УДК 517.946

М. М. Сиражудинов, С. Е. Пастухова, С. П. Джамалудинова

Метод асимптотических разложений для уравнения Бельтрами

В работе получены оценки разности точного решения и его приближений задачи Римана – Гильберта для уравнения Бельтрами с периодическим коэффициентом, зависящим от малого параметра. Впервые к вопросам усреднения уравнения Бельтрами привлекается метод асимптотических разложений.

Библиография: 10 названий.

This paper presents estimates for the difference between the exact solution of the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations with periodic coefficient, which depends on small parameter, and its approximation. For the first time to the issues of homogenization of the Beltrami equations asymptotic expansion method is involved.

Bibliography: 10 items.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, усреднение, метод асимптотических разложений.

Keywords: Beltrami equation, homogenization, method of asymptotic expansions.

В монографии [1; гл. 1] В. В. Жикова, С. М. Козлова, О. А. Олейник дается обоснование метода асимптотических разложений в вопросах усреднения для многих операторов второго порядка, кроме того в ней даются оценки разности между точными решениями и первыми приближениями.

Вопросы G-сходимости и усреднения уравнения Бельтрами изучены в работах [2, 3, 4, 5]. В данной работе предложен новый метод построения усредненного уравнения, основанный на методе асимптотического разложения.

В работе будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathbb{R}^2$ – плоскость, $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей, $\overline{Q}$ – замыкание области Q.

$\partial_{\bar z} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i\,\mathcal{D}_2), \quad \partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i\,\mathcal{D}_2), \quad \mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2.$

i – мнимая единица.

$L_2(Q)$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций.

$\overline{v}$ – комплексно сопряженная v функция.

$W_p^k(Q)$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$) – обычное пространство Соболева комплекснозначных функций; $\overset{\circ}{W}{}_p^k(Q)$ – подпространство $W_p^k(Q)$, состоящее из элементов с нулевыми следами на границе.

$\square$ – квадрат со стороной T, параллельной оси координат (квадрат периодов).
$|\square| = T^2$ – площадь квадрата $\square$.

Периодической будем называть функцию периода T по каждой переменной.

$\mathcal{L}_2(\square)$, $W_2^1(\square)$ – пространства Лебега и Соболева периодических функций.

$\langle u \rangle$ – среднее значение периодической функции u,

$$\langle u \rangle = |\square|^{-1} \int_\square u(x)\, dx.$$

Как известно, если $g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$) – периодическая функция, $g \in \mathcal{L}_2(\square)$, то тогда $g(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle g \rangle$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$ при $\varepsilon \to 0$, где Q – произвольная ограниченная область плоскости.

$\rightharpoonup$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

$W_0(Q)$ – подпространство $W_2^1(Q)$, определенное равенством:

$$W_0(Q) = \Big\{ u \in W_2^1(Q) \mid \operatorname{Re} u\big|_{\partial Q} = 0, \quad \int\limits_Q \operatorname{Im} u\, dx = 0 \Big\}.$$

$y = \varepsilon^{-1}x$ – «быстрая» переменная, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$.

1. Формулировка результатов

1.1. Задача Римана – Гильберта (Р – Г) для уравнения Бельтрами. Рассмотрим следующую задачу Р – Г:

$$\begin{cases} Au \equiv \partial_{\bar z} u + \mu(x)\partial_z u = f \in L_2(Q), \\ u \in W_0(Q), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$ – измеримая ограниченная комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x \in Q} |\mu(x)| \leqslant k_0 < 1, \tag{1.2}$$

$k_0 > 0$ – постоянная (*константа эллиптичности*).

Как известно (см. [2, 3, 4, 5, 6]), ***задача Р-Г*** (1.1) ***однозначно разрешима для любой правой части из*** $L_2(Q)$***, причем имеют место априорные оценки***:

$$(1 - k_0)\, \|\partial_{\bar z} u\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \operatorname{Re} \int\limits_Q Au \cdot \overline{\partial_{\bar z} u}\, dx, \tag{1.3}$$

$$(1 - k_0)\, \|\partial_{\bar z} u\|_{L_2(Q)} \leqslant \|Au\|_{L_2(Q)} \leqslant (1 + k_0)\, \|\partial_{\bar z} u\|_{L_2(Q)}\,, \tag{1.4}$$

Оценки (1.3), (1.4) справедливы для любого элемента $u \in W_2^1(Q)$, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0$, условие на мнимую часть не требуется.

Выражение

$$\|u\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar z} u\|_{L_2(Q)}\,, \quad u \in W_0(Q)$$

задает в подпространстве $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q)$ (см. [2]), поэтому имеют место оценки:

$$c_1\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant \|Au\|_{L_2(Q)} \leqslant c_2\|u\|_{W_2^1(Q)}, \tag{1.5}$$

где c_1, $c_2 > 0$ – постоянные зависящие только от k_0.

1.2. G-сходимость и усреднение.

1.2.1. *G-сходимость.* Обозначим через $\mathcal{A}(k_0;\, Q)$ – множество операторов Бельтрами (1.1).

G-предел определен единственным образом. Как известно, см. [2, 3] ***класс*** $\mathcal{A}(k_0;\, Q)$ ***операторов Бельтрами G-компактен.***

G-сходимость обладает следующим свойством *сходимости «произвольных» решений*: **пусть** $A_k \xrightarrow{G} A$**,** $u_k \rightharpoonup u$ **в** $W_2^1(Q)$**,** $f_k \to f$ **в** $L_2(Q)$**,** $A_k u_k = f_k$**, тогда** $Au = f$**.**

1.2.2. *Усреднение.* Рассмотрим задачу Р – Г:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u \equiv \partial_{\bar z} u_\varepsilon + \mu(\varepsilon^{-1}x)\, \partial_z u_\varepsilon = f \in L_2(Q), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q), \end{cases} \tag{1.6}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$ – измеримая ограниченная комплекснозначная периодическая (периода T по каждой переменной) функция, удовлетворяющая условию (1.2) на всей плоскости

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}^2} |\mu(x)| \leqslant k_0 < 1.$$

Очевидно, что оператор A_ε принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0;\, Q)$.

Определение 1. Скажем, что семейство $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A$, $A \in \mathcal{A}(k_0;\, Q)$.

В вопросах усреднения важную роль играет ядро оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного оператору периодической задачи:

$$\mathcal{A}u \equiv \partial_{\bar z} u + \mu(x)\partial_z u = f \in L_2(\square), \quad u \in W_2^1(\square).$$

Известно (см. [2]), что ***ядро сопряженного оператора одномерно и одним из базисных векторов будет функция*** $p \in L_2(\square)$***, обладающая свойством***

$$\langle p \rangle = 1. \tag{1.7}$$

Сформулируем теорему об усреднении.

Теорема 1 (Об усреднении). *Для семейства операторов*

$$A_\varepsilon = \partial_{\bar z} + \mu^\varepsilon \partial_z,$$

$\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, *имеет место усреднение, причем коэффициент усредненного оператора A_0 постоянен и вычисляется по формуле*

$$\mu^0 = \langle \mu \bar p \rangle,$$

где p – базисный вектор из (1.7).

Доказательство теоремы, основанное на интегральном тождестве дается в работе [2].

1.3. Первое приближение к решению задачи (1.6). Пусть u_ε – решение задачи Римана – Гильберта (1.6). Как отмечалось в пункте 1.1, задача Римана – Гильберта (1.6) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q;\mathbb{C})$. Попытаемся написать «хорошее» приближение к этому решению, приближение, которое учитывало бы быструю осцилляцию коэффициентов уравнения. По аналогии с некоторыми приемами нелинейной механики в работах Бахвалова [7, 8, 9], Санчес — Паленсии [10], а также в многих физических публикациях было показано, что первое приближение для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка целесообразно искать в виде

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon u_1(x,y), \tag{1.8}$$

где $y = \varepsilon^{-1}x$, $y = (y_1,\, y_2)$, $x = (x_1,\, x_2)$, а $u_1(x,y)$ – периодическая по $y = (y_1,\, y_2)$ функция одного и того же периода T по y_1, y_2.

Оказалось, что и для уравнения Бельтрами (1.6), которое является недивергентным эллиптическим уравнением первого порядка, первое приближение следует искать в виде (1.8). Выбор первого приближения в виде (1.8) основано не только на идее близости первого приближения к решению u_ε задачи Римана – Гильберта (1.6), но и на идее близости соответствующих u_ε и u_1^ε уравнений. При реализации этих идей, естественным образом, получается, что u^0 удовлетворяет усредненной задаче $A_0 u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q)$ и функция $u_1^\varepsilon(x)$ определяется равенством:

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon N(y)\partial_z u^0(x), \tag{1.9}$$

где N – периодическое решение задачи на ячейке

$$\mathcal{A}N \equiv \partial_{\bar z} N + \mu \partial_z N = \mu^0 - \mu, \quad u \in W_2^1(\square).$$

Имеет место следующая (основная)

Теорема 2 (Основная). *Пусть правая часть f и коэффициент $\mu(x)$ уравнения (1.6) достаточно гладкие функции (например: $f \in W_p^2(Q)$, $p > 2$; $\mu \in C^{1+\alpha}(\overline{\square})$), тогда имеют место оценки*

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \qquad \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \tag{1.10}$$

где $c > 0$ – постоянная, независящая от ε.

Первая из оценок (1.10) – оценка разности точного решения задачи (1.6) и первого приближения, а вторая есть оценка скорости сходимости точного решения к решению усредненной задачи.

Доказательства формулы (1.9), основной теоремы и теоремы усреднения (основанное на оценках (1.10)) будут даны нами в другой работе.

Список литературы

[1] Жиков В.В, Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов М.: Наука. 1993.

[2] Сиражудинов М.М. О G-сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 5. С. 124–155.

[3] Сиражудинов М.М., Сиражудинов Р.М. О G-сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами // Труды МИАН. 2008. Т. 121.

[4] Сиражудинов М.М. О G–компактности одного класса эллиптических систем первого порядка // Дифф. уравн. 1990. Т. 26, № 2.

[5] Жиков В.В., Сиражудинов М.М. Усреднение систем уравнений Бельтрами // Дифф. уравн. 1990. Т. 26, № 2.

[6] Сиражудинов М.М. О краевой задаче Римана – Гильберта // Дифф. уравн. 1989. Т. 25, № 8. С. 1400–1406.

[7] Бахвалов Н.С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой // ДАН СССР. 1974. Т. 218, № 5. С. 1046–1048.

[8] Бахвалов Н.С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // ДАН СССР. 1975. Т. 221, № 3. С. 516–519.

[9] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984.

[10] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир. 1984.

М. М. Сиражудинов (M. M. Sirazhudinov)
Дагестанский научный центр РАН,
Дагестанский государственный университет
E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Поступила в редакцию
27.10.2013

С. Е. Пастухова (S. E. Pastukhova)
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

С. П. Джамалудинова (S. P. Dgamaludinova)
Дагестанский государственный университет,
Дагестанский государственный университет народного хозяйства