УДК 517.946

М. М. Сиражудинов, С. П. Джамалудинова

О G-компактности некоторых классов эллиптических операторов второго порядка

В работе изучаются вопросы G–сходимости некоторых классов недивергентных эллиптических операторов второго порядка на плоскости с комплекснозначными коэффициентами.

Библиография: 9 названий.

The paper studies the questions G–convergence of some classes of non-divergent elliptic operators of second order on a plane with complex-valued coefficients.

Bibliography: 9 titles.

Ключевые слова: G-сходимость, недивергентные эллиптические операторы.

Keywords: G-convergence, non-divergent elliptic operators.

Введение

За последние десятилетия получила развитие теория G–сходимости дифференциальных операторов. Многие задачи математической физики приводят к изучению вопроса G–сходимости дифференциальных операторов с частными производными. Такие вопросы возникают в теории упругости, электродинамике и других разделах физики и механики. Вопросам G–сходимости и усреднения дифференциальных операторов посвящено много работ и монографий (см. монографию В.В. Жикова и др. [1] и имеющуюся там литературу).

G–сходимость дивергентных эллиптических операторов второго порядка изучена С. Спаньоло и Е. Де Джорджи [2, 3, 4].

G–сходимость дивергентных эллиптических операторов высокого порядка изучена в работах Жикова В.В. и др. (см. [1] и имеющуюся там литературу).

G–сходимость дифференциальных операторов — это, иначе, слабая сходимость соответствующих обратных операторов. Поэтому по понятным причинам в задачах G–сходимости, кроме корректной разрешимости краевых задач, требуются также оценки решений, равномерные относительно любого оператора. Для недивергентных эллиптических операторов и систем (к которым относятся и рассматриваемые в работе операторы) такого рода оценки мало изучены, поэтому G–сходимость недивергентных операторов изучена не столь детально как для дивергентных операторов. Вопросам G–сходимости и усреднению недивергентных эллиптических операторов посвящены работы [5, 6, 7, 8].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-01-00508-а)

В работе будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathbb{R}^2$ — плоскость, $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2$ — скалярное произведение.

$Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область.

$\bar{Q}$ — замыкание области Q.

$\partial_{\bar z} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i\,\mathcal{D}_2), \quad \partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i\,\mathcal{D}_2), \quad \mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2.$

i — мнимая единица.

$L_2(Q;\mathbb{C})$ — пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций. *Символ $\mathbb{C}$ (здесь и далее) в обозначении пространства означает также, что это пространство есть линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.* Скалярное произведение в $L_2(Q;\mathbb{C})$ дается равенством:

$$(u,v)_{L_2(Q;\mathbb{C})} = \mathrm{Re}\int_Q u\bar v\,dx, \qquad u,\, v \in L_2(Q;\mathbb{C}),$$

где $\bar v$ — комплексно сопряженная v функция.
Соответствие $L_2(Q;\mathbb{C}) \ni u = u_1 + iu_2 \mapsto (u_1, u_2) = U \in (L_2(Q))^2$ есть изоморфизм, причем $(U,V)_{(L_2(Q))^2} = (u,v)_{L_2(Q;\mathbb{C})}$.

$W_p^k(Q)$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$) — обычное пространство Соболева; $\overset{\circ}{W}{}_p^k(Q)$ — подпространство $W_p^k(Q)$, состоящее из элементов с нулевыми следами на границе.

$W_p^k(Q;\mathbb{C})$ — пространство Соболева комплекснозначных функций.

$\rightharpoonup$ — знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

В случае, когда это не вызывает недоразумений, как уравнение, так и оператор краевой задачи обозначаем одним и тем же символом.

1. Формулировка результатов

Пусть Q — ограниченная односвязная область плоскости с гладкой (класса C^1) границей, $W_0(Q;\,\mathbb{C})$ — подпространство $W_2^2(Q;\,\mathbb{C})$, причем $C_0^\infty(Q;\,\mathbb{C}) \subset W_0(Q;\,\mathbb{C})$. И пусть $\Lambda : W_0(Q;\,\mathbb{C}) \to L_2(Q;\,\mathbb{C})$ — обратимый дифференциальный оператор (вида 1 ниже) с постоянными коэффициентами. Обозначим через $\mathcal{A}(\nu_0,\,\nu_1) = \mathcal{A}(\nu_0,\,\nu_1;\,Q)$ класс операторов, действующих из $W_0(Q;\,\mathbb{C})$ в $L_2(Q;\,\mathbb{C})$, вида

$$Au = \mu_1\partial^2_{z\,\bar z}u + \mu_2\partial^2_{z\,z}u + \mu_3\partial^2_{\bar z\,\bar z}u + \mu_4\partial^2_{z\,\bar z}\bar u + \mu_5\partial^2_{z\,z}\bar u + \mu_6\partial^2_{\bar z\,\bar z}\bar u, \quad u \in W_0(Q;\,\mathbb{C}), \tag{1}$$

где μ_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ — измеримые комплекснозначные функции, принадлежащие $L_2(Q;\,\mathbb{C})$ и удовлетворяющие в любой гладкой односвязной подобласти $Q_1 \subset Q$ условиям

$$\|\Lambda u\|^2_{L_2(Q_1;\,\mathbb{C})} \leqslant \nu_0\,\mathrm{Re}\int\limits_{Q_1} Au\,\overline{\Lambda\, u}dx, \tag{2}$$

$$\operatorname{Re}\int\limits_{Q_1} Au\,\Lambda v dx \leqslant \nu_1 \left(\operatorname{Re}\int\limits_{Q_1} Au\,\Lambda u dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\Lambda v\|_{L_2(Q_1;\mathbb{C})}, \quad \forall u,v \in W_0(Q;\mathbb{C}), \quad (3)$$

где ν_0, $\nu_1 > 0$ — постоянные.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{A}(\nu_0,\nu_1;Q)$ — произвольный оператор. Тогда задача $Au = f$, $u \in W_0(Q;\mathbb{C})$, однозначно разрешима для любого $f \in L_2(Q;\mathbb{C})$. Причем имеют место оценки*

$$\lambda_0 \|u\|_{W_2^2(Q_1;\mathbb{C})} \leqslant \|Au\|_{L_2(Q_1;\mathbb{C})} \leqslant \lambda_1 \|u\|_{W_2^2(Q_1;\mathbb{C})} \quad (\forall u \in W_0(Q_1;\mathbb{C})),$$

где λ_0, λ_1 — константы, зависящие только от ν_0, ν_1.

Доказательство теоремы дано в пункте 3.1 параграфа 3.

Рассмотрим неоднородную задачу

$$\begin{cases} Au = f \in L_2(Q;\mathbb{C}), \\ u - v \in W_0(Q;\mathbb{C}) \end{cases}$$

где v — любой фиксированный элемент $W_2^2(Q)$. Эта задача однозначно разрешима. Действительно, это следует из разрешимости задачи $Az = f - Av$, $z \in W_0(Q;\mathbb{C})$.

Определение 1. Скажем, что последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $A(\nu_0,\nu_1;Q)$ G-сходится в области Q к оператору $A \in A(\nu_0.\nu_1;Q)$ (обозначение: $A_k \xrightarrow{G} A$), если имеет место слабая сходимость $A_k^{-1} \rightharpoonup A^{-1}$. Иначе говоря, для любого $f \in L_2(Q;\mathbb{C})$ последовательность решений $u_k \in W_0(Q;\mathbb{C})$ задачи $A_k u_k = f$, $u_k \in W_0(Q;\mathbb{C})$ слабо сходится в $W_2^2(Q;\mathbb{C})$ к решению задачи $Au = f$, $u \in W_0(Q;\mathbb{C})$.

Справедлива следующая теорема о G-компактности

Теорема 2. *Из любой последовательности $\{A_k\} \subset \mathcal{A}(\nu_0,\,\nu_1;\,Q)$ можно выделить G-сходящуюся подпоследовательность.*

G-сходимость обладает свойством локальности, а именно имеет место

Теорема 3. *Пусть $A_k \overset{G}{\to} A$ в области Q и пусть Q_1 — любая фиксированная односвязная гладкая подобласть Q. Тогда $A_k \overset{G}{\to} A$ и в области Q_1.*

Из G-сходимости следует сходимость "произвольных"решений. Точнее, имеет место

Теорема 4. *Пусть $A_k u_k = f_k$, $f_k \to f$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$, $u_k \rightharpoonup u$ в $W_2^2(Q;\mathbb{C})$ и пусть $A_k \rightharpoonup A$ в области Q. Тогда $Au = f$.*

2. Некоторые вспомогательные результаты

2.1. Любое уравнение, удовлетворяющее условиям (2), (3) является эллиптическим. Докажем это.

Пусть $Au = f$, тогда выделив действительную и мнимую части, получим следующую систему двух уравнений с действительными коэффициентами, эквивалентное $Au = f$:

$$\hat{A}U \equiv a\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = F, \quad F = (\mathrm{Re}\, f,\, \mathrm{Im}\, f), \quad U = (\mathrm{Re}\, u,\, \mathrm{Im}\, u),$$

где $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3 \to 0$ при $\tau \to \infty$,

$$a = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

(Аналогичный смысл имеет и $\hat{\Lambda}U$ ниже).

Выделим реальные части интегралов в (2) и (3), тогда получим

$$\left\|\hat{\Lambda}U\right\|^2_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \leqslant \nu_0 \int\limits_Q (\hat{A}U,\, \hat{\Lambda}U)_{\mathbb{R}^2} dx, \tag{4}$$

$$\int\limits_Q (\hat{A}U,\, \hat{\Lambda}V)_{\mathbb{R}^2} dx \leqslant \nu_1 \left(\int\limits_Q (\hat{A}U,\, \hat{\Lambda}U)_{\mathbb{R}^2}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\hat{\Lambda}V\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}, \quad \forall U,\, V \in W_0(Q). \tag{5}$$

Положим в (4), (5) $v = u = \gamma \cdot \tau^{-1}\varphi(x)\sin(\tau x \cdot \xi)$, где $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, $\tau > 0$ — действительный параметр, $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$, $\xi = (\xi_1,\, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi \neq 0$.

Из неравенств (4), (5) имеем

$$\nu_0^{-1} \int\limits_Q \left|\hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right|^2 \cdot \varphi^2(x)\sin^2(\tau x \cdot \xi)\, dx + \alpha_1(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_Q \left(\hat{A}(\xi)\gamma,\, \hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right)^2 \cdot \varphi^2(x)\sin^2(\tau x \cdot \xi)\, dx + \alpha_2(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \nu_1 \int\limits_Q \left|\hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right|^2 \cdot \varphi^2(x)\sin^2(\tau x \cdot \xi)\, dx + \alpha_3(\tau),$$

где $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3 \to 0$ при $\tau \to \infty$, $\hat{A}(\xi) = a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$. (Аналогичный смысл имеет и $\hat{\Lambda}(\xi)$).

Отсюда, ввиду того, что $\sin^2(\tau\, x \cdot \xi) \rightharpoonup 2^{-1}$ в $L_2(Q;\, \mathbb{C})$ при $\tau \to \infty$, получим

$$\nu_0^{-1} \int\limits_Q \left|\hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right|^2 \varphi^2(x) \leqslant \int\limits_Q \left(\hat{A}(\xi)\gamma,\, \hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right)_{\mathbb{R}^2} \varphi^2(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \nu_1 \int\limits_Q \left|\hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right|^2 \varphi^2(x) dx.$$

В силу произвольности $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ отсюда следует, что

$$\nu_0^{-1} \left|\hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right|^2 dx \leqslant \left(\hat{A}(\xi)\gamma,\, \hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right)_{\mathbb{R}^2} \leqslant \nu_1 \left|\hat{\Lambda}(\xi)\gamma\right|^2 \quad \text{почти всюду в } Q. \tag{6}$$

Эллиптичность оператора $A \in \mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$ означает, что $\det\hat{A}(\xi) \neq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2$, $\xi \neq 0$. Это эквивалентно тому, что $\hat{A}(\xi)\gamma \neq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2$, $\xi \neq 0$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}^2$, $\gamma \neq 0$. предположим, что оператор не эллиптический, тогда для некоторого $\xi \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ имеем $\hat{A}(\xi)\gamma = 0$. Отсюда и (6), следует $\hat{\Lambda}(\xi)\gamma = 0$, а это, ввиду эллиптичности Λ невозможно. Эллиптичность $A \subset \mathcal{A}(\nu_0,\ \nu_1;\ Q)$ доказана.

2.2. Покажем теперь, что коэффициенты оператора (1) ограничены постоянной, зависящей от постоянных ν_0, ν_1.

Из неравенства (6) следует

$$\left|\hat{A}(\xi)\gamma\right| = \left|(a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2)\gamma\right| \leqslant l|\gamma|, \tag{7}$$

где $l > 0$ — положительная константа, зависящая только от ν_0, ν_1 и Λ.

Положим в (7) $\xi = (1,0)$, $\gamma = (1,0)$ тогда получим

$$a_{11}^2(x) + a_{21}^2 \leqslant l^2 \quad \text{почти всюду в } Q.$$

Аналогично при $\gamma = (0,1)$ имеем

$$a_{12}^2(x) + a_{22}^2 \leqslant l^2 \quad \text{почти всюду в } Q.$$

Из этих двух неравенств следует ограниченность элементов матрицы a. Аналогично, взяв $\xi = (0,1)$, получим ограниченность элементов матрицы c.

Покажем ограниченность элементов матрицы b. Имеем

$$|\,b\,\xi_1\xi_2\gamma| = \left|(\hat{A}(\xi) - a\xi_1^2 - c\xi_2^2)\gamma\right| \leqslant \left|\hat{A}(\xi)\gamma\right| + \left|a\xi_1^2\gamma\right| + \left|c\xi_2^2\gamma\right| \leqslant l_0|\xi|\cdot|\gamma|, \quad \gamma,\, \xi \in \mathbb{R}^2 \tag{8}$$

где $l_0 > 0$ — постоянная, зависящая от ν_0, ν_1 и Λ.

Полагая в (8) $\xi = (1,1)$, $\gamma = (0,1)$ и $\gamma = (1,0)$, получим ограниченность элементов матрицы b.

Элементы матриц a, b, c определяются как линейные комбинации действительных и мнимых частей комплекснозначных коэффициентов оператора (1). Обратно, коэффициенты оператора (1) определяются как линейные комбинации элементов матриц a, b, c. Поэтому коэффициенты оператора (1) ограниченны постоянной, зависящей только от ν_0, ν_1 и Λ.

3. Обратимость оператора $A \in \mathcal{A}(\nu_0, \nu_1; Q)$

3.1. Здесь мы докажем теорему 1.

Доказательство. В силу обратимости оператора $\Lambda : W_0(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$, неравенство (2) можно представить в виде

$$\|f\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \nu_0 \operatorname{Re} \int\limits_Q A\Lambda^{-1} f \cdot \bar{f}\, dx.$$

Это неравенство означает, что оператор $B = A\Lambda^{-1} : L_2(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$ является коэрцитивным. Значит в силу леммы Лакса-Мильграмма [1; стр.

15], он устанавливает изоморфизм $L_2(Q;\mathbb{C})$ на $L_2(Q;\mathbb{C})$. Отсюда, так как $\Lambda : W_0(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$ — изоморфизм, получим, что оператор $A : W_0(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$ также является изоморфизмом.

Из оценок (2), (3), в силу обратимости оператора $\Lambda : W_0(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$, следует справедливость оценок (4).

Пусть $\{A_k\}$ — произвольная последовательность из $\mathcal{A}(\nu_0, \nu_1;\, Q)$, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} A_k u_k = f \in L_2(Q;\mathbb{C}), \\ u_k \in W_0(Q;\mathbb{C}). \end{cases}$$

В силу сепарабельности $L_2(Q;\mathbb{C})$ из оценки (4) следует, что существует подпоследовательность $k' \subset \{k\}$ и оператор $C : L_2(Q;\mathbb{C}) \to W_0(Q;\mathbb{C})$ такие, что $A_{k'}^{-1} f \rightharpoonup Cf \in W_0(Q;\mathbb{C}))$ в $W_2^2(Q;\mathbb{C})$ для любого $f \in L_2(Q;\mathbb{C})$. Покажем, что C обратим. Из соотношений (2) и (4) получим

$$l\,\|f\|^2_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \operatorname{Re}\,(\Lambda A_k^{-1} f, f)_{L_2(Q;\mathbb{C})} \quad (\forall f \in L_2(Q;\mathbb{C})),$$

где $l > 0$ — постоянная, зависящая только от ν_0, ν_1 и Λ.

Отсюда после передельного перехода при $k' \to \infty$ получим аналогичное соотношение для оператора C. Следовательно, по лемме Лакса-Мильграмма оператор $\Lambda C : L_2(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$ обратим. А так как Λ также обратим, то значит и C обратим.

Обозначим через A оператор, обратный C, $A = C^{-1}$. Покажем, что A допускает естественное расширение до оператора $\widetilde{A} : W_2^2(Q;\mathbb{C}) \longrightarrow W_0(Q;;\mathbb{C})$. С этой целью рассмотрим последовательность операторов

$$P_{k'} = A_{k'}^{-1} A_{k'} : W_2^2(Q;\mathbb{C}) \to W_2^2(Q;\mathbb{C}).$$

В силу (4) и ограниченности коэффициентов операторов A_k постоянной, зависящей только ν_0, ν_1 и Λ, получим $\|P_{k'}\| \leqslant c$, где $c > 0$ — константа, определяемая только по ν_0, ν_1. Следовательно, некоторая подпоследовательность $P_{k'}$ слабо сходится к $P : W_2^2(Q;\mathbb{C}) \to W_0(Q)$. Положим теперь $\widetilde{A} = AP$, очевидно, что $\widetilde{A} : W_2^2(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$. Причем для оператора $\widetilde{A}$ имеет место оценка

$$\|\widetilde{A}\| < c_1, \tag{9}$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, зависящая только от ν_0, ν_1.

Рассмотрим задачу:

$$A_k u_k = \widetilde{A} u, \quad u_k - u \in W_0(Q), \tag{10}$$

где u — любой фиксированный элемент $W_2^2(Q;\mathbb{C})$, $\widetilde{A}$ — расширение оператора A. Справедлива

Лемма 1. *Пусть $u_k \in W_2^2(Q;\mathbb{C})$ — решение задачи (10), тогда $u_{k'} - u \rightharpoonup 0$ в $W_2^2(Q;\mathbb{C})$ при $k' \to \infty$.*

Доказательство. Так как $u_{k'} - u \in W_0(Q;\mathbb{C})$ и отображение $A : W_0(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$ — изоморфизм, то соотношение $u_{k'} - u \rightharpoonup 0$ в $W_2^2(Q;\mathbb{C})$ эквивалентно соотношению $A(u_{k'} - u) \rightharpoonup 0$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$. А последнее следует из равенства $A(u_{k'} - u) = AA_{k'}^{-1}\widetilde{A}u - AA_{k'}^{-1}A_{k'}u$ предельным переходом при $k' \to \infty$ в силу определения $\widetilde{A}$.

Лемма 2. *Пусть $A_k u_k = f_k$, $f_k \to f$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$, $u_k \rightharpoonup u$ в $W_2^2(Q;\mathbb{C})$, причем сужение $u\,|_{Q_1}= 0$, где $Q_1 \subset Q$. Тогда $f = 0$ почти всюду в Q_1.*

Доказательство. Пусть φ — произвольная гладкая функция в Q с носителем из Q_1. Очевидно, что $v_k = \varphi u_k \rightharpoonup 0$ в $W_2^2(Q;\mathbb{C})$. Имеем $A_k v_k = \varphi f_k + z_k$, где через z_k обозначены слагаемые, которые в силу равномерной по k ограниченности коэффициентов A_k и ввиду того, что носители φ и u не пересекаются, стремятся к нулю в $L_2(Q;\mathbb{C})$. Следовательно, при $k' \to \infty$ получим $A^{-1}(\varphi f) = 0$. Значит, $\varphi f = 0$. Отсюда ввиду произвольности φ имеем $f(x) = 0$ почти всюду в Q_1.

4. G–компактность класса $\mathcal{A}(\nu_0,\, \nu_1; Q)$

4.1. Оператор $\widetilde{A} : W_2^2(Q;\mathbb{C}) \to L_2(Q;\mathbb{C})$, определенный в (3.1) является локальным. Действительно, пусть Q_1 — гладкая односвязная подобласть Q и пусть $u \in W_2^2(Q;\mathbb{C})$, $u = 0$ в Q_1. Если теперь $u_k \in W_2^2(Q;\mathbb{C})$ — решение задачи (10), то в силу леммы 1 $u_{k'} \rightharpoonup 0$ в $W_2^2(Q_1;\mathbb{C})$ и почти всюду в Q_1 $A_{k'}u_{k'} = \widetilde{A}u$. Следовательно, по лемме 2 $\widetilde{A}u = 0$ почти всюду в Q_1. Таким образом, оператор $\widetilde{A}$ локальный.

4.2. Пусть Q_1 — произвольная фиксированная гладкая подобласть Q. Рассмотрим Q_1 саму по себе и построим соответствующие операторы A^1 и $\widetilde{A}^1$, аналогичные операторам A, $\widetilde{A}$, исходя при этом из последовательности $A_{k'}$. Покажем, что оператор $\widetilde{A}^1$ есть сужение $\widetilde{A}$ на Q_1, т.е. для любого $u \in W_2^2(Q;\mathbb{C})$ имеем

$$\widetilde{A}u|_{Q_1} = \widetilde{A}^1 u. \tag{11}$$

Действительно, пусть u_k — решение задачи (10), v_k — аналогичное решение задачи (10) с оператором $\widetilde{A}^1$, где $u \in W_2^2(Q;\mathbb{C})$. Тогда $A_k(u_k - v_k) = \widetilde{A}u - \widetilde{A}^1 u$ и $u_{k'} - v_{k'} \rightharpoonup 0$ в $W_2^2(Q_1)$ по лемме 1. Следовательно, равенство (11) есть следствие леммы 2.

В области Q_1 операторы A_k характеризуются теми же константами ν_0, ν_1, что и в Q. Поэтому для оператора $\widetilde{A}^1$ имеет место оценка (9) с той же константой. Отсюда и из (11) получим

$$\int\limits_{Q_1} |\widetilde{A}u|^2 dx \leqslant c_1^2 \, \|u\|^2_{W_2^2(Q_1;\mathbb{C})}\,, \tag{12}$$

где Q_1 — любая фиксированная гладкая односвязная подобласть области Q.

Пусть $c \in \mathbb{C}$, тогда

$$\widetilde{A}(c\bar{z}) = 0, \quad \widetilde{A}(cz) = 0, \quad \widetilde{A}c = 0. \tag{13}$$

Действительно,

$$\widetilde{A}(c\bar{z}) = A(\text{w-}\lim \mathcal{A}_{k'}^{-1} A_{k'}(c\bar{z})) = A(\text{w-}\lim \mathcal{A}_{k'}^{-1} c) = A\, A^{-1} 0 = 0,$$

где w-lim — слабый предел в $W_0(Q;\, \mathbb{C})$. Аналогично получим второе и третье соотношение.

Пусть $z_0 \in Q$ — точка Лебега функций $\widetilde{A}u$, Az, $A(iz)$, где $u \in C^\infty(Q; \mathbb{C})$. И пусть

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{1}{2}\left(\widetilde{A}(z\bar{z}) - i\widetilde{A}(iz\bar{z})\right)\partial^2_{z\bar{z}}u(z_0),\\
\mu_2 &= \frac{1}{4}\left(\widetilde{A}(z^2) - i\widetilde{A}(iz^2)\right)\partial^2_{zz}u(z_0),\\
\mu_3 &= \frac{1}{4}\left(\widetilde{A}(\bar{z}^2) - i\widetilde{A}(i\bar{z}^2)\right)\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0),\\
\mu_4 &= \frac{1}{2}\left(\widetilde{A}(z\bar{z}) + i\widetilde{A}(iz\bar{z})\right)\partial^2_{z\bar{z}}\overline{u(z_0)},\\
\mu_5 &= \frac{1}{4}\left(\widetilde{A}(\bar{z}^2) + i\widetilde{A}(i\bar{z}^2)\right)\partial^2_{zz}\overline{u(z_0)},\\
\mu_6 &= \frac{1}{4}\left(\widetilde{A}(z^2) + i\widetilde{A}(iz^2)\right)\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}\overline{u(z_0)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

По формуле Тейлора получим

$$u = u(z_0) + \partial_{\bar{z}}u(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + \partial_z u(z_0)(z - z_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)^2 + \partial^2_{z\bar{z}}u(z_0)(\bar{z} - z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}\partial^2_{zz}u(z_0)(z - z_0)^2 + v(z)$$

Из оценки (12) следует, что $\widetilde{A}v|_{z=z_0} = 0$. Поэтому в силу (13) и (14), имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}u|_{z=z_0} &= \frac{1}{2}\widetilde{A}(\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0)\bar{z}^2) + \widetilde{A}(\partial^2_{z\bar{z}}u(z_0)z\bar{z}) + \frac{1}{2}\widetilde{A}(\partial^2_{z\,z}u(z_0)z^2) =\\
&= \frac{1}{2}\widetilde{A}\left((\mathrm{Re}\ \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0) + i\,\mathrm{Im}\ \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0))\bar{z}^2\right) +\\
&+\widetilde{A}\left((\mathrm{Re}\ \partial^2_{z\bar{z}}u(z_0) + i\,\mathrm{Im}\ \partial^2_{z\bar{z}}u(z_0))\right)z\bar{z}^2 +\\
&+\frac{1}{2}\widetilde{A}\left((\mathrm{Re}\ \partial^2_{z\,z}u(z_0) + i\,\mathrm{Im}\ \partial^2_{z\,z}u(z_0))z^2\right) =\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0)\widetilde{A}(\bar{z}^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0)\widetilde{A}(i\bar{z}^2) +\\
&+\mathrm{Re}\,\partial^2_{z\bar{z}}u(z_0)\widetilde{A}(z\bar{z}) + \mathrm{Im}\,\partial^2_{z\bar{z}}u(z_0)\widetilde{A}(iz\bar{z}) +\\
&+\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\partial^2_{zz}u(z_0)\widetilde{A}(z^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\partial^2_{zz}u(z_0)\widetilde{A}(iz^2) =\\
&= \frac{1}{4}\left(\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0) + \partial^2_{zz}\overline{u(z_0)}\right)\widetilde{A}(\bar{z}^2) - \frac{1}{4}i\left(\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0) - \partial^2_{zz}\overline{u(z_0)}\right)\widetilde{A}(i\bar{z}^2) +\\
&+\frac{1}{2}\left(\partial^2_{z\bar{z}}u(z_0) + \partial^2_{z\bar{z}}\overline{u(z_0)}\right)\widetilde{A}(z\bar{z}) - \frac{1}{2}i\left(\partial^2_{z\bar{z}}u(z_0) - \partial^2_{z\bar{z}}\overline{u(z_0)}\right)\widetilde{A}(z\bar{z}) +\\
&+\frac{1}{4}\left(\partial^2_{z\,z}u(z_0) + \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}\overline{u(z_0)}\right)\widetilde{A}(z^2) - \frac{1}{4}i\left(\partial^2_{zz}u(z_0) - \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}\overline{u(z_0)}\right)\widetilde{A}(iz^2) =\\
&= \mu_1\partial^2_{z\bar{z}}u(z_0) + \mu_2\partial^2_{zz}u(z_0) + \mu_3\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u(z_0) + \mu_4\partial^2_{z\bar{z}}\overline{u(z_0)} + \mu_5\partial^2_{zz}\overline{u(z_0)} + \mu_6\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}\overline{u(z_0)}.
\end{aligned}$$

где коэффициенты $\mu_1, \ldots, \mu_6$ определяются по формулам (14).

5. Примеры G-компактных классов

5.1. Класс $\mathcal{A}_1(k_0; Q)$. Рассмотрим класс операторов $\mathcal{A}_1(k_0; Q)$ вида:

$$Au \equiv \partial^2_{z\bar{z}}u + \mu\partial^2_{z\,z}u + \nu\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}\bar{u}, \tag{15}$$

где μ, ν — измеримые в области Q комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию
$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in Q}\left(|\mu(x)|+|\nu(x)|\right)\leqslant k_0<1, \tag{16}$$
$k_0>0$ — константа, $Q\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная гладкая (класса $\mathbb{C}^{2+\alpha}$) односвязная область.

Тогда, аналогично [9], имеем

$$(1-k_0)\left\|\partial^2_{z\,\bar z}u\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}\leqslant\|Au\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}\leqslant(1+k_0)\left\|\partial^2_{z\,\bar z}u\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \tag{17}$$

$$(1-k_0)\left\|\partial^2_{z\,\bar z}u\right\|^2_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}\leqslant\operatorname{Re}\int\limits_Q Au\,\overline{\partial^2_{z\,\bar z}u}\,dx,\quad u\in W_0(Q;\,\mathbb{C}), \tag{18}$$

$$W_0=\Big\{u\in W^2_2(Q;\,\mathbb{C})\mid \operatorname{Re}u\mid_{\partial Q}=0,\operatorname{Re}\partial_z u\mid_{\partial Q}=0,$$
$$\int\limits_{\partial Q}\operatorname{Im}u\,dx=0,\int\limits_{\partial Q}\operatorname{Im}\partial_z u\,dx=0\Big\}$$

Из неравенств (17), (18) легко следует неравенство:

$$\operatorname{Re}\int\limits_Q Au\,\overline{\partial^2_{z\,\bar z}v}\,dx\leqslant\frac{1+k_0}{1-k_0}\left(\operatorname{Re}\int\limits_Q Au\,\overline{\partial^2_{z\,\bar z}u}\right)^{\frac12}\left\|\partial^2_{z\,\bar z}v\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}, \tag{19}$$

Действительно, согласно (17), имеем

$$\operatorname{Re}\int\limits_Q Au\,\overline{\partial^2_{z\,\bar z}v}\,dx\leqslant\|Au\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}\left\|\partial^2_{z\,\bar z}v\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}\leqslant$$
$$\leqslant(1+k_0)\left\|\partial^2_{z\,\bar z}u\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}\cdot\left\|\partial^2_{z\,\bar z}v\right\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}.$$

Отсюда, ввиду (18), получим (19).

Очевидно, что $\mathcal{A}_1(k_0;\,Q)$ подкласс $\mathcal{A}(\nu_0,\,\nu_1;\,Q)$, где $\nu_0=1-k_0$, $\nu_1=\frac{1+k_0}{1-k_0}$, $\Lambda=\partial^2_{z\,\bar z}$.

Лемма 3. *Пусть коэффициенты μ, ν уравнения (15) измеримые ограниченные в Q функции. Тогда условие (16) эквивалентно интегральным условиям (18), (19), где $Q_1=Q$, $0\leqslant k_0<1$.*

Доказательство. Как было отмечено выше из (16) следуют (18) (19). Покажем, что из условий (18), (19) следует (16). Пусть

$$u=v=\overline{T}g\equiv-\frac{1}{\pi}\iint_Q\frac{g(\zeta)}{\bar\zeta-\bar z}\,d\zeta_1d\zeta_2,\quad\zeta=\zeta_1+i\zeta_2,$$

где $g=\theta n^{-1}\varphi\sin(n\operatorname{Re}(z\,\bar\xi))$. Согласно свойствам оператора $\overline{T}$ (см. [10; гл. 1, § 5, п. 2]) $\partial_z u=\partial_z v=g$. Положим в (18), (19)

$$\partial_z u=\partial_z v=g=\theta n^{-1}\varphi\sin(n\operatorname{Re}(z\,\bar\xi)),$$

где $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ — действительная функция, ξ, $\theta \in \mathbb{C}$. Тогда легко получим

$$(1-k_0)|\xi|^2|\theta|^2 \int\limits_Q \varphi^2 \cos^2\left(n\mathrm{Re}\,(z\,\bar{\xi})\right)\,dx + \alpha_n^1 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Re} \int\limits_Q \left(|\xi|^2|\theta|^2 + \mu\bar{\xi}^2|\theta| + \nu|\xi|^2\bar{\theta}^2\right)\varphi^2 \cos^2\left(n\mathrm{Re}\,(z\,\bar{\xi}\right)\,dx \leqslant \tag{20}$$
$$\leqslant (1+k_1)|\xi|^2|\theta|^2 \int\limits_Q \varphi^2 \cos^2\left(n\mathrm{Re}\,(z\,\bar{\xi})\right)\,dx + \alpha_n^2,$$

через α_n^1, α_n^2 обозначены суммы интегралов, содержащих производные φ. Заметим, что α_n^1, $\alpha_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, так как каждый интеграл в α_n^1 и α_n^2 имеет множитель n^{-1}. Очевидно, что $\cos^2\left(n\mathrm{Re}\,(z\,\bar{\xi})\right) \rightharpoonup 2^{-1}$ в $L_2(Q)$ при $n \to \infty$. Следовательно, после предельного перехода из (20) имеем:

$$(1-k_0)|\xi|^2|\theta|^2 \int\limits_Q \varphi^2(x)\,dx \leqslant |\xi|^2|\theta|^2 \int\limits_Q \varphi^2(x)dx +$$
$$+ \int\limits_Q \varphi^2(x)\mathrm{Re}\,\left(\mu\bar{\xi}^2|\theta|^2 + \nu|\xi|^2\bar{\theta}^2\right)\,dx \leqslant (1+k_1)|\xi|^2|\theta|^2 \int\limits_Q \varphi^2(x)\,dx.$$

Отсюда, ввиду произвольности $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, получим

$$-k_1|\xi|^2|\theta|^2 \leqslant \mathrm{Re}\,\left(\mu\bar{\xi}^2|\theta|^2 + \nu|\xi|^2\bar{\theta}^2\right) \leqslant k_0|\xi|^2|\theta|^2$$

п.в. в Q, $\forall \xi$, $\theta \in \mathbb{C}$.

Заменим в этом соотношении ξ на $i\xi$, θ на $i\theta$ и поделим его на $|\xi|^2|\theta|^2$. Тогда получим, что для любых ζ, $\eta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = |\eta| = 1$, имеют место неравенства

$$-k_1 \leqslant \mathrm{Re}\,(\mu\zeta + \nu\eta) \leqslant k_0 \quad \text{п.в. в} \quad Q. \tag{21}$$

Отсюда следует, что μ, $\nu \in L_\infty(Q;\mathbb{C})$. Действительно, так как $k_0 < k_1$ имеем

$$|\mathrm{Re}\,(\mu\zeta + \nu\eta)| \leqslant k_1 \quad \text{п.в. в} \quad Q. \tag{22}$$

Положим здесь $\zeta = \eta = 1$, $\zeta = 1$, $\eta = -1$, тогда имеем $|\mathrm{Re}\,(\mu+\nu)| \leqslant k_1$, $|\mathrm{Re}\,(\mu-\nu)| \leqslant k_1$ п.в. в Q. Значит, $|\mathrm{Re}\,\mu| \leqslant k_1$, $|\mathrm{Re}\,\nu| \leqslant k_1$ п.в. в Q. Теперь, полагая в (21) $\zeta = \eta = i$, $\zeta = i$, $\eta = -i$, получим $|\mathrm{Im}\,\mu| \leqslant k_1$, $|\mathrm{Im}\,\nu| \leqslant k_1$ п.в. в Q. Значит μ, $\nu \in L_\infty(Q;\,\mathbb{C})$.

Пусть теперь $Q_0 \subset Q$, $\mathrm{mes}\,(Q \setminus Q_0) = 0$, — множество на котором значения μ и ν конечны. И пусть для $z_0 \in Q_0$ имеем $\mu(z_0) \neq 0$, $\nu(z_0) \neq 0$. Тогда из (21) при $\zeta = e^{-i\varphi}$, $\eta = e^{-i\varphi}$, $\varphi = \arg\mu(z_0)$, $\psi = \arg\nu(z_0)$ получим

$$|\mu(z_0)| + |\nu(z_0)| \leqslant k_0. \tag{23}$$

В случае, когда одно из чисел $\mu(z_0)$, $\nu(z_0)$ ноль, а другое нет, алогично получим (23). Таким образом, почти всюду в Q имеем (23). Лемма доказана.

Справедлива следующая

Теорема 5. *Класс $\mathcal{A}_1(k_0;\, Q)$ компактен относительно G-сходимости.*

Доказательство. Как было отмечено выше $\mathcal{A}_1(k_0;\, Q) \subset \mathcal{A}(\nu_0,\, \nu_1;\, Q)$, где $\nu_0 = 1 - k_0$, $\nu_1 = \frac{1+k_0}{1-k_0}$, $\Lambda = \partial^2_{z\,\bar{z}}$. По лемме 3 мы имеем совпадение классов $\mathcal{A}_1(k_0;\, Q) = \mathcal{A}(\nu_0,\, \nu_1;\, Q)$. Отсюда, согласно теореме 4, определению оператора $\widetilde{A}$ и формулам (14), получим справедливость теоремы 5.

5.2. О других G-компактных классах. Аналогично предыдущему пункту можно доказать G-компактность следующих классов:

$$\mathcal{A}_2(k_0;\, Q): \quad Au \equiv \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}u + \mu\partial^2_{z\,\bar{z}}u + \nu\partial^2_{\bar{z}z}\bar{u}, \quad \Lambda u = \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}\bar{u},$$

$$W_0 = \Big\{u \in W^2_2(Q;\, \mathbb{C}) \mid \operatorname{Re} u\,|_{\partial Q} = 0, \operatorname{Re}$$

$$\left.\partial_{\bar{z}}u\,|_{\partial Q} = 0, \int\limits_{\partial Q} \operatorname{Im} u\, dx = 0, \int\limits_{\partial Q} \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}u\, dx = 0\right\};$$

$$\mathcal{A}_3(k_0;\, Q): \quad Au \equiv \partial^2_{z\bar{z}}\bar{u} + \mu\partial^2_{z\,z}\bar{u} + \nu\partial^2_{zz}u, \quad \Lambda u = \partial^2_{z\bar{z}}\bar{u},$$

$$W_0 = \Big\{u \in W^2_2(Q;\, \mathbb{C}) \mid \operatorname{Re} u\,|_{\partial Q} = 0, \operatorname{Re}$$

$$\left.\partial_{z}u\,|_{\partial Q} = 0, \int\limits_{\partial Q} \operatorname{Im} u\, dx = 0, \int\limits_{\partial Q} \operatorname{Im} \partial_{z}u\, dx = 0\right\},$$

$$\mathcal{A}_4(k_0;\, Q): \quad Au \equiv \partial^2_{zz}\bar{u} + \mu\partial^2_{z\,\bar{z}}\bar{u} + \nu\partial^2_{\bar{z}z}u, \quad \Lambda u = \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}\bar{u},$$

$$W_0 = \Big\{u \in W^2_2(Q;\, \mathbb{C}) \mid \operatorname{Re} u\,|_{\partial Q} = 0, \operatorname{Re}$$

$$\left.\partial_{\bar{z}}u\,|_{\partial Q} = 0, \int\limits_{\partial Q} \operatorname{Im} u\, dx = 0, \int\limits_{\partial Q} \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}u\, dx = 0\right\}$$

Список литературы

[1] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. *Усреднение дифференциальных операторов.* М.: Наука, 1993.

[2] Spagnolo S. *Sul limite delle solutioni di problemi di Cauchy relativi all´equazione del calore*// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, CI. Sci. 1967. V. 21. P. 657–699.

[3] Spagnolo S. *Sulla convergenza di solutioni di equazioni paraboliche ed ellittiche* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, CI. Sci. 1968. V. 22. P. 577–597.

[4] De Giorgi E., Spagnolo S. *Sulla convergenza degli integrali dell ´energia per operatori ellittici del 2 ordine*// Boll. Un. Mat. Ital. 1973. V. 8, № 4. P. 391–411.

[5] Жиков В.В., Сиражудинов М.М. *О G–компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов второго порядка*// Изв. АН СССР, серия матем. 1981. Т. 45, № 4. С. 718–733.

[6] Жиков В.В., Сиражудинов М.М. *Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решений задачи Коши*// Мат. сб. 1981. Т. 116, № 2. С. 166–186.

[7] Сиражудинов М.М. *G–сходимость и усреднение некоторых недивергентных эллиптических операторов высокого порядка*// Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 11. С. 1949–1956. 1981. Т. 45, № 4. С. 718–733.

[8] Сиражудинов М.М.*О G–компактности одного класса эллиптических систем первого порядка*// Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. № 2. С. 298–305.

[9] Джамалудинова С. П. *Задача Пуанкаре для одного эллиптического уравнения второго порядка*// Вестник ДГУ. 2013. № 1. С. 65–67.

[10] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* М.: Наука, 1988.

М. М. Сиражудинов (M. M. Sirazhudinov)
Дагестанский научный центр РАН, Дагестанский государственный университет
E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Поступила в редакцию
5.11.2018

С. П. Джамалудинова (S. P. Dzhamaludinova)
Дагестанский государственный университет
E-mail: dzh-saida2012@yandex.ru