УДК 517.444

Волчкова Н.П., Волчков Вит.В.

Аналоги свойства Лиувилля для рядов по бесселевым функциям

Изучаются функции, представимые рядами по бесселевым функциям первого рода. Найдено допустимое асимптотическое поведение таких функций в бесконечно удаленной точке. В качестве следствия получен аналог теоремы Лиувилля для разложений Фурье-Бесселя и Дини.

Библиография: 22 названия.

We study functions given in the form of a series in Bessel's functions of the first kind. The admissible asymptotic behavior of such functions at infinity is founded. As a consequence we obtain an analog of Liouville's theorem for the Fourier-Bessel and Dini developments.

Bibliography: 22 items.

Ключевые слова: цилиндрические функции, свойство Лиувилля, асимптотическое поведение

Keywords: cylindrical functions, Liouville property, asymptotic behavior

Хорошо известно, что ограниченная аналитическая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является постоянной. Этот факт называется свойством Лиувилля для аналитических функций. В указанном утверждении аналитические функции можно заменить гармоническими, а плоскость $\mathbb{C}$ на произвольное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Более точно, если функция f является гармонической в $\mathbb{R}^n$ и ограничена сверху (или снизу), то $f = const$. Многие авторы получали подобные результаты для решений ряда других дифференциальных уравнений и неравенств на различных пространствах (см. [1–5] и библиографию к этим работам).

Еще одним важным направлением в рассматриваемой тематике является изучение возможного асимптотического поведения периодических в среднем функций. Очевидным свойством ненулевых периодических функций на вещественной оси является невозможность их стремления к нулю на бесконечности. В многомерном случае, где возможны различные обобщения понятия периодичности, ситуация становится значительно сложнее. Развивая теорию периодических в среднем функций, Ф. Йон [6, гл. 6] получил следующий нетривиальный результат: если непрерывная функция f на $\mathbb{R}^3$ имеет нулевые интегралы по всем сферам единичного радиуса и

$$f(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

то $f \equiv 0$ (см. также [7], где рассмотрен n-мерный случай). Примеры показывают (см. [6,7]), что условие убывания функции f является точным. Теорема Йона получила дальнейшее развитие и уточнение в разных направлениях [8–19].

Во-первых, изучались ее обобщения для функций f, удовлетворяющих уравнению свертки $f * T = 0$, где T – заданное ненулевое распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Выяснилось, в частности, что не существует ненулевых решений f, принадлежащих $L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in [1, 2n/(n-1)]$, $n \geq 2$. При этом показатель p не может быть увеличен [8–12].

Во-вторых, были доказаны, так называемые, «спектральные» аналоги теоремы Йона. Как и в классической теореме Лиувилля для целых функций, в них установлена связь между поведением на бесконечности решений уравнений свертки и множеством нулевых коэффициентов в ее разложении Фурье по сферическим гармоникам [13, 14].

В-третьих, исследовалась задача о допустимом росте (убывании) функций с нулевыми сферическими средними на неограниченных областях. Здесь возникли интересные эффекты, связанные с зависимостью от вида области [13–15]. К рассматриваемому кругу идей относятся также различные теоремы типа Фрагмена-Линделёфа и теоремы о граничном поведении аналитических функций [16, 17].

В-четвертых, были получены аналоги теоремы Ф. Йона на симметрических пространствах [14,18]. Разработанные для этого методы оказались весьма полезными при изучении близких вопросов для искаженного уравнения свертки на комплексном евклидовом пространстве и группе Гейзенберга [19].

Отметим также интересный результат В. Хансена [20]: если f – непрерывная ограниченная функция на $\mathbb{R}^2$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r(x)e^{it})dt,$$

где $r(x)$ – положительная функция на $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\big(r(x) - |x|\big) < +\infty,$$

то $f = const$.

В данной работе изучаются функции, представимые рядами по бесселевым функциям первого рода. Найдено допустимое асимптотическое поведение таких функций в бесконечно удаленной точке. В качестве следствия получен аналог теоремы Лиувилля для разложений типа Фурье-Бесселя и Дини.

Пусть J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν, т.е.

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu},$$

где Γ – гамма-функция (см. [21, гл. 7, п. 7.2, формула (2)]). Ряд для $J_\nu(z)/z^\nu$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области изменения z и ν. Функция J_ν однозначна в плоскости z, разрезанной вдоль отрицательной полуоси от 0 до $-\infty$. Если ν не является целым числом, то она имеет точку ветвления при $z = 0$. Нас будет интересовать случай, когда индекс ν является вещественным числом, а независимое переменное z положительно. При этом J_ν принимает вещественные значения.

Теорема 1. *Пусть $\nu \in \mathbb{R}$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность попарно различных положительных чисел, стремящаяся к бесконечности,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\lambda_n x), \quad x > 0, \tag{1}$$

где $c_n \in \mathbb{C}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{\sqrt{\lambda_n}} < \infty. \tag{2}$$

Тогда, если

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}f(x)=0, \tag{3}$$

то функция f равна нулю тождественно.

Для доказательства теоремы 1 потребуется два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Если $\nu\in\mathbb{R}$ и выполнено условие (2), то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на каждом промежутке $[\delta,+\infty)$, $\delta>0$.*

Доказательство. Для функции J_ν справедлива следующая асимптотическая формула (см. [21, гл. 7, п. 7.13, формула (3)]):

$$J_\nu(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{r_\nu(t)}{t\sqrt{t}},\quad t>0, \tag{4}$$

где функция r_ν ограничена при $t\to+\infty$, т.е. существуют константы t_0 и A_1 такие, что

$$|r_\nu(t)|<A_1,\quad t\geq t_0. \tag{5}$$

Далее, существует номер N такой, что

$$\lambda_n\delta\geq t_0\quad \text{при}\quad n\geq N.$$

Тогда при $x\geq\delta$, $n\geq N$ имеем $\lambda_n x\geq\lambda_n\delta\geq t_0$. Отсюда и из (4), (5) получаем

$$|c_n||J_\nu(\lambda_n x)|=\left|\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n x}}\cos\left(\lambda_n x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{r_\nu(\lambda_n x)}{(\lambda_n x)^{3/2}}\right||c_n|\leq$$

$$\leq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{|c_n|}{\sqrt{\lambda_n\delta}}+\frac{A_1|c_n|}{(\lambda_n\delta)^{3/2}},\quad x\geq\delta,\quad n\geq N.$$

Справа стоит член сходящегося числового ряда (см. (2)), что и влечет за собой утверждение леммы. □

Лемма 2. *Если $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – последовательность попарно различных действительных чисел,*

$$h(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma_n e^{i\mu_n x},\quad \gamma_n\in\mathbb{C}, \tag{6}$$

где

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n| < \infty \tag{7}$$

и

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq k} \frac{|\gamma_n|}{|\mu_n-\mu_k|} < \infty \quad \textit{для любого} \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{8}$$

Тогда, если $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$, *то* $\gamma_n = 0$ *при всех* $n\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. В силу условия (7) ряд (6) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и $h\in C(\mathbb{R})$. Кроме того, для любого $R>0$ имеем

$$\frac{1}{R}\int_R^{2R} h(x)e^{-i\mu_k x}dx = \frac{1}{R}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma_n\int_R^{2R} e^{i(\mu_n-\mu_k)x}dx =$$

$$= \frac{1}{R}\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq k}\gamma_n \left.\frac{e^{i(\mu_n-\mu_k)}}{i(\mu_n-\mu_k)}\right|_R^{2R} + \gamma_k =$$

$$= \gamma_k + \frac{1}{R}\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq k}\frac{\gamma_n}{i(\mu_n-\mu_k)}\left(e^{i(\mu_n-\mu_k)2R} - e^{i(\mu_n-\mu_k)R}\right). \tag{9}$$

Условие (8) показывает, что множитель при $\dfrac{1}{R}$ в (9) является ограниченной функцией переменной R. Поэтому переходя в (9) к пределу при $R\to+\infty$, получаем

$$\gamma_k = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_R^{2R} h(x)e^{-i\mu_k x}dx, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{10}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$, то для любого $\varepsilon>0$ существует $R_0>0$ такое, что $|h(x)|<\varepsilon$ при $x>R_0$. Отсюда при $R>R_0$ выполнена оценка

$$\left|\frac{1}{R}\int_R^{2R} h(x)e^{-i\mu_k x}dx\right| \le \frac{1}{R}\int_R^{2R}|h(x)|dx < \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_R^{2R} h(x)e^{-i\mu_k x}dx = 0.$$

Это завершает доказательство леммы 2. $\square$

Перейдем к доказательству сформулированной выше теоремы 1. По лемме 1 функция f непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$. Используя (1), (4) и формулу Эйлера, находим

$$\sqrt{x}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n}} \cos\left(\lambda_n x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{r_\nu(\lambda_n x)}{\lambda_n^{3/2} x}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_n}} \left(e^{i\left(\lambda_n x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\lambda_n x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\right) + \frac{r_\nu(\lambda_n x)}{\lambda_n^{3/2} x}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi\lambda_n}} e^{-i\left(\frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\lambda_n x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi\lambda_n}} e^{i\left(\frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{-i\lambda_n x} +$$

$$+ \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n r_\nu(\lambda_n x)}{\lambda_n^{3/2}}. \quad (11)$$

Для последнего ряда из (5) имеем оценку

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n r_\nu(\lambda_n x)}{\lambda_n^{3/2}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{\lambda_n^{3/2}} \cdot A_1, \quad x > \frac{t_0}{\lambda_*},$$

где $\lambda_* = \min\{\lambda_n : n \geq 1\}$. Следовательно, переходя в (11) к пределу при $x \to +\infty$ и учитывая (3), получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi\lambda_n}} e^{-i\left(\frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\lambda_n x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi\lambda_n}} e^{i\left(\frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{-i\lambda_n x}\right) = 0.$$

Теперь применяя лемму 2, приходим к равенствам $c_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $f \equiv 0$ и теорема 1 доказана.

Переформулируем теорему 1 для некоторых классических разложений по бесселевым функциям.

Пусть $\nu > -1$. Известно, что при указанных ν функция $J_\nu(z)/z^\nu$ имеет бесконечно много нулей, все ее нули являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $z = 0$ (см. [21, гл. 7, п. 7.9]). Обозначим через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ положительные нули функции J_ν, занумерованные в порядке возрастания. Имеют место соотношения ортогональности

$$\int_0^1 x J_\nu(\zeta_m x) J_\nu(\zeta_n x) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(\zeta_m), & n = m. \end{cases}$$

Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(\zeta_n x),$$
где
$$a_n = \frac{2}{J^2_{\nu+1}(\zeta_n)} \int_0^1 x f(x) J_\nu(\zeta_n x)dx,$$
называется рядом Фурье-Бесселя функции $f \in L[0,1]$.

Аналогично, если $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ – занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения
$$zJ'_\nu(z) + aJ_\nu(z) = 0 \quad (a \in \mathbb{R}),$$
то
$$\int_0^1 xJ_\nu(\eta_m x)J_\nu(\eta_n x)dx =$$
$$\begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{1}{2\eta_m^2}\big(\eta_m^2(J'_\nu(\eta_m))^2 + (\eta_m^2 - \nu^2)J^2_\nu(\eta_m)\big), & n = m. \end{cases}$$
При этом ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_\nu(\eta_n x),$$
где
$$\big(\eta_n^2(J'_\nu(\eta_n))^2 + (\eta_n^2 - \nu^2)J^2_\nu(\eta_n)\big)b_n = 2\eta_n^2 \int_0^1 x f(x) J_\nu(\eta_n x)dx,$$
называется рядом Дини функции $f \in L[0,1]$.

Теорема 2. *Пусть $\nu > -1$, $a \in \mathbb{R}$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных нулей функции $J_\nu(z)$ или $zJ'_\nu(z) + aJ_\nu(z)$,*
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\lambda_n x), \quad x > 0,$$
где $c_n \in \mathbb{C}$ и
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{\sqrt{n}} < \infty.$$

Тогда, если выполнено условие (3), *то функция* f *равна нулю тождественно.*

Доказательство. Для нулей ζ_n и η_n справедливы следующие асимптотические формулы (см. [16, гл. 4, § 4.3], [22, §§ 1–2]):

$$\zeta_n = \pi n + \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\eta_n = \pi n + q + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где q – некоторая константа, зависящая от ν и a. Отсюда и из теоремы 1 получаем утверждение теоремы 2. □

В заключение отметим, что условие (3) в теоремах 1, 2 нельзя заменить оценкой

$$f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \to +\infty$$

(достаточно положить $f(x) = J_\nu(\lambda_1 x)$ и использовать (4)). Таким образом, скорость убывания функции f в теоремах 1, 2 является точной.

Список литературы

[1] Caruzzo Dolcetta I., Cutrì A. On the Liouville property for sublaplacians // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1997. Vol. XXV. N 4. Pp. 239–256.

[2] Cutrì A., Leoni F. On the Liouville property for fully nonlinear equations // Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire. 2000. Vol. 17. N 2. Pp. 219–245.

[3] Chu C.H., Lau A.T.M. Harmonic functions on topological groups and symmetric spaces // Math. Z. 2011. Vol. 268. N 3–4. Pp. 649–673.

[4] Degtyarev S.P. Liouville Property for solutions of the linearized degenerate thin film equation of fourth order in a halfspace // Results in Mathematics. 2016. Vol. 70. Pp. 137–161.

[5] Heyer H. The Liouville property for harmonic functions on groups and hypergroups // Methods of Functional Analysis and Topology. 2017. Vol. 23. N 1. Pp. 3–25.

[6] Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ. 1958. 156 с.

[7] Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. Vol. 72. Pp. 403–416.

[8] Волчков В. В. Проблемы типа Помпейю на многообразиях // Доклады АН Украины. 1993. N 11. С. 9–13.

[9] Thangavelu S. Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Anal. Math. 1994. Vol. 63. Pp. 255–286.

[10] Rawat R., Sitaram A. The injectivity of the Pompeiu transform and L^p-analogues of the Wiener Tauberian theorem // Israel J. Math. 1995. Vol. 91. Pp. 307–316.

[11] Agranovsky M. L., Narayanan E.K. L^p-integrability, supports of Fourier transforms and uniqueness for convolution equations // J. Fourier Anal. Appl. 2004. Vol. 10. Pp. 13–27.

[12] Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сборник. 1997. Vol. 188. N 9. С. 13–30.

[13] Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht. 2003. 454 p.

[14] Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer. 2009. 672 p.

[15] Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhäuser. 2013. 592 p.

[16] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз. 1962. 320 с.

[17] Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука. 1965. 424 с.

[18] Shahshahani M., Sitaram A. The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. Vol. 63. Pp. 267–277.

[19] Волчков В. В., Волчков Вит. В. Поведение на бесконечности решений искаженного уравнения свертки // Известия РАН. Сер. матем. 2012. Vol. 76. N 1. С. 85–100.

[20] Hansen W. A Liouville property for spherical averages in the plane // Math. Ann. 2001. Vol. 319. Pp. 539–551.

[21] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука. 1974. 296 с.

[22] Moore C. N. On the summability of the developments in Bessel's functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1920. Vol. 21. N 2. Pp. 107–156.

Волчкова Н.П. (Volchkova N.P.)
Донецкий национальный технический университет
E-mail: volchkova.n.p@gmail.com

Поступила в редакцию
19.12.2018

Волчков Вит.В. (Volchkov Vit.V.)
Донецкий национальный университет
E-mail: volna936@gmail.com