УДК 517.4

З. Г. Меджидов

Обращение лучевого преобразования симметричных тензорных полей и преобразования Радона дифференциальных форм по неполным данным

Симметричное тензорное поле в евклидовом пространстве произвольной размерности $\mathbb{R}^n$ восстанавливается по его интегралам вдоль прямых, образующих n-мерное многообразие. Получены новые формулы, восстанавливающие соленоидальную часть полей, когда лучевое преобразование известно на комплексах прямых, пересекающих данную кривую, а также бесконечно удаленную кривую. Введено новое семейство двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$ и получена формула обращения для дифференциальных форм степени 2 по заданным интегралам вдоль плоскостей этого семейства.

Библиография: 8 названий.

A symmetric tensor field in the Euclidian space of any dimension $\mathbb{R}^n$ can be reconstructed from its integrals along straight lines which form n-manifold. We obtained the new formulas reconstructing solenoidal part of the fields when a ray transform is known only on complex lines, intersecting a given curve, as well as a curve belonging to infinity. The new family of two-dimensional planes in $\mathbb{R}^n$ is introduced and the inversion formula is obtained for the case of differential forms of degree 2 on the given integrals along the planes of this family.

Bibliography: 8 items.

Ключевые слова: симметричное тензорное поле, лучевое преобразование, восстановление, комплекс прямых, соленоидальная часть, преобразование Радона дифференциальных форм.

Keywords: symmetric tensor field, ray transform, reconstruction, complex of lines, solenoidal part, Radon transform of differential forms.

Введение

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ через $S^m\left(T^*\mathbb{R}^n\right)$ обозначим расслоение ковариантных симметричных тензоров порядка m, $m \geqslant 0$. Значение тензора $f \in S^m\left(T^*\mathbb{R}^n\right)$ на векторах $\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_m$ обозначим через $f\left(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_m\right)$; в координатах: $f\left(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_m\right) = f_{i_1\ldots i_m}{\xi_1}^{i_1}\ {\xi_2}^{i_2}\ldots{\xi_m}^{i_m}$. Лучевое преобразование поля $f \in C_0^\infty\left(S^m\right)$ определим формулой

$$If\left(l\right) \equiv If\left(x,\theta\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{i_1 i_2\ldots i_m}\left(x+t\theta\right)\theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_m}dt \equiv$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x+t\theta;\theta,\ldots,\theta\right)dt \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x+t\theta;\theta^{m}\right)dt, \tag{0.1}$$

где $l = \{x + t\theta \,|t \in \mathbb{R}\}$ – ориентированная прямая; по повторяющемуся индексу предполагается суммирование от 1 до n.

Задача состоит в восстановлении поля f по известной функции $g = If$.

Преобразование (0.1) и различные его обобщения возникают и применяются как в самой математике, так и в других областях науки, требующих приложения математических методов. Так, при $m = 1$ интегралы (0.1) моделируют измерения в задачах визуализации движущихся сред, в частности, течений жидкостей и газов. Задачи восстановления f возникают в медицине при визуализации течения крови в человеческом теле путем измерений ультразвукового сигнала Доплера, оптике, физике плазмы и т.д. (соответствующие ссылки можно найти в работах [1]-[3]).

Заметим, что поле f зависит от n переменных, в то время как If зависит от $2n-2$ независимых переменных, и при $n \geqslant 3$ задача обращения является переопределенной. Поэтому возникает задача реконструкции поля f по данным на n-мерном многообразии (комплексе) прямых. Примером комплекса прямых в $\mathbb{R}^3$ является множество прямых, пересекающих данную кривую. Задачу реконструкции мы решаем при условии, что кривая удовлетворяет некоторому условию полноты. Семейство прямых, каждая из которых параллельна одной из трех (или двух) данных пересекающихся плоскостей, также имеет размерность 3. Алгоритм восстановления векторных и тензорных полей по данным линейных интегралов вдоль прямых этого семейства получен В. Шарафутдиновым в [3]. В п. 2 мы показываем, что одной плоскости достаточно, если известны производные функции g.

Другие примеры комплексов прямых:

1. Множество прямых, пересекающих данную кривую, удовлетворяющую некоторому условию полноты. Восстановлению f по заданным интегралам вдоль прямых этого комплекса посвящены работы Л.Б. Вертгейма ([4]), А. Денисюка ([1]), В.П. Паламодова ([2]).

2. Множество прямых, направляющие векторы которых являются радиус-векторами точек кривой, принадлежащей единичной сфере. Говорят, что прямые пересекают бесконечно удаленную кривую.

Введем обозначения для дифференциальных операций над тензорными полями в $\mathbb{R}^n$ (см. [1], [5]):

$d : C^{\infty}\left(S^m\right) \to C^{\infty}\left(S^{m+1}\right)$ – оператор внутреннего дифференцирования,

$$\left(df\right)_{i_1\cdots i_{m+1}} = \sigma\left(i_1\cdots i_{m+1}\right)\frac{\partial}{\partial x^{i_{m+1}}} f_{i_1\cdots i_m};$$

где $\sigma\left(i_1\cdots i_k\right)$ – оператор симметрирования:

$$\left(\sigma\left(i_1\cdots i_k\right)f\right)_{i_1\cdots i_l} = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in\Pi_k} f_{i_{\pi 1}\cdots i_{\pi k} i_{k+1}\cdots i_l},$$

Π_k – соответствующая группа перестановок, $\delta : C^{\infty}\left(S^m\right) \to C^{\infty}\left(S^{m-1}\right)$ – дивергенция;

$$(\delta f)_{i_1\ldots i_{m-1}} = \frac{\partial}{\partial x^i} f_{i_1\ldots i_{m-1}i};$$

$W : C^\infty(S^m) \to C^\infty\left(S^m\left(\wedge^2 T^*\mathbb{R}^3\right)\right)$ – оператор Сен-Венана,

$$(Wf(x))_{i_1j_1\cdots i_mj_m} = \alpha(i_1j_1)\cdots\alpha(i_mj_m)\frac{\partial f_{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_m}},$$

где $\alpha(i_kj_k)$ – оператор альтернирования:

$$(\alpha(i_ki_l)g)_{i_1\ldots i_p} = \frac{1}{2}\left(g_{i_1\ldots i_k\ldots i_l\ldots i_p} - g_{i_1\ldots i_l\ldots i_k\ldots i_p}\right).$$

При $m = 1$ оператор W совпадает с оператором внешнего дифференцирования.

Через $\mathfrak{S}(S^m)$ обозначим пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих полей. Мы пишем $f \in \mathfrak{S}(S^m)$, если каждая координатная функция $f_{i_1\cdots i_m} \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ и удовлетворяет условию $|\partial^\alpha f_{i_1\cdots i_m}(x)| \leqslant C_{\alpha,k}(1+|x|)^{-k}$ для любого мультииндекса α и целого $k \geqslant 0$. Преобразование (0.1) подробно изучено в книге [5] В. Шарафутдинова. Мы напомним сначала теорему, описывающую структуру ядра оператора I.

Теорема 1. *([5]). Для финитного поля $f \in C_0^\infty(S^m)$ следующие утверждения эквивалентны: 1) $If(x,\xi) = 0$; 2) существует гладкое поле $v \in C_0^\infty\left(S^{m-1}\right)$ такое, что $f = dv$; 3) Wf обращается в нуль в $\mathbb{R}^3$ тождественно.*

Следующая теорема обобщает известную теорему Гельмгольца о разложении векторного поля на соленоидальную и потенциальную части на случай тензорного поля.

Теорема 2. *([5]). Для любого поля $f \in \mathfrak{S}(S^m)$ существуют такие однозначно определенные поля $f^{(s)} \in \mathfrak{S}(S^m)$ и $v \in C^\infty\left(S^{m-1}\right)$, что*

$$f = f^{(s)} + dv, \quad \delta f^{(s)} = 0, \quad f^{(s)} \longrightarrow 0, \quad v(x) \longrightarrow 0 \quad x \longrightarrow \infty,$$

$$f^{(s)},\ dv \in L^2(S^m).$$

Поле $f^{(s)}$ называется соленоидальной частью f.

Из этих теорем следует, что по заданной функции If однозначно можно определить лишь поле $f^{(s)}$. Поэтому под формулой обращения мы понимаем формулу, выражающую $f^{(s)}$ через If.

Вертгейм Л.В. ([4]) получил формулу обращения в $\mathbb{R}^n$ в предположении, что If задана на комплексе прямых, пересекающих данную кривую Γ, обладающую свойством: любая плоскость, пересекающая носитель f, пересекает Γ в C_{n+m-1}^m точках. Денисюк А.С. [1] получил формулу обращения преобразования

$$h(x,\theta) = \int\limits_0^\infty f(x+t\theta;\theta^m)\,dt$$

поля $f \in \mathfrak{S}(S^m)$ в предположении, что любая плоскость, пересекающая носитель f, пересекает Γ в C_{n+m-2}^m точках (условие Кириллова-Туя). Он предложил по заданной на указанном комплексе прямых функции $h(x,\theta)$ восстановить сначала оператор Сен-Венана Wf, а затем соленоидальную часть $f^{(s)}$. Наш результат (п. 1) состоит в том, что даже одной точки пересечения Γ произвольной плоскостью достаточно, если известны первые производные функции $h(x,\theta)$. Для восстановления поля Wf мы пользуемся методом дифференцирования по направлению векторов с последующим интегрированием по частям. Этот метод был применен В.П. Паламодовым в работе [2] при восстановлении дифференциальных форм. Идею найти сначала (покоординатное) преобразование Радона $R(Wf)$ (или производные $R(Wf)$) функции Wf, а затем с помощью формулы обращения найти Wf в скалярном случае ($m = 0$) была реализована в работе [6]. Напомним, что скалярную функцию $f(x)$ по известному ее преобразованию Радона $Rf = g$ можно найти с помощью следующей формулы обращения (см. [7])

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Hg^{(n-1)}(x\cdot\theta,\theta)\,d\theta \text{ при четном } n, \\ (-1)^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g^{(n-1)}(x\cdot\theta,\theta)\,d\theta \text{ при нечетном } n, \end{cases}$$

где $Hg(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{s-t}dt$ – оператор Гильберта, $\mathbb{S}^{n-1}$ – единичная сфера.

Задачи обращения лучевого преобразования векторного поля для различных комплексов прямых решены в работе [8]. В частности, получена формула обращения, когда не все плоскости, проходящие через точки восстановления, пересекают кривую Γ.

В п. 2 получена формула обращения для случая комплекса прямых, каждая из которых параллельна хотя бы одному вектору из множества направлений $\Gamma \in \mathbb{S}^{n-1}$. Множество Γ обладает свойством: каждая гиперплоскость, проходящая через точки восстановления, параллельна, по крайней мере, одному вектору из Γ. Результаты этого пункта в п. 3 перенесены на случай дифференциальных форм степени 2, заданных на n-мерном семействе двумерных плоскостей.

1. Обращение лучевого преобразования симметричных тензорных полей с источниками на кривой

Введем обозначения, необходимые для формулировки основного результата:

$f_\xi = (\xi, \nabla_x) f$ – производная поля f по направлению вектора ξ;

$h_\xi(x;\theta) = (\xi, \nabla_x) h(x;\theta)$ – производная поля h, как функции x, по направлению вектора ξ;

$\partial_\omega h(x;\theta) = (\omega, \nabla_\theta) h(x;\theta)$ – производная поля h, как функции θ, по направлению вектора ω.

В этих обозначениях оператор Сен-Венана запишется в виде

$$Wf(\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_m,\eta_m) = \alpha(\xi_1,\eta_1)\cdots\alpha(\xi_m,\eta_m) f_{\xi_1\ldots\xi_m}(x;\eta_1,\ldots,\eta_m) =$$

$$= \xi_1^{i_1}\cdots\xi_m^{i_m} \frac{\partial^m f_{j_1\cdots j_m}}{\partial x^{i_1\cdots i_m}} \eta_1^{j_1}\cdots\eta_m^{j_m}. \quad (1.1)$$

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathfrak{S}(S^m)$, Γ – множество в $\mathbb{R}^n$, обладающее свойством: всякая гиперплоскость H, пересекающая носитель поля f, имеет хотя бы одну общую точку с Γ. Тогда поле Wf может быть восстановлена по заданной функции $h(x,\theta)$ и ее первым производным для лучей $l = l(x,\theta)$, где $x \in \Gamma$. Если число $m+n-2$ нечетное, поле Wf можно восстановить по заданной функции $g(l)$.*

Докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Для любых $\eta_1, \ldots, \eta_m \perp$ справедлива формула*

$$\int_{H_{\omega,p}} Wf(y;\omega,\eta_1,\ldots,\omega,\eta_m)\,dH = \frac{1}{2^m}\int_{H_{\omega,p}} f_\omega^{(m)}(y;\eta_1,\ldots,\eta_m)\,dH. \qquad (1.2)$$

Для доказательства достаточно проинтегрировать равенство (1.1), положив в нем $\xi_1 = \ldots \xi_m = \omega$ и заметить, что интеграл от функции $f_{\xi_1\ldots\xi_m}$ по $H = H_{\omega,p}$, где хотя бы один из векторов $\xi_1,\ldots,\xi_m$ параллелен H, равен нулю. В этом можно убедиться интегрированием по частям.

Во избежание громоздких выражений, в следующих леммах предполагается $n=3$. В общем случае рассуждения проводятся аналогично.

Лемма 2. *Для любых векторов $x,\ \theta,\ \omega \in \mathbb{R}^3$ имеет место равенство*

$$\partial_\omega^{m+1} h(x;\theta) = \sum_{l=0}^{m} \alpha_{m+1}^l \int_0^\infty f_\omega^{(m+1-l)}\left(x+t\theta,\ \omega^l,\theta^{m-l}\right) t^{m+1-l}dt, \qquad (1.3)$$

где $\alpha_{k+1}^l = C_{k+1}^l \cdot A_k^l$, $C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$, $A_k^l = C_k^l \cdot l!$, $\alpha_{k+1}^0 = 1$, $\alpha_{k+1}^k = (k+1)!$.

Доказательство. Индукцией по k можно доказать равенство

$$\partial_\omega^k h(x;\theta) = \sum_{l=0}^{k} \alpha_{m+1}^l \int_0^\infty f_\omega^{(k-l)}\left(x+t\theta,\ \omega^l,\theta^{m-l}\right) t^{k-l}dt,\ k \leqslant m.$$

Действительно, легко заметить следующее рекуррентное соотношение между коэффициентами α_k^l: $\alpha_1^0 = 1$, $\alpha_1^1 = m$, $\alpha_{k+1}^l = \alpha_k^{l-1}(m-l+1) + \alpha_k^l$. Поэтому если предположить, что $\alpha_k^l = C_k^l \cdot A_m^l$ для всех $l \leqslant k$, то

$$\alpha_{k+1}^l = C_k^{l-1}\cdot A_m^{l-1}\cdot(m-l+1) + C_k^l \cdot A_m^l = A_m^l\left(C_k^{l-1} + C_k^l\right) = C_{k+1}^l \cdot A_m^l.$$

Отсутствие в формуле (1.3) слагаемого, соответствующего $l = m+1$, объясняется тем, что производная последнего слагаемого в выражении $\partial_\omega^m h(x;\theta)$ содержит всего одно слагаемое:

$$\partial_\omega \alpha_m^m \int_0^\infty f\left(x+t\theta,\ \omega^m\right)dt = m!\int_0^\infty f_\omega\left(x+t\theta,\omega^m\right)tdt,$$

в то время как (при $l < m$) производные остальных членов содержат по два слагаемых:

$$\partial_\omega \alpha_m^l \int_0^\infty f_\omega^{(m-l)} \left(x+t\theta,\ \omega^l, \theta^{m-l}\right) t^{m-l} dt =$$

$$\alpha_m^l \left(\int_0^\infty f_\omega^{(m+1-l)} \left(x+t\theta,\ \omega^l, \theta^{m-l}\right) t^{m+1-l} dt\right) +$$

$$\int_0^\infty f_\omega^{(m-l)} \left(x+t\theta,\ \omega^{l+1}, \theta^{m-l-1}\right) t^{m-l} dt.$$

Лемма 3. *Для любого вектора $x \in H_{\omega,p}$ и любых векторов $\xi_1, \ldots, \xi_m \perp \omega$, $\theta \perp \omega$, $|\theta| = 1$, справедлива формула*

$$\int_{\mathbb{S}} \partial_\omega^{m+1} h_{\xi_1 \ldots \xi_m} (x; \theta)\, dS = (-1)^m m! \int_{H_{\omega,p}} f_\omega^{(m+1)} (y; \xi_1 \ldots \xi_m)\, dH, \tag{1.4}$$

где $\mathbb{S}$ – единичная окружность в плоскости $\omega^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot \omega = 0\right\}$.

Доказательство. Продифференцируем равенство (1.3) по направлению векторов $\xi_1, \ldots, \xi_m$:

$$\partial_\omega^{m+1} h_{\xi_1 \ldots \xi_m} (x; \theta) = \int_0^\infty \left(f_\omega^{(m+1)}\right)_{\xi_1 \ldots \xi_m} (x+t\theta;\ \theta^m)\, t^{m+1} dt$$

$$+ \sum_{l=1}^m \alpha_{m+1}^l \int_{-\infty}^\infty \left(f_\omega^{(m+1-l)}\right)_{\xi_1 \ldots \xi_m} \left(x+t\theta;\ \omega^l, \theta^{m-l}\right) t^{m+1-l} dt. \tag{1.5}$$

Пусть $e_1,\ e_2$ – ортогональный базис в плоскости $\omega^\perp$ и $\theta = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2$. Тогда в силу линейности функций $f_\omega^{(k)}$, $k = 1, \cdots, m+1$, по аргументам θ, имеем

$$f_\omega^{(m+1-l)} \left(y; \omega^l, \theta^{m-l}\right) = f_\omega^{(m+1-l)} \left(y; \omega^l, e_{i_1}, \cdots, e_{i_{m-l}}\right) \sigma^{i_1} \cdots \sigma^{i_{m-l}}$$

(суммирование по индексам $i_1, \cdots, i_{m-l}$ от 1 до 2). Введем обозначения: $y^i = \sigma^i t$. Проинтегрируем равенство (1.5) вдоль единичной окружности $\mathbb{S} \subset H$, заметив, что $t dt d\sigma = dH$ и

$$\int_{\mathbb{S}} \int_{-\infty}^\infty \left(f_\omega^{(k)}\right)_{\xi_1 \ldots \xi_m} \left(x+t\theta;\ \omega^l, e_{i_1}, \cdots, e_{i_{m-l}}\right) y^{i_1} \cdots y^{i_{m-l}} t\ dt d\sigma =$$

$$\int_{H_{\omega,p}} \left(f_\omega^{(k)}\right)_{\xi_1 \ldots \xi_m} \left(x+t\theta;\ \omega^l, e_{i_1}, \cdots, e_{i_{m-l}}\right) y^{i_1} \cdots y^{i_{m-l}} dH.$$

В результате получим

$$\int_{\mathbb{S}} \partial_\omega^{m+1} h_{\xi_1 \ldots \xi_m} (x; \theta)\, d\sigma =$$

$$\int_{H_{\omega,p}} \left(f_\omega^{(m+1)}\right)_{\xi_1 \ldots \xi_m} (x+t\theta; e_{i_1}, \cdots, e_{i_m})\, y^{i_1} \cdots y^{i_m} dH$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\alpha_{m+1}^{l}\int_{H_{\omega,p}}\left(f_{\omega}^{(m+1-l)}\right)_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(x+t\theta;\ \omega^{l},e_{i_1},\cdots,e_{i_{m-l}}\right)y^{i_1}\cdots y^{i_{m-l}}dH.$$

Интегрированием по частям во всех слагаемых перебросим производные по направлениям $\xi_1,\ldots,\xi_m$ с функции f на другие сомножители. Все интегралы во второй сумме обратятся в нуль, поскольку $\partial_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(y^{i_1}\cdots y^{i_k}\right)=0$ при $k<m$ для всех $i_1,\cdots,i_k$, равных 1 или 2.

Интегрирование по частям по направлению вектора ξ_1 в первом слагаемом даст интеграл

$$-\int_{H_{\omega,p}}\left[\left(f_{\omega}^{(m+1)}\right)_{\xi_2\ldots\xi_m}\left(x+t\theta;\partial_{\xi_1}\left(y^{i_1}\right)e_{i_1},\cdots,e_{i_m}\right)y^{i_2}\cdots y^{i_m}+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(f_{\omega}^{(m+1)}\right)_{\xi_2\ldots\xi_m}\left(x+t\theta;e_{i_1},\cdots,\partial_{\xi_1}\left(y^{i_m}\right)e_{i_m}\right)y^{i_1}\cdots y^{i_{m-1}}dH\right]=$$

$$-\int_{H_{\omega,p}}\left[\left(f_{\omega}^{(m+1)}\right)_{\xi_2\ldots\xi_m}\left(x+t\theta;\xi_1,\cdots,e_{i_m}\right)y^{i_2}\cdots y^{i_m}+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(f_{\omega}^{(m+1)}\right)_{\xi_2\ldots\xi_m}\left(x+t\theta;e_{i_1},\cdots,\xi_1\right)y^{i_1}\cdots y^{i_{m-1}}dH\right]$$

$$=-m\int_{H_{\omega,p}}\left(f_{\omega}^{(m+1)}\right)_{\xi_2\ldots\xi_m}\left(x+t\theta;\xi_1,\cdots,e_{i_m}\right)y^{i_2}\cdots y^{i_m}dH.$$

Аналогично, интегрируя по частям по направлению вектора ξ_2, получим

$$m\left(m-1\right)\int_{H_{\omega,p}}\left(f_{\omega}^{(m+1)}\right)_{\xi_3\ldots\xi_m}\left(x+t\theta;\xi_1,\xi_2,\cdots,e_{i_m}\right)y^{i_3}\cdots y^{i_m}dH.$$

Продолжая процесс интегрирования, получим формулу (1.4).

Лемма 4. *Пусть $f\in\mathfrak{S}\left(S^m\right)$, $H=H_{\omega,p}$ – произвольная плоскость. Тогда для любой точки $x\in H_{\omega,p}$ и любых векторов $\xi_1,\ldots,\xi_m\perp\omega$ имеет место формула*

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_{H}Wf\left(y;\omega,\xi_1,\cdots,\omega,\xi_m\right)dH=\frac{(-1)^m}{2^m\cdot m!}\int_{\mathbb{S}}\partial_{\omega}^{m+1}h_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(x;\theta\right)dS\left(\theta\right). \quad (1.6)$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (1.2) по переменной p и воспользуемся формулой (1.4):

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_{H}Wf\left(y;\omega,\xi_1,\cdots,\omega,\xi_m\right)dH=\frac{1}{2^m}\int_{H}f_{\omega}^{(m+1)}\left(y;\xi_1\ldots\xi_m\right)dH$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^m\cdot m!}\int_{\mathbb{S}}\partial_{\omega}^{m+1}h_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(x;\theta\right)dS\left(\theta\right).$$

Здесь мы воспользовались известным свойством преобразования Радона

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_{H_{\omega,p}} h\left(y\right)dH=\int_{H_{\omega,p}} h_{\omega}\left(y\right)dH.$$

В случае произвольного n формула (1.6) имеет вид:

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial p^{n-2}}\int_{H} Wf\left(y;\omega,\xi_1,\cdots,\omega,\xi_m\right)dH=\frac{(-1)^m}{2^m\cdot m!}\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\partial_{\omega}^{m+n-2}h_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(x;\theta\right)dS\left(\theta\right), \qquad (1.7)$$

где $\mathbb{S}^{n-2}$ – единичная сфера в гиперплоскости $\omega^{\perp}=\{x\in\mathbb{R}^n : x\cdot\omega=0\}$. В случае, когда число $m+n-2$ нечетно, мы получаем аналогичную формулу с функцией $g=If$ вместо h и произвольной полусферой $\mathbb{S}_{+}^{n-2}$ вместо сферы $\mathbb{S}^{n-2}$:

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial p^{n-2}}\int_{H} Wf\left(y;\omega,\xi_1,\cdots,\omega,\xi_m\right)dH=\frac{(-1)^m}{2^m\cdot m!}\int_{\mathbb{S}_{+}^{n-2}}\partial_{\omega}^{m+n-2}g_{\xi_1\ldots\xi_m}\left(x;\theta\right)dS\left(\theta\right).$$

Это следует из соотношения $\partial_{\omega}^{k}h\left(x;\theta\right)+\partial_{\omega}^{k}h\left(x;-\theta\right)=\partial_{\omega}^{k}g\left(x;\theta\right)$, связывающего функции g и h при нечетном k.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3.

Доказательство. Для произвольных векторов $\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_m,\eta_m$ и плоскости $H\in\mathbb{R}^n$ рассмотрим величину

$$I_H\left(\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_m,\eta_m\right)=\frac{\partial^{n-2}}{\partial p^{n-2}}\int_{H} Wf\left(y;\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_m,\eta_m\right)dH\left(y\right). \qquad (1.8)$$

Это – $2m$-линейная функция своих аргументов, симметричная по одноименным переменным (по $\xi_1,\ldots,\xi_m$, а также по $\eta_1,\ldots,\eta_m$) и кососимметричная по разноименным переменным, т.е. меняет знак при перестановке аргументов ξ_i и η_j.

Разложим каждый из векторов ξ_i, η_j в сумму

$$\xi_i=a_i\omega+\xi_i', \quad \eta_j=b_j\omega+\eta_j',$$

где векторы ξ_i' и η_j' ортогональны ω. В силу линейности величина I_H представляется в виде линейной комбинации членов вида $I_H\left(\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_m,\beta_m\right)$, где каждый из аргументов α_i есть либо ω, либо ξ_i', а β_j – либо ω, либо η_j'. Если в какой-либо паре (α_i,β_i) оба аргумента совпадают (равны ω), то член $I_H\left(\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_m,\beta_m\right)$ равен нулю в силу кососимметричности. Если для некоторого i $\alpha_i=\xi_i'$, $\beta_i=\eta_i'$, то интегрирование по частям в интеграле $\int_H Wf\left(y;\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_m,\beta_m\right)dH$ снова приводит к равенству нулю соответствующего члена. Остаются члены, в каждой паре аргументов (α_i,β_i) которых один вектор равен ω, а другой ортогонален ω. Все такие члены с точностью до знака совпадают с интегралом, вычисленным по формуле (1.7), если в ней в качестве точки x взять существующую по условию теоремы общую точку плоскости H и множества Γ

Таким образом, величина (1.8) оказывается вычисленной для всех значений аргументов. Сам оператор Wf может быть теперь восстановлен с помощью формулы обращения преобразования Радона.

Теорема доказана.

Примеры. Предположим, что носитель поля f лежит в единичном шаре в $\mathbb{R}^3$. Свойством, описывающим множество Γ из теоремы 3, обладают следующие множества:

1. Полуокружности взаимно перпендикулярных больших окружностей, лежащие на разных полусферах концентрического шара достаточно большого радиуса (большего, чем $\sqrt{2}$).

2. Любые три прямые, проходящие через центр единичного шара с линейно независимыми направляющими векторами (например, взаимно перпендикулярные).

Восстановление соленоидальной части $f^{(s)}$ по построенному полю Wf мы проведем по схеме, предложенной в работе [1]. С этой целью определим дивергенцию по четным индексам:

$$\delta_l : C^\infty \left(S^{k-1} \bigotimes^s S^{m-k+1} \left(\bigwedge^2 (T^*\mathbb{R}) \right) \right) \longrightarrow C^\infty \left(S^k \bigotimes^s S^{m-k} \left(\bigwedge^2 (T^*\mathbb{R}) \right) \right),$$

$$(\delta_l f)_{i_1 \ldots i_k i_{k+1} j_{k+1} \ldots i_m j_m}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} f_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k j_k \ldots i_m j_m}(x).$$

Оператор δ_l является формально двойственным к $-\alpha(i_k, j_k)\,\partial/\left(\partial x^{j_k}\right)$, $k = 1, \ldots, m$, а δ_l^m – двойственным к оператору $(-1)^m W$.

Теорема 4. *[1]. Для любого поля $f \in \mathfrak{S}(S^m)$ справедливо соотношение*

$$\Delta^m f^{(s)} = 2^m \delta_l^m W f,$$

где $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}$ – оператор Лапласа.

Остается заметить, что в пространстве быстро убывающих функций уравнение Пуассона имеет единственное решение.

Замечание 1. Требование бесконечной дифференцируемости поля f можно ослабить, предположив существование непрерывных производных до порядка $n + 2m - 2$, а ее поведение на бесконечности можно уточнить так: функция f и все ее производные до порядка $n + m - 2$ убывают быстрее, чем $\frac{1}{|x|^n}$.

2. Обращение по данным на комплексе прямых, пересекающих бесконечно удаленную кривую

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathfrak{S}(S^m)$, $\Gamma \subset \mathbb{S}^{n-1}$ – множество направлений, обладающее свойством: для любой гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, пересекающей носитель поля f, существует хотя бы одно направление $\theta \in \Gamma$, параллельное H. Тогда поле Wf может быть восстановлено по заданной функции $g(x, \theta)$ и ее первым производным для прямых $l = l(x, \theta)$, где $\theta \in \Gamma$.*

Доказательство. Возьмем произвольную гиперплоскость $H = H_{\omega,p}$ и зафиксируем вектор $\theta \in \Gamma$, параллельный H. В этой гиперплоскости рассмотрим семейство прямых, параллельных θ. Как следует из доказательства теоремы 3, достаточно доказать, что величину

$$J_H\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\right) = \int_H Wf\left(y; \omega, \xi_1, \ldots, \omega, \xi_m\right) dy$$

можно вычислить для всех векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \omega^{\perp}$ по известным интегралам f вдоль прямых этого семейства.

Рассмотрим сначала случай, когда все векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ совпадают с ω. По лемме 1 и теореме Фубини

$$\int_{\theta^{\perp}\cap H} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g\left(x + s\omega, \theta\right)\big|_{s=0} dx = \int_H f_{\omega}^{(m)}\left(y; \theta^m\right) dH = 2^m \int_H Wf\left(y; \omega, \theta, \ldots, \omega, \theta\right) dH,$$

откуда следует равенство

$$J_H\left(\theta^m\right) = \frac{1}{2^m} \int_{\theta^{\perp}\cap H} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g\left(x + s\omega, \theta\right)\big|_{s=0} dx. \tag{2.1}$$

Предположим теперь, некоторые k векторов системы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, скажем $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, ортогональны θ, а остальные – совпадают с θ. Найдем производные

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \cdots \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g\left(x + s\omega, \theta + q^1\xi_1 + \cdots + q^k\xi_k\right)\Big|_{\substack{s=0\\ q^1=\cdots=q^k=0}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{\omega}^{(m)}\right)_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k} \left(x + t\theta; \theta^m\right) t^k dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}^{(m)} \left(x + t\theta; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k,\ \theta^{m-k}\right) dt.$$

В гиперплоскости $\omega^{\perp}$ выберем ортонормированный базис $e_1,\ e_2, \ldots, e_{n-1}$, где $e_1 = \theta$, а $e_2, \ldots, e_{n-1} \perp \theta$. Тогда любой вектор $y = x + t\theta \in H$ имеет однозначное разложение по этому базису: $y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \cdots + y^{n-1} e_{n-1}$, где $y^1 = (y, \theta) = (x + t\theta, \theta) = t$. Проинтегрируем последнее равенство вдоль $(n-2)$-мерной плоскости $\theta^{\perp} \cap H$, ортогональному прямым нашего семейства:

$$\int_{\theta^{\perp}\cap H} \frac{\partial}{\partial q^1} \cdots \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g\left(x + s\omega, \theta + q^1\xi_1 + \cdots + q^k\xi_k\right)\Big|_{\substack{s=0\\ q^1=\cdots=q^k=0}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{\omega}^{(m)}\right)_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k} \left(x + t\theta; e_1^m\right) y_1^m dH$$

$$+ 2^m \int_H Wf\left(y; \omega, \xi_1, \ldots, \omega, \xi_k,\ \omega, \theta, \ldots, \omega, \theta\right) dH.$$

Первый интеграл в правой части обращается в нуль после интегрирования по частям, поскольку $\partial_{\xi_1}\left(y_1^m\right) = 0$ в силу того, что первая координата вектора ξ_1 в базисе $e_1,\ e_2, \ldots, e_{n-1}$ равна нулю.

Таким образом, нами доказана формула

$$J_H\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k,\theta^{m-k}\right)=\int_H Wf\left(y;\omega,\xi_1,\ldots,\omega,\xi_k,\ \omega,\theta,\ldots,\omega,\theta\right)dH$$

$$=\frac{1}{2^m}\int_{\theta^\perp\cap H}\frac{\partial}{\partial q^1}\cdots\frac{\partial}{\partial q^k}\frac{\partial^m}{\partial s^m}\,g\left(x+s\omega,\theta+q^1\xi_1+\cdots+q^k\xi_k\right)\Big|_{\substack{s=0\\ q^1=\cdots=q^k=0}}dx. \tag{2.2}$$

Вычислим теперь значение функции $J_H\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m\right)$ для любых аргументов $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m\in\mathbb{R}^n$. Каждый вектор однозначно разлагается в сумму

$$\xi_i=a_i\theta+\xi_i',$$

где $\xi_i'\in\theta^\perp$, и симметричная линейная функция J_H представляется в виде линейной комбинации членов вида $J_H\left(\xi_1',\xi_2',\ldots,\xi_k',\theta^{m-k}\right)$, которые для любого индекса $k=0$ или $1\leqslant k\leqslant m$ можно вычислить по формулам (2.1) или (2.2).

Теорема доказана.

Пример. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ роль множества Γ играет любая большая окружность единичной сферы (бесконечно удаленная прямая).

Следствие 1. *Пусть $H\subset\mathbb{R}^3$ – произвольная плоскость, Σ_H – комплекс прямых, параллельных H. Соленоидальная часть поля $f\in\mathfrak{S}\left(S^m\right)$ для любого $m\geqslant 1$ может быть восстановлена по заданной функции $g\left(x,\theta\right)$ и ее первым производным для прямых $l\in\Sigma_H$.*

Для доказательства достаточно в качестве множества Γ в теореме 5 взять большую окружность единичной сферы, параллельную H.

Замечание 2. Напомним, что в работе В. Шарафутдинова ([3]) для обращения лучевого преобразования векторного поля ($m=1$) требуется задание функции g на комплексе $\Sigma_{H_1}\cup\Sigma_{H_2}$, где H_1, H_2 – пересекающиеся плоскости, а в случае $m=2$ наименьшим является комплекс прямых $\Sigma_{H_1}\cup\Sigma_{H_2}\cup\Sigma_{H_3}$, где H_1, H_2, H_3 – плоскости с линейно независимыми нормальными векторами.

3. Восстановление дифференциальных форм степени 2

Пусть $f=\sum f_{i_1,\ldots,i_k}\left(x\right)dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}$ – дифференциальная форма степени k в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, где $1\leqslant k\leqslant n$; $f_{i_1,\ldots,i_k}\left(x\right)$ – кососимметричная по индексам $i_1,\ldots,i_k$ функция. Значение f на векторах $\theta_1,\ldots,\theta_k\in\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$f\left(x;\theta_1,\ldots,\theta_k\right)=\frac{1}{k!}\sum_{i_1<\cdots<i_k}f_{i_1,\ldots,i_k}\sum_{\pi\in\Pi_k}\left(-1\right)^{|\pi\ |}\theta_{i_{\pi(1)}}\cdot\cdots\cdot\theta_{i_{\pi(k)}},$$

где Π_k – группа перестановок индексов $i_1,\ldots,i_k$, во внутренней сумме производится альтернирование по этим индексам, $|\pi\ |$ – четность перестановки. Преобразованием Радона формы f называется функция

$$g\,(A) = \int_A f,$$

определенная на многообразии k-мерных аффинных подпространств в $\mathbb{R}^n$. В этом пункте мы будем рассматривать дифференциальные формы степени 2.

По интегралам $g\,(A)$ 2-форму f можно восстановить однозначно с точностью до слагаемого, являющегося точной формой, поэтому ставится задача определения внешнего дифференциала $df = \sum df_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j$ по заданным интегралам $g\,(A)$ для двумерных плоскостей $A \subset \mathbb{R}^n$.

Если обозначить через $A^2\,(\mathbb{R}^n)$ многообразие двумерных аффинных подпространств в $\mathbb{R}^n$, то $dimA^2\,(\mathbb{R}^n)\; = 3n-6$, и задача обращения является переопределенной по размерности при $n \geqslant 4$. Как и в случае лучевого преобразования тензорных полей возникает задача нахождения таких n-мерных подмногообразий, что известных значений интегралов от формы f на этих подмногообразиях достаточно, чтобы определить df. В качестве такого подмногообразия мы рассматриваем аналог семейства прямых из п. 2, т. е. семейство двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, каждая из которых параллельна паре векторов из множества $\Gamma \subset \mathbb{S}^{n-1}$, где Γ обладает некоторым свойством полноты. Аналог многообразия прямых из п. 1 рассмотрен в работе [5]. Роль множества Γ играет множество прямых в пространстве $\mathbb{R}^n$. Даны лишь интегралы по плоскостям, проходящим через прямые множества Γ, а само множество Γ обладает следующим свойством: любая гиперплоскость, проходящая через носитель формы f, содержит, по крайней мере, $n-2$ прямые из Γ с линейно независимыми направляющими векторами.

Мы вычисляем покомпонентное преобразование Радона формы df, т.е. интегралы по $(n-1)$-мерным гиперплоскостям, с тем, чтобы потом воспользоваться формулой обращения. Напомним, прежде всего, что всякую двумерную плоскость A можно задать точкой x и парой неколлинеарных векторов η и θ, а интегралы $g\,(A)$ рассматривать как функцию

$$g\,(x;\eta,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\,(x+s\eta+t\theta;\eta,\theta)\,dsdt,$$

определенную на множестве $\mathbb{R}^n \times \wedge^2\mathbb{S}^{n-1}$.

Теорема 6. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{S}^{n-1}$, $n \geqslant 4$, – множество направлений, обладающее свойством: для любой гиперплоскости $H_{p,\omega}$ в $\mathbb{R}^n$, пересекающей носитель f, существуют $n-2$ линейно независимых направления $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-2} \in \Gamma$, параллельные $H_{p,\omega}$. Тогда для любой 2-формы f, внешний дифференциал df может быть восстановлен по заданным первым производным функции g, вычисленным по двумерным плоскостям, каждая из которых параллельна паре линейно независимых векторов $\eta, \theta \in \Gamma$.*

Доказательству предпошлем несколько лемм. Пусть $H = H_{\omega,p}$ – произвольная гиперплоскость. Рассмотрим величину $I_H\,(\lambda,\xi,\eta) = \int_H df\,(y;\lambda,\xi,\eta)$. Как и в предыдущих пунктах, будем доказывать, что в условиях теоремы эта величина определена для всех значений своих аргументов $\lambda, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Обозначим семейство двумерных плоскостей из условия теоремы через $A^2(\Gamma)$.

Лемма 5. *Пусть* $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \Gamma$. *Тогда*

$$I_H(\lambda_1,\ \lambda_2,\omega) = \int_{\{\lambda_1,\ \lambda_2\}^{\perp}\cap H} \frac{\partial}{\partial s} g(x+s\omega;\lambda_1,\ \lambda_2)|_{s=0} dx, \tag{3.1}$$

где $\{\lambda_1,\ \lambda_2\}^{\perp}$ – $(n-2)$*-мерное подпространство векторов, перпендикулярных векторам* $\lambda_1,\ \lambda_2$.

Доказательство сразу следует из теоремы Фубини, если воспользоваться формулой $\int_H f_\omega(y;\lambda,\xi)\,dH = \int_H df(y;\lambda,\xi,\omega)\,dH$.

Зафиксируем $\lambda\in\Gamma$ и рассмотрим произвольный вектор $\xi\in\mathbb{R}^n$. Если ξ параллелен какой-нибудь плоскости нашего семейства $A^2(\Gamma)$, параллельной λ, то в силу линейности функции $df(y;\lambda,\xi,\omega)$ по третьей переменной и кососимметричности по аргументам λ,ξ интеграл от формы df сводится к вычислению величины вида (3.1).

Лемма 6. *Пусть* $\lambda,\ \theta\in\Gamma$, $\xi\in\{\lambda,\ \theta,\omega\}^{\perp}$. *Тогда*

$$I_H(\lambda,\ \xi,\omega) = \int_{\{\lambda,\ \theta\}^{\perp}\cap H} \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial q} g(x+r\omega;\lambda,\theta+q\xi)|_{r=q=0} dx. \tag{3.2}$$

Доказательство. Рассмотрим производные функции g:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial q} g(x+r\omega;\lambda,\theta+q\xi)|_{r=q=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (f_\omega)_\xi(x+s\lambda+t\theta;\lambda,\theta)\,tdsdt$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(x+\lambda s+t\theta;\lambda,\xi)\,dsdt. \tag{3.3}$$

Выберем в подпространстве $\omega^{\perp}$ ортонормированный базис $e_1,\ e_2,\dots,e_{n-1}$, в котором $e_1=\theta$, а $e_2\in\mathrm{Lin}\{\lambda,\ \theta\}$, где $\mathrm{Lin}\{\lambda,\ \theta\}\ \in A^2(\Gamma)$ – линейная оболочка векторов $\lambda,\ \theta$. Пусть $\lambda=\sigma^1e_1+\sigma^2e_2$, $o^2\neq 0$. Произвольный вектор $y=x+\lambda s+t\theta\in H$ можно однозначно разложить по этому базису: $y=y^1e_1+y^2e_2+\dots+y^{n-1}e_{n-1}$. Имеем $y^1=(y,e_1)=\sigma^1s+t$, $y^2=(y,e_2)=s\sigma^2$, откуда находим $t=y^1-\frac{\sigma^1}{\sigma^2}y^2$. Проинтегрируем обе части равенства (3.3) вдоль $(n-2)$-мерного аффинного подпространства $\{\lambda,\theta\}^{\perp}\cap H$:

$$\int_{\{\lambda,\theta\}^{\perp}\cap H}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial q} g(x+r\omega;\lambda,\theta+q\xi)|_{r=q=0}dx = \int_H (f_\omega)_\xi(y;e_2,e_1)\left(\sigma^2y^1-\sigma^1y^2\right)dH$$
$$+\int_H f_\omega(y;\lambda,\xi)\,dH.$$

В первом интеграле в правой части произведем интегрирование по частям в направлении вектора ξ. В результате он обратится в нуль, поскольку $\partial_\xi\left(\sigma^2y^1-\sigma^1y^2\right)=0$, и мы получаем формулу (3.2).

Далее будем рассуждать по схеме, предложенной в работе [2]. Следствием формул (3.1), (3.2) является следующая

Лемма 7. *Пусть $\lambda \in \Gamma$, $\lambda \perp \omega$. Тогда для любых векторов η, $\xi \in \mathbb{R}^n$ величина $I_H(\lambda,\ \eta,\ \xi)$ может быть вычислена по заданным функции и ее первым производным, определенным на плоскостях семейства $A^2(\Gamma)$.*

Доказательство. Пусть η и ξ параллельны H. Проинтегрировав равенство

$$df(y;\lambda,\eta,\xi) = f_\lambda(y;\eta,\xi) - f_\eta(y;\lambda,\xi) + f_\xi(y;\lambda,\eta)$$

вдоль гиперплоскости H и совершив интегрирования по частям в полученных интегралах, можно убедиться в том, что $I_H(\lambda,\ \eta,\ \xi) = 0$.

Предположим, что один из векторов, скажем ξ, не параллелен H. Тогда вектор $\eta' = \eta - c\xi$ будет параллелен H при $c = \frac{(\eta,\omega)}{(\xi,\omega)}$ и $df(y;\lambda,\eta,\ \xi) = df(y;\lambda,\eta',\xi)$. Пусть ξ' – ортогональная проекция вектора ξ на направление вектора ω, а η'' – проекция η' на подпространство $\lambda^\perp$. Тогда $I_H(\lambda,\eta,\xi) = I_H(\lambda,\eta'',\xi')$, а последняя величина вычисляется по формуле (3.2).

Перейдем к доказательству самой теоремы 6.

Доказательство. В условиях теоремы лемма 7 позволяет вычислить величины $I_H(\lambda_k,\eta,\xi)$, $k = 1,2,\ldots,n-2$, для любой гиперплоскости H и некоторых линейно независимых векторов $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_{n-2}$, параллельных H. Остается доказать, что величину $I_H(\theta,\eta,\xi)$ можно вычислить для любой тройки векторов $\theta,\eta,\xi \in \mathbb{R}^n$. Если все три вектора параллельны H, то $I_H(\theta,\eta,\xi) = 0$. Предположим, что один из векторов, скажем, ξ, не параллелен H. Тогда найдутся числа a и b такие, что векторы $\theta' = \theta - a\xi$ и $\eta' = \eta - b\xi$ будут параллельны H, и тогда $I_H(\theta,\eta,\xi) = I_H(\theta',\eta',\xi)$.

Если один из векторов θ' и η', скажем, θ', принадлежит линейной оболочке $Lin\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-2}\}$, т.е. $\theta' = \sum_{i=1}^{n-2} c_i\lambda_i$, то справедливо равенство

$$I_H(\theta',\eta',\xi) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i I_H(\lambda_i,\eta',\xi),$$

в правой части которого все слагаемые известны в силу леммы 7. В противном случае существует такое $d \in \mathbb{R}$, что вектор $\eta'' = \eta' - d\theta'$ принадлежит $\mathrm{Lin}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-2}\}$, и мы имеем равенство $I_H(\theta',\eta',\xi) = -I_H(\eta'',\theta',\xi)$, в котором правая часть снова известна в силу леммы 7.

Теорема доказана.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^4$ примером множества Γ из теоремы 6 служит множество радиус-векторов точек двух пересекающихся больших окружностей единичной сферы $\mathbb{S}^3$.

Список литературы

[1] Denisjuk A. Inversion of the X-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve // Inverse problems. 2006. Vol. 22. P. 399–411.

[2] Palamodov V. P. Reconstruction of a differential form from Doppler transform // SIAM J. Math. Anal. 2009. N 41. P. 1713–1720.

[3] Sharafutdinov V.A. Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data // Inverse problems. 2007. N 23. P. 2603–2627.

[4] Vertgeim L.B. Integral geometry problems for symmetric tensor fields with incomplete data. 2000. J. Inverse III-Posed Probl. Vol. 8(3). P. 355–364.

[5] Sharafutdinov V.A. Integral Geometry of Tensor Fields. 1994. (Utrech: VSP).

[6] Grangeat P. Mathematical framework of cone-beam 3D-reconstruction via the first derivative of the Radon transform // Lecture Notes in Math. 1990. Vol. 1497. P. 66–97.

[7] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир. 1990.

[8] Меджидов З.Г. Восстановление векторного поля по данным его лучевого преобразования на трехмерных многообразиях прямых. Вестник ДГУ. Вып 6. 2012. С. 159–166.

З. Г. Меджидов (Z. G. Medzhidov)
Дагестанский научный центр РАН
E-mail: Z.Medjidov@mail.ru

Поступила в редакцию
25.10.2013