(s, \omega) = \int_{\omega^\perp} f(s\omega + y) dy,$$

где $\omega^\perp = \{x \in R^n : x \cdot \omega = 0\}$ – подпространство, ортогональное ω .

Из последней формулы легко вывести следующее свойство:

$$\frac{\delta}{\delta s} Rf(s, \omega) = \int_{\omega^\perp} f'_\omega(s\omega + y) dy = (Rf'_\omega)(s, \omega),$$

где $f'_\omega = (\omega, \nabla)f$.

При $n = 2$

$$Rf(s, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\omega^\perp) dt.$$

Функция f может быть восстановлена с помощью формулы обращения преобразования Радона ([3])

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \int_{S^{n-1}} H(Rf)^{(n-1)}(x \cdot \theta, \theta) d\theta & \text{при четном } n, \\ (-1)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} (Rf)^{(n-1)}(x \cdot \theta, \theta) d\theta & \text{при нечетном } n, \end{cases}$$

где, $Hg(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{p-t} dt$ – оператор Гильберта, $(Rf)^{(n-1)}(s, \omega) = \frac{\delta^{n-1}}{\delta s^{n-1}} Rf(s, \theta)$.

2. k -весовое веерное преобразование и его обращение

Пусть $k \geq 0$ – целое число. k -весовым веерным преобразованием функции $f \in S(R^n)$ назовем функцию

$$D^k f(u, \theta) = \int_0^\infty f(u + r\theta) r^k dr, \quad (2)$$

где $u \in R^n$ – вершина луча $u + r\theta_{r \geq 0}$, и $\theta \in S^{n-1}$ – единичный направляющий вектор этого луча. При $k = 0$ преобразование (1) называют **веерным** преобразованием (X-ray transform) функции $f : D^0 f \equiv Df$.

При $k = 0$ преобразование Df хорошо изучено. Имеются разные формулы обращения, в том числе с неполными данными. В основе многих формул лежит связь между преобразованием Df и преобразованием Радона Rf .

Многие соотношения между преобразованиями D и R можно записать как следствия формул, полученных Хамакером и др ([4]).

Пусть h – функция одной переменной, однородная степени $1 - n$. Тогда

$$\int_{S^n} (Df)(y, \theta) h(\omega \cdot \theta) d\theta = \int_{R^1} (Rf)(\omega, s) h(s - y \cdot \omega) ds = (Rf * h)(y \cdot \omega).$$

Пусть $n = 3$. Положим $h = \delta'$. Тогда

$$\frac{\delta}{\delta s}(Rf)(s, \omega) \Big|_{s=y \cdot \theta} = - \int_{S^2} (Df)(y, \theta) \delta'(\omega \cdot \theta) d\theta.$$

Вычисляя этот интеграл, мы получим формулу Гранжита. Для производной функции $g(y, \theta)$ по направлению вектора ω , действующей по второму аргументу, введем обозначение $\delta_\omega : \delta_\omega g(y, \theta) = \langle \omega, \nabla_\theta \rangle g(y, \theta)$.

ТЕОРЕМА 1 ([5]). Пусть $f \in S(R^3)$. Тогда для $\theta \in S^2, \gamma \in R^3$

$$\frac{\delta}{\delta s}(Rf)(y \cdot \omega, \omega) = \int_{\theta \in \omega^\perp \cap S^2} \delta_{;\omega}(Df)(y, \theta) d\theta.$$

Формула Гранжита является предельным случаем более общего результата Паламодова В.П. ([6]).

Предположим, что мы хотим вычислить $Rf(\omega, s)$ по значениям $(Df)(\alpha, \theta)$ для α , лежащего на некоторой кривой C на плоскости $H_{s,\omega} = \{x \cdot \omega = s\}$ и для вектора θ , касательного к C в точке α . Если C лежит на гладкой поверхности S , трансверсальной к $H_{s,\omega}$ и $(Df)(\alpha, \theta)$ известно для любого $\alpha \in S$ и θ , касательного к S в точке α , то величину $\frac{\delta}{\delta s}(Rf)(s, \omega)$ можно вычислить.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – гладкая поверхность в R^3 , H – плоскость в R^3 , трансверсальная к S и K – связное компактное подмножество $H \setminus S$. Тогда для произвольной функции $f \in C^2(R^3)$ такой, что $\text{supp } f \cap$

$H \subset K$ справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial p}(Rf)(H) = \int_0^S \left[\frac{k}{[x', v, \omega]} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\langle v, \omega \rangle}{[x', v, \omega]} \right) \right] g(y, ry' + qy' \times v) \Big|_{q=0} ds,$$

где $y = y(s)$, $0 \leq s \leq S$ – уравнение кривой $C = S \cap H$ такое, что $|y'| = 1$, $k = [x', x'', \omega]$ – кривизна C (смешанное произведение векторов x', x'', ω), ω – нормальный вектор к H и $v = v(x(s))$ и $v = v(x)$ непрерывное поле единичных векторов, нормальных к S .

Другие формулы, связывающие Rf и Df могут быть получены выбором различных функций h .

Положим $h(s) = \frac{1}{s^2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Rf)(s, \theta)}{(a \cdot \theta - s)^2} ds = \int_{S^2} \frac{(Df)(a, \omega)}{(\theta \cdot \omega)^2} d\omega.$$

Интегралы понимаются в обобщенном смысле. Интегрируя по частям, можно прийти к формуле

$$H \frac{\partial}{\partial s}(Rf)(a \cdot \theta, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{S^2} \frac{(Df)(a, \omega)}{(\theta \cdot \omega)^2} d\omega.$$

Мы получили формулу Гельфанда-Гончарова ([7]).

Пусть γ – гладкая кривая в R^3 . Говорят, что она удовлетворяет условию Кириллова-Туя по отношению к множеству $V \subset R^3$, если любая плоскость, пересекающая V , пересекает и кривую γ трансверсально.

Пусть $k \leq n - 2$. Связь между k -весовым лучевым преобразованием D^k и преобразованием Радона R устанавливает следующая формула, которая является элементарным следствием формулы Гранжита:

$$\frac{\partial^{n-k-2}}{\partial s^{n-k-2}}(Rf)(s, \omega) = \int_{S^{n-2}} \partial_{;\omega}^{n-k-2} D^k f(y, \theta) d\theta,$$

где S^{n-2} – единичная сфера в плоскости $\omega^\perp = \{x : \langle x, \omega \rangle = 0\}$. Отсюда же следует возможность восстановления по неполным данным – по интегралам вдоль семейства лучей с вершинами на кривой, удовлетворяющей

условию Кириллова-Туя: достаточно вместо y взять точку пересечения кривой и плоскости, существующую в силу условия Кириллова-Туя.

Пусть $n = 3$, $k = 1$. Легко показать, что в условиях теоремы 2 справедлива формула обращения

$$Rf(p, \omega) = \int_0^s k(s) D^1 f(y(s), y'(s)) ds.$$

Пусть теперь $k > n - 2$. Обращение преобразования $D^k f$ можно произвести по следующей схеме (см. [1]).

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Пусть $h(t)$ – однородная степени $k - n + 1$ функция, $\omega \in S^{n-1}$ – единичный вектор. Тогда справедлива формула

$$\int_{S^{n-1}} D^k f(u, \theta) h(-\theta \cdot \omega) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\omega, s) h(u \cdot \omega - s) ds = (R_\omega f * h)(u \cdot \omega).$$

Положим $h(t) = \frac{|t| t^{k-n}}{2(k-n+1)!}$.

ЛЕММА 2. Для производных в обобщенном смысле справедлива формула $h^{(k-n+2)}(t) = \delta(t)$.

Продифференцируем $k - n + 2$ раз обе части равенства леммы 1 по переменной $s = u \cdot \omega$, пользуясь свойством производной свертки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k-n+2}}{\partial s^{k-n+2}} \int_0^\pi D^k f(u, \theta) h(-\theta \cdot \omega) d\theta &= \frac{\partial^{k-n+2}}{\partial s^{k-n+2}} (R_\omega f * h)(s) = \\ &= (R_\omega f) * h^{(k-n+2)} = (R_\omega f) * \delta = (R_\omega f)(s). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана формула

$$Rf(s, \omega) = \frac{\partial^{k-n+2}}{\partial s^{k-n+2}} \int_{S^{n-1}} D^k f(u, \theta) h(-\theta \cdot \omega) d\theta,$$

которая, по сути, является формулой обращения преобразования $D^k f$.

3. Обращение k -веса конического преобразования на плоскости

k -весовое коническое и k -весовое веерное преобразования связаны следующей формулой ([1]):

$$C^k f(u, \beta, \psi) = \sin \psi \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(u + r\theta) r^k dr \delta(\theta \cdot \beta - \cos \psi) d\theta =$$

$$\sin \psi \int_{S^{n-1}} D_u^k f(\theta) \delta(\theta \cdot \beta - \cos \psi) d\theta. \quad (3)$$

Положив $t = \cos \psi$, мы можем эту формулу записать в виде

$$C^k f(u, \beta, t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2} \int_{S^{n-1}} D_u^k f(\theta) \delta(\theta \cdot \beta - t) dt, & \text{если } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $n = 2$ конус представлен двумя лучами с общей вершиной, $\beta = (\sin \psi, \cos \psi)$, $\psi \in [0; 2\pi]$.

Преобразование (1) имеет вид

$$C^k f(u, \phi, \psi) = \int_0^\infty [f(u_1 + r \sin(\phi - \psi), u_2 + r \cos(\phi - \psi)) +$$

$$f(u_1 + r \sin(\phi + \psi), u_2 + r \cos(\phi + \psi))] r^k dr.$$

Рассмотрим сначала случай $k = 0$:

$$Cf(u, \phi, \psi) = C^0 f(u, \phi, \psi) =$$

$$\int_0^\infty [f(u_1 + r \sin(\phi - \psi), u_2 + r \cos(\phi - \psi)) +$$

$$f(u_1 + r \sin(\phi + \psi), u_2 + r \cos(\phi + \psi))] dr.$$

Аналогичное преобразование на двухпараметрическом семействе ломаных на плоскости, симметричных относительно вертикальной оси,

рассмотрели Трунг Т. Т. и Нгуен М. К. ([8]):

$$g(\xi, \psi) = \int_0^\infty [f(\xi + r \sin \psi, r \cos \psi) + f(\xi - r \sin \psi, r \cos \psi)] dr, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \xi \in R.$$

Это преобразование называют еще V -преобразованием Радона (**V-line Radon transform (VRT)**). Формула обращения, полученная в [8], имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \left((p.v.) \int_R d\xi \left(\frac{g'(\xi, \lambda)}{\xi - x_1 - x_2 \lambda} + \frac{g'(\xi, \lambda)}{\xi - x_1 + x_2 \lambda} \right) \right), \quad \lambda = tg\psi$$

(внутренний интеграл понимается в смысле главного значения).

ТЕОРЕМА 3. Для функции $f \in S(R^2)$ справедлива формула

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \hat{g}(\xi) \cdot |\xi|, \quad (4)$$

где $g(u) = \int_0^\pi C f(u, \phi, \psi) d\psi$, символ $\hat{}$ обозначает двумерное преобразование Фурье по переменной u .

Доказательство опирается на формулу следующей леммы.

ЛЕММА 3. Для любых $u \in R^2$ и $\phi \in [0; 2\pi]$ справедлива формула

$$\int_0^\pi C f(u, \phi, \psi) d\psi = \frac{1}{2} \int_{S^1} R f(\omega, u \cdot \omega) d\omega. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (5) сначала для $u = 0$. Име-

ем

$$\int_0^{\pi} C f(0, \phi, \psi) d\psi = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} f(r \sin(\phi + \psi), r \cos(\phi + \psi)) dr d\psi + \\ \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} f(r \sin(\phi - \psi), r \cos(\phi - \psi)) dr d\psi.$$

Замена переменных в обоих интегралах позволяет написать

$$\int_0^{\pi} C f(0, \phi, \psi) d\psi = \int_0^{\infty} \int_{-\pi+\phi}^{\pi+\phi} f(r \sin \psi, r \cos \psi) d\psi dr.$$

Внутренний интеграл равен

$$\int_{\frac{-\pi}{2}-\phi}^{\frac{3\pi}{2}-\phi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta;$$

мы совершили замену $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ и воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Методом Радона ([3, стр. 32-34]) можно доказать формулу

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} Rf(\theta, 0) d\theta,$$

где Rf – преобразование Радона.

Таким образом,

$$\int_0^{\pi} C f(0, \phi, \psi) d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} Rf(\theta, 0) d\theta.$$

Это и есть формула (5) при $u = 0$. В общем случае она получается, если воспользоваться свойствами инвариантности преобразования Радона.

на и конического преобразования относительно сдвигов. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi C f(u, \phi, \psi) d\psi &= \int_0^\pi T_u C f(0, \phi, \psi) d\psi = \int_0^\pi C(T_u f)(0, \phi, \psi) d\psi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R(T_u f)(\theta, 0) d\theta = \frac{1}{2} \int_{S^1} R f(\omega, u \cdot \omega) d\omega; \end{aligned}$$

здесь T_u – оператор сдвига на вектор $u : T_u f(x) = f(x + u)$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Воспользуемся формулой ([3, стр. 23])

$$\int_{S^1} R f(\omega, u \cdot \omega) d\omega = 2 (|u|^{-1} * f)(u).$$

Таким образом,

$$\int_0^\pi C f(u, \phi, \psi) d\psi = (|u|^{-1} * f)(u).$$

Остается применить к обеим частям двумерное преобразование Фурье и воспользоваться формулой

$$F[|x|^{-1}] = 2\pi|\xi|^{-1}.$$

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо преобразования Фурье можно применить формулу обращения преобразования Радона на плоскости ([3, стр. 27])

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} I^{-\alpha} R^\# I^{\alpha-1} R f, \quad \alpha < 2, \quad (6)$$

где I^α – потенциал Рисса:

$$(I^{\hat{\alpha}} f)(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi),$$

$R^\#$ – оператор обратной проекции:

$$R^\# h(x) = \int_{S^1} h(x \cdot \theta) d\theta.$$

Правая часть формулы (5) в этих обозначениях равна

$$\frac{1}{2}R^{\#}Rf(u).$$

Применив формулу (6) с $D^k f$, получаем другую формулу обращения:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} I^{-1} \left(\int_0^{\pi} C f(u, \phi, \psi) d\psi \right).$$

Формула (3) вместе с формулой обращения преобразования $D^k f$ позволяет обратить преобразование $C^k f$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 4 ([1]). Пусть $M \subset R^n$, $f \in S(R^n)$. Для $u \in M$ и $\beta \in S^{n-1}$ положим $s = u \cdot \beta$ и

$$G(s, \beta) = \int_0^{\pi} C^k f(u, \beta, \psi) h_k(-\cos \psi) d\psi = \int_{S^{n-1}} D^k f(u, \theta) h_k(-\theta \cdot \beta) d\theta.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \int_{S^{n-1}} G^{(k+1)} f(x \cdot \beta, \beta) d\beta, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (-1)^{\frac{(n-2)}{2}} \int_{S^{n-1}} H G^{(k+1)} f(x \cdot \beta, \beta) d\beta, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases}$$

где $G^{(k+1)}$ – $(k+1)$ -я производная функции G по переменной s , H – преобразование Гильберта по переменной s .

Приведем частные случаи формулы теоремы 4.

Пусть $n = 2$, $k = 1$. Формула обращения принимает вид

$$f(x) = \frac{-1}{8\pi} \int_{S^1} \left(H \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_0^{\pi} C^1 f(s\beta + y, \beta, \psi) \text{sign}(\cos \psi) d\psi \right) \Big|_{s=x \cdot \beta} d\beta, y \perp \beta.$$

Пусть $n = 3$, $k = 2$. Тогда

$$f(x) = \frac{-1}{16\pi^2} \int_{S^2} \left(H \frac{\partial^3}{\partial s^3} \int_0^{\pi} C^2 f(s\beta + y, \beta, \psi) \text{sign}(\cos \psi) d\psi \right) \Big|_{s=x \cdot \beta} d\beta, y \perp \beta.$$

Список литературы

- [1] Peter Kuchment, Fatma Terzioglu. Inversion of weighted divergent beam and cone transforms. // Inverse Problems and Imaging. 2017. V. 11, No. 6. Pp. 1071–1090.
- [2] F. Terzioglu. Some inversion formulas for the cone transform. // Inverse Problems. 31(2015), 115010.
- [3] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 286 с.
- [4] C. Hamaker, K.T. Smith, D.C. Solmon, and S.L. Wagner. The divergent beam X-ray transform. // Rocky Mountain J. Math. 1980. V. 10. Pp. 253–283.
- [5] P. Grangeat. Mathematical framework of cone-beam 3D-reconstruction via the first derivative of the Radon transform. // Lecture notes in Math, 1497, pp. 66–97, Springer. 1991.
- [6] V. Palamodov. Reconstructive integral geometry. Monographs in Mathematics, 98. Birkhäuser Verlag, Basel. 2004
- [7] Гельфанд И. М., Гончаров А. Б. Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве. // ДАН СССР. 1986. Т. 290. С. 1037–1040.
- [8] Truong T. T., Nguyen M. K. On new V-line Radon transforms in and their inversion // J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011), no. 075206, 13pp.

Меджидов З.Г. (Medzhidov Z.D.)

Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию

08.09.19