

УДК 519.6+532.5

М. Г. Алишаев

Точные решения ламинарного движения вязкой жидкости по прямолинейным трубам некруглых сечений

Приводятся новые точные решения для распределения скорости жидкости в трубах, поперечное сечение которых представляют собой эпитрохоиду или эпициклоиду. С небольшими изменениями решение преобразуется на случаи гипотрохоиды или гипоциклоиды. Доказывается теорема о точном решении в открытой области для острого угла и отмечается парадокс прямого угла. Предлагается приближенное решение для расхода равностороннего криволинейного двуугольника. Обсуждается использование метода разделения переменных и полученное новое решение для сечения в виде сектора круга.

Библиография: 6 названий.

New exact solutions for the distribution of fluid's velocity in the pipe cross section of which is either epitrochoid or epicycloid. With minor changes the solution can be applied to hypotrochoid and hypocycloid cases. A theorem on the exact solution in an open area is proven for an acute angle, and the paradox of a right angle is noted. The approximate solution is proposed for the flow of an equilateral curvilinear lune. The use of the method of variables separation and the obtained new solution for the cross section in the form of circle sector are discussed.

Bibliography: 6 items.

Ключевые слова: ламинарное движение, конформное отображение, эпитрохоида, эпициклоида.

Keywords: laminar flow, conformal mapping, epitrochoid, epicycloid.

1. Постановка задачи

Полагаем жидкость несжимаемой, течение прямолинейное по направлению оси Oz . В общем случае трехмерного нестационарного движения уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \cdot \Delta \vec{v}, \quad \text{div}(\vec{v}) = 0. \quad (1.1)$$

Для стационарного движения по прямолинейной трубе, когда направление скорости совпадает с направлением трубы, остается одна скалярная составляющая скорости $u = u(x, y)$. Поле силы тяжести игнорируем, массовые силы отсутствуют, $F = 0$. Для скорости, которая сохраняет своё распределение $u(x, y)$ по

сечению вдоль всей оси трубы, имеем

$$\Delta u = -\frac{G}{\mu}, \quad G = -\frac{\partial p}{\partial z} = \text{Const} > 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.2)$$

Вязкость μ принимается постоянной величиной, давление p зависит только от координаты z . Из (1.2) ясно, что градиент давления должен быть постоянным. Вязкая жидкость прилипает к стенке трубы, на внутренней поверхности трубы скорость равна нулю. Уравнение (1.2) должно удовлетворяться для всех внутренних точек трубы, рассматриваемой как область решения.

Таким образом, задача о движении вязкой несжимаемой жидкости по трубе сводится к решению уравнения Пуассона с постоянной правой частью.

Указанная задача решалась многократно и разными авторами. Наиболее полное изложение дано в монографиях [1-4]. Широко известными решениями являются определение скорости и расхода для круглой трубы и трубы с эллиптическим поперечным сечением. Для круга, очевидно, скорость и расход можно выразить в осесимметричном виде

$$u(x, y) = \frac{G}{4\mu} (R^2 - x^2 - y^2), \quad Q = \iint_{\Omega} u(x, y) dx dy = \frac{\pi R^4 G}{8 \mu}. \quad (1.3)$$

Для эллиптического сечения с полуосями a и b решение пишется аналогично

$$u(x, y) = \frac{G}{2\mu} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad Q = \iint_{\Omega} u(x, y) dx dy = \frac{\pi a^3 b^3}{4(a^2 + b^2)} \cdot \frac{G}{\mu}. \quad (1.4)$$

Сен-Венан получил решение для трубы с сечением в виде равностороннего треугольника (1853). Скорость в точке представляется в виде произведения трех расстояний от точки (x, y) до сторон треугольника, с множителем, зависящим от градиента давления

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{3}G}{6\mu a} \left(y + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) \left(y + \sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) \left(y - \sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right). \quad (1.5)$$

Здесь a – сторона равностороннего треугольника, начало координат выбрано в его центре, вершины. Вершины расположены в точках $\left(0, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$. Интегрированием по площади получаем для расхода выражение

$$Q = \frac{\sqrt{3}a^4 G}{320\mu} = \frac{\pi R_M^4 G}{8\mu}, \quad R_s = 0.3426a. \quad (1.6)$$

Существуют случаи, когда возможно точное аналитическое решение в элементарных функциях или в рядах Фурье. Для односвязной области в случае прямоугольного сечения решение можно представить в виде быстро сходящегося ряда [2]. Проблема решения уравнения Пуассона для многомерных задач хорошо изучена для областей в виде многомерного шара [5,6]. Цель этой работы – указать неизвестные или не вошедшие в руководства новые решения для не шаровых односвязных областей. Используются известные, в общем-то, методы, но найдены новые интересные случаи точных решений.

2. Метод конформных отображений

Хорошо известно, что при конформных отображениях уравнение Лапласа сохраняется, оно и в новых переменных переходит в уравнение Лапласа. Уравнение (1.2) содержит оператор Лапласа в левой части, а в правой части имеет константу вместо нуля. Введем плоскость вспомогательной комплексной переменной, $z = x + ih$, которая связана с физической плоскостью $z = x + iy$ однозначным аналитическим соответствием. Уравнение (1.2) в новых переменных примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{G}{\mu} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2. \quad (2.1)$$

Условие на границе при этом не меняется, $u = 0$. Метод решения состоит в том, что отыскивается такое преобразование, для которого правая часть достаточно проста, чтобы «увидеть» ожидаемое решение. Структуру решения проще увидеть в полярной системе координат для вспомогательной плоскости

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{G}{\mu} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2, \quad \zeta = \rho \cdot e^{i\theta}. \quad (2.2)$$

После того, как определена скорость, возникает вопрос определения расхода. Нередко расход проще, оказывается, вычислить во вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. При этом Вронскиан выражается как квадрат модуля производной

$$Wr = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2. \quad (2.3)$$

Определение расхода по трубе сводится к вычислению двойного интеграла

$$Q = \iint_{\Omega} u(x, y) dx dy = \iint_{\omega} u(\xi, \eta) \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 d\xi d\eta = \iint_{\omega} u(\rho, \theta) Wr(\rho, \theta) d\rho d\theta. \quad (2.4)$$

3. Конформное отображение для эпитрохоиды

Введем конформное преобразование, которое отображает односвязную область, ограниченную эпитрохойдой (в частности и эпициклоидой при $\varepsilon = 1$) в круг единичного радиуса. Такое преобразование определяется аналитической функцией

$$z(\zeta) = a \left(\zeta + \frac{\varepsilon}{n} \zeta^n \right), \quad a = R + r, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad n = \frac{R}{r} + 1 = 2, 3, 4, \dots \quad (3.1)$$

Эпитрохоида представляет собой траекторию фиксированной точки подвижного колеса радиуса r , когда оно вращается по неподвижному колесу радиуса R . Она будет замкнутой линией лишь в том случае, когда $\frac{R}{r} = (n-1)$, т.е. целому положительному числу. Траекторию описывает точка подвижного колеса, отстоящая от центра на εr . При $\varepsilon < 1$ и $n = 2, 3, \dots$ траектории точки – замкнутые линии с одним, двумя и т.д. циклами. При $\varepsilon > 1$ эпитрохоида имеет точки самопересечения. При $\varepsilon = 1$ точка находится на ободе подвижного колеса, и её траектория есть эпициклоида.

Сравним (3.1) с уравнением эпитрохоиды, получение которого общеизвестно. Уравнение эпитрохоиды в параметрическом виде есть

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= (R+r) \left[\cos \varphi + \frac{\varepsilon r}{R+r} \cos \left(\frac{R+r}{r} \varphi \right) \right] = a \left(\cos \varphi + \frac{\varepsilon}{n} \cos(n\varphi) \right) \\ y(\varphi) &= (R+r) \left[\sin \varphi + \frac{\varepsilon r}{R+r} \sin \left(\frac{R+r}{r} \varphi \right) \right] = a \left(\sin \varphi + \frac{\varepsilon}{n} \sin(n\varphi) \right) \\ x(\varphi) + iy(\varphi) &= a \left(e^{i\varphi} + \frac{\varepsilon}{n} e^{in\varphi} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из сравнения видим, что эпитрохоида соответствует границе $\rho = 1$. Внутренней области эпитрохоиды соответствует внутренность круга радиуса 1.

4. Уравнение для искомой функции на вспомогательной плоскости

Применим к уравнению (2.2) преобразование (3.1). В полярных координатах имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{a^2 G}{\mu} \{1 + 2\varepsilon \rho^{n-1} \cos(n-1)\theta + \varepsilon^2 \rho^{2n-2}\}. \quad (4.1)$$

Точное решение несложно подобрать. Приведённое однородное уравнение допускает частные решения в виде степеней ρ , частные решения для степеней и гармонической составляющей тоже подбираем. Постоянную интегрирования выбираем так, чтобы на границе при $\rho = 1$ скорость обращалась в нуль. Точное решение (4.1) представляется в виде

$$u(\rho, \theta) = \frac{a^2 G}{4\mu} \left\{ 1 - \rho^2 + \frac{\varepsilon^2}{n^2} (1 - \rho^{2n}) - \frac{2\varepsilon}{n} (\rho^{n+1} - \rho^{n-1}) \cos(n-1)\theta \right\}. \quad (4.2)$$

Видно, что при $\varepsilon = 0$ решение совпадает с решением для круглой трубы. При $\rho = 1$ скорость обращается в нуль. Интегрированием в соответствии с формулой (2.4) удалось получить выражения для расхода по трубе-эпитрохоиде при ламинарном течении

$$Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu} \left(1 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2} + \frac{\varepsilon^4}{n^3} \right), \quad a = R + r, \quad n = \frac{R}{r} + 1. \quad (4.3)$$

В случае контура трубы в виде эпициклоиды $\varepsilon = 1$. Формулу удобнее писать в виде

$$Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu} \left(1 + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right), \quad a = R + r. \quad (4.4)$$

Сравним (4.4) с формулой Пуазейля для радиуса трубы, равного a . Множителем оказывается скобка, которая чуть больше чем 1. Например, для $n = 2; 3; 4; 5$ и 10 этот множитель составляет соответственно 2.12; 1.48; 1.26; 1.17 и 1.041. С увеличением n расход приближается к расходу по трубе круглого сечения радиуса $a = R + r$.

Такого же рода решение нами получено и для трубы, сечение которого является гипотрохойдой, или, в частности при $\varepsilon = 1$, гипоциклоидой.

Решения для гипотрохойд получаются аналогично эпитрохоидам при $r < 0$ и $n = \frac{R+r}{r} < 0$. Конформное преобразование имеет вид

$$z = a \left(\zeta - \frac{\varepsilon}{n\zeta^n} \right), \quad n = \frac{R-r}{r}. \quad (4.5)$$

Применим к уравнению (2.2) преобразование (4.5). В полярных координатах имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{a^2 G}{\mu} \{1 + 2\varepsilon \rho^{-n-1} \cos(n+1)\theta + \varepsilon^2 \rho^{-2n-2}\}. \quad (4.6)$$

Точное решение можно и здесь подобрать. Приведённое однородное уравнение допускает частные решения в виде степеней ρ , частные решения для степеней и гармонической составляющей тоже нетрудно подобрать. Постоянную интегрирования выбираем так, чтобы на границе при $\rho = 1$ скорость обращалась в нуль. Точное решение представляется в виде

$$u(\rho, \theta) = \frac{a^2 G}{4\mu} \left\{ 1 - \rho^2 + \frac{\varepsilon^2}{n^2} (1 - \rho^{-2n}) - \frac{2\varepsilon}{n} (\rho^{-n+1} - \rho^{-n-1}) \cos(n+1)\theta \right\}. \quad (4.7)$$

Выкладки проходят и для расхода по трубе с сечением-гипотрохойдой

$$Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu} \left(1 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2} - \frac{\varepsilon^4}{n^3} \right), \quad a = R - r, \quad n = \frac{R}{r} - 1. \quad (4.8)$$

В частности для гипоциклоиды, когда при $\epsilon = 1$, будем иметь

$$Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu} \left(1 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right), \quad a = R - r, \quad n = \frac{R}{r} - 1. \quad (4.9)$$

По сравнению с формулой Пуазейля при радиусе трубы, равном a , в (4.9) появился множитель в скобках, который больше, чем 1. Например, для $n = 2; 3; 4; 5$ и 10 этот множитель составляет соответственно 1.875; 1.407; 1.234; 1.152 и 1.039. С увеличением n расход приближается к расходу по трубе круглого сечения радиуса $a = R - r$.

5. Представление точных решений тригонометрическими суммами

Если отвлечься от граничных условий и рассматривать лишь уравнение (1.2), то его решения в односвязной области могут быть представлены в виде ряда по степеням радиальной координаты r и полярного угла φ . Уравнению (1.2) удовлетворяет ряд

$$u(r, \varphi) = \frac{G}{4\mu} \left[-r^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} r^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \right], \quad (5.1)$$

ибо независимыми решениями уравнения Лапласа являются произведения

$$r^k \cos k\varphi, \quad r^{-k} \cos k\varphi, \quad r^k \sin k\varphi, \quad r^{-k} \sin k\varphi. \quad (5.2)$$

Неизвестные коэффициенты A_k и B_k ряда (5.1) будем подбирать таким образом, чтобы в ряду (5.1) оставалось конечное число членов и на границе области удовлетворялось условие равенства нулю искомой функции. Например, в случае круглой трубы радиуса R достаточно ограничиться нулевым членом ряда и отыскивать решение в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{G}{4\mu} (-r^2 + A_0). \quad (5.3)$$

Здесь начало координат соответствует значению $r = 0$. Потребовав, чтобы было $u(R, \varphi) = 0$, получим хорошо известное параболическое распределение скорости

$$u(r, \varphi) = \frac{G}{4\mu} (R^2 - r^2). \quad (5.4)$$

Приведём ещё один случай. Удержим в ряду (5.1) два коэффициента A_0 и A_2 . Все другие члены выбросим. Каково должно быть сечение трубы или её контур, чтобы на поверхности трубы скорость обращалась в нуль, и течение описывалось суммой

$$u(r, \varphi) = \frac{G}{4\mu} (-r^2 + A_0 + A_2 r^2 \cos 2\varphi). \quad (5.5)$$

Переходя к декартовым координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, легко видеть, что

$$u(x, y) = \frac{GA_0}{4\mu} \left(-\frac{x^2 + y^2}{A_0} + 1 + \frac{A_2}{A_0} (x^2 - y^2) \right) = \frac{GA_0}{4\mu} \left(1 - \frac{x^2}{1-A_2} - \frac{y^2}{1+A_2} \right). \quad (5.6)$$

Полученное решение представляет собой течение по трубе эллиптического сечения при $A_2 < 1$. Сравнение с формулой (1.4) показывает, что для получения эллиптического сечения трубы с полуосями a и b константы надо подобрать в виде

$$A_0 = \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} < 1, \quad A_2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} < 1. \quad (5.7)$$

Из примеров видно, что можно указать, вообще говоря, множество решений для труб разных сечений. Эти решения могут быть получены из (5.1) как для замкнутых

кривых (окружность, эллипс, эпициклоида и т.п.), так и для открытых односвязных областей. В тех случаях, когда контур уходит на бесконечность, о расходе трубы говорить не приходится, он бесконечен. Но такие решения помогают увидеть структуру решения и понять особенности распределения скорости с удалением от границ течения.

6. Течение внутри острого угла

Рассмотрим ламинарное течение внутри угла, образованного двумя прямыми, исходящими из начала координат, $y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha < \pi/4$. Течение происходит под действием постоянного градиента вдоль оси Oz . Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Поле скоростей внутри острого угла пропорционально произведению расстояний от выбранной точки (x, y) до сторон угла. Вдоль биссектрисы угла скорость растёт пропорционально квадрату расстояния от вершины угла.*

Поле скоростей подбираем в виде многочлена второй степени, который разлагается на множители, содержащие просто уравнения прямых – сторон угла

$$u(x, y) = C \cdot (y - x \operatorname{tg} \alpha) \cdot (y + x \operatorname{tg} \alpha) = C (y^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (6.1)$$

Граничные условия здесь уже удовлетворены, на сторонах угла скорость равна нулю. Подставив в (1.2) находим константу интегрирования C

$$C = -\frac{G}{2\mu} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}, \quad u(x, y) = \frac{G}{2\mu \cos 2\alpha} (x^2 \sin^2 \alpha - y^2 \cos^2 \alpha). \quad (6.2)$$

Теперь легко видеть, что при $\alpha \rightarrow \pi/4$ найденный нами коэффициент теряет смысл, он становится бесконечным. Решение в виде (6.2) становится невозможным для употребления. Для $\alpha > \pi/4$ формулировка требует пересмотра, так как появляются точки внутри угла, проекции которых попадают не на стороны угла, а на их продолжение.

Доказательство теоремы очевидно, так как скобка в (6.2) разлагается на 2 множителя, каждый из которых представляет собой расстояние до соответствующей стороны угла: $x \sin \alpha - y \cos \alpha$ есть расстояние до верхней стороны угла; $x \sin \alpha + y \cos \alpha$ есть расстояние до нижней стороны угла.

Для биссектрисы угла при $y = 0$ скорость меняется пропорционально квадрату расстояния от вершины x . Рост скорости происходит тем слабее, чем меньше угол α .

Неясным остается вопрос, можно ли выписать решения для $\alpha = \pi/4$. Для прямого угла можно ограничиться и первой четвертью координатных линий. Решением уравнения (1.2) является просто произведение $u(x, y) = Cxy$, причем для любого значения постоянной, но тогда надо считать градиент давления равным нулю. Получаем парадокс, при нулевом градиенте давления возможно бесконечное множество решений. Автор не может дать трактовку этим решениям. В окрестности прямого угла такого рода явления ещё будут выявлены и показаны ниже при рассмотрении течения по сектору круга.

7. Течение в криволинейном двуугольнике

Рассмотрим ламинарное течение внутри прямолинейной трубы сечением в виде двуугольника, образованного двумя равными дугами окружностей одного и того же радиуса R , центры которых расположены на оси ординат на равных расстояниях $h < R$ от начала координат. Течение происходит внутри двух примкнувшихся сегментов под действием постоянного градиента вдоль оси Oz .

Упоминания об этой задаче автору не удалось обнаружить в литературе, в обобщающих руководствах по гидродинамике о ней нет речи. Трещины в породах подобного типа встречаются, решение могло бы быть использовано при изучении коэффициента фильтрации в трещинных породах. Полезным было бы и её сравнение с течением в эллиптической трубе – насколько закругление концов влияет на расход по трубе.

Границы двуугольника даются уравнениями окружностей $x^2 + (y \pm h)^2 = R^2$. Для точек пересечения при $y = 0$ имеем $x = \pm a = \pm \sqrt{R^2 - h^2}$. В середине двуугольника при $x = 0$ имеем $y = \pm b = \pm (R - h)$. Область, где ищется решение, ограничена условиями $-a \leq x \leq a$, $-\sqrt{R^2 - x^2} + h \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} - h$. Решение следует подобрать так, чтобы удовлетворить уравнению (1.2) и иметь нулевые значения скорости на границе области. Оказалось, что подобрать решение в полярных координатах невозможно, две сочленённые дуги окружностей описываются уравнением четвёртого порядка $r^4 - 2R^2 r^2 + a^4 + 2h^2 r^2 \cos 2\varphi = 0$ и подобрать решение из класса (4.8) невозможно. Применение конформного отображения области решения на угол $-\xi \operatorname{tg} \alpha \leq \eta \leq \xi \operatorname{tg} \alpha$, $\xi > 0$, $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{R-h}{a}$ дробно-линейным преобразованием также к результату не приводит: уравнение во вспомогательных переменных содержит в правой части рациональную функцию 4-ой степени

$$\zeta = \frac{a+z}{a-z}, \quad z = a \frac{1-\zeta}{1+\zeta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{4a^2 G}{\mu [(\xi + 1)^2 + \eta^2]^2}. \quad (7.1)$$

Автору не удалось найти простое аналитическое решение. Но, тем не менее, можно предложить приближение, пригодное в практической работе.

Первый очевидный вариант – считать по вертикальной координате двуугольника профиль скорости параболическим и представить распределение скорости в виде

$$u(x, y) \approx \frac{G}{2\mu} (\delta^2 - y^2), \quad \delta(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - h. \quad (7.2)$$

Приближение (7.2) хорошо известно и часто им пользуются для профилей сечений, мало меняющихся вдоль x . Для малых углов $\alpha < \pi/18$ расход можно считать по формуле

$$Q \approx \frac{GR^4}{6\mu} \left[\sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) - \alpha \cos \alpha \right] \sim \frac{GR^4}{6\mu} \alpha^3. \quad (7.3)$$

Второй, более предпочтительный вариант, состоит в представлении распределения скорости в виде произведения расстояний от точки (x, y) до дуг по нормали к дугам. Второй вариант обладает тем преимуществом, что вблизи углов он совпадает с точным решением. Но ни первый, ни второй вариант не удовлетворяют уравнению (1.2), оператор Лапласа не сохраняет своё значение внутри области. Для второго варианта оператор Лапласа внутри двуугольника остаётся достаточно близким к числу 2. Распределение скорости по двуугольнику представляем в виде

$$u(x, y) = C \left[R - \sqrt{x^2 + (y+h)^2} \right] \cdot \left[R - \sqrt{x^2 + (y-h)^2} \right], \quad C = \frac{G}{2\mu}. \quad (7.4)$$

Оператор Лапласа для этой функции находим элементарными выкладками

$$\Delta u = -\frac{G}{\mu} \cdot \left(\frac{\rho_1 + \rho_2 + 4 \cos^2 \alpha}{2\rho_1 \rho_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right), \quad \rho_{1,2} = \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + (y \pm h)^2}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{R}. \quad (7.5)$$

При малых α косинус угла и значения $\rho_{1,2}$ близки к 1, оператор Лапласа Δu близок к значению $-G/\mu$, уравнение задачи (1.2) «почти» удовлетворено, особенно для очень малых углов α . Расчеты, проведённые для оператора Лапласа, показали, что значения круглой скобки располагаются в пределах от 0.88 (вблизи углов) до 1.05

(в центральной части). Значение расхода с учётом симметрии можно представить в виде кратного интеграла

$$Q = \frac{2GR^4}{\mu} \int_0^{\sin \alpha} d\xi \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}-\cos \alpha} (1-\rho_1)(1-\rho_2) d\eta = \frac{2GR^4}{\mu} \bar{Q}(\alpha), \quad (7.6)$$

$$\rho_{1,2} = \sqrt{\xi^2 + (\eta \pm \cos \alpha)^2}, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Кратный интеграл (без множителя перед интегралом) может быть непосредственно вычислен с помощью пакета Mathcad. Его значения зависят лишь от одного параметра α . График этой функции $\bar{Q}(\alpha)$ представлен на рис. 1 в логарифмических координатах.

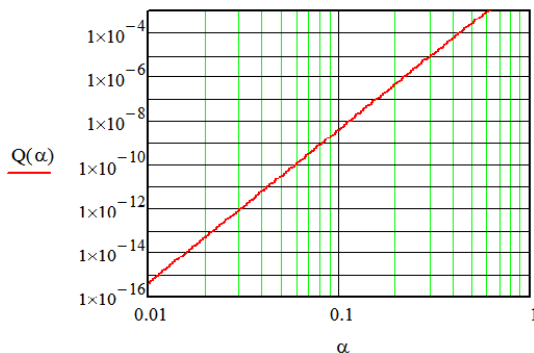


Рис. 1. Двойной интеграл (7.6) как функция угла α в логарифмических масштабах.

Найденная зависимость может быть аппроксимирована линейной функцией в логарифмах. Имеем для малых значений углов две точки прямой: $\alpha_0 = 0.11641$, $Q_0 = 1.0971 \Delta 10^{-8}$ и $\alpha_1 = 0.011169$, $Q_1 = 8.2575 \Delta 10^{-16}$. Прямая линия в логарифмических масштабах означает степенную функцию после потенцирования. По двум точкам степенную функцию можно представить в виде

$$Q(\alpha) = \frac{Q_0}{\alpha_0^k} \alpha^k, \quad k = \frac{\ln(Q_1/Q_0)}{\ln(\alpha_1/\alpha_0)}. \quad (7.7)$$

При выбранном интервале вычисления дают $k = 6.998 \approx 7$. А формула (7.3) указывает на кубическую зависимость, правда для малых $\alpha \rightarrow 0$. Недоверие к (7.3) вызывает тот факт, что площадь сегмента тоже выражается при малых α как α^3 . Получается средняя скорость не зависящей от угла, чего быть не должно.

Множитель при степени α^k в формуле (7.7) получился равным $\frac{Q_0}{\alpha_0^k} = 0.03768$. Рекомендуемая автором приближённая формула вычисления расхода (7.6) для равнобедренного треугольника окончательно приобретает вид (α -в радианах)

$$Q \approx 0.0754 \frac{GR^4}{\mu} \alpha^7. \quad (7.8)$$

8. Применение метода разделения переменных

Широко известный метод разделения переменных помогает выразить точное решение в рядах Фурье и вычислить расход по трубе для ряда сечений. Однако применение связано с некоторыми нюансами, на которые хотелось бы обратить внимание. Рассмотрим, прежде всего, наиболее простой случай течения по прямоугольной трубе.

Это решение приведено в [2], причём оно представлено в симметричном для сторон прямоугольника виде. Мы предпочтём несколько иной, несимметричный вид, чтобы оно было ориентиром при решении для сектора, которого нет в монографической литературе.

Пусть сечением трубы служит область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. На границе области скорость равна нулю, внутри области оператор Лапласа от скорости имеет постоянное значение, равное $-G/\mu$. Решение задачи (1.2) для скорости будем искать в виде тригонометрического ряда по синусам кратного аргумента с полупериодом a . В такой ряд можно разложить и распределение скорости с коэффициентами, зависящими от y . Для нахождения коэффициентов потребуем, чтобы удовлетворялось уравнение (1.2), причём константу в правой части тоже разлагаем в ряд по синусам. Напомним, что число 1 может быть представлено рядом

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right), \quad 0 < x < a. \quad (8.1)$$

Для коэффициентов получаются неоднородные дифференциальные уравнения с нулевыми граничными условиями, решение которых выражается в гиперболических функциях. Точность решения и сходимость ряда, изображающего распределение скоростей внутри прямоугольника такова же, что и для (8.1). Для скорости имеем

$$u(x, y) = \frac{8a^2G}{\pi^3\mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi ky}{2a} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi k(b-y)}{2a}}{k^3 \operatorname{ch} \frac{\pi kb}{2a}} \sin \frac{\pi kx}{a}. \quad (8.2)$$

Счет по формуле (8.2) с применением пакета Mathcad проходит гладко, даже с удержанием до сотни членов ряда. На рис.2 изображены поверхность и изолинии скоростей для квадрата со стороной 1, когда $G/\mu = 1$. Удерживались 9 членов ряда.

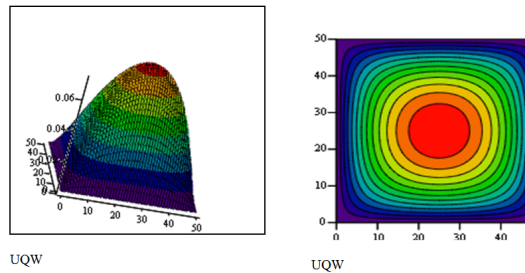


Рис. 2. Изображения распределения скоростей течения в квадратном сечении.

Интегрированием по площади для расхода жидкости получаем ряд

$$Q = \frac{8a^3bG}{\pi^4\mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^4} \left(1 - \frac{2a}{\pi kb} \operatorname{th} \frac{\pi kb}{2a}\right). \quad (8.3)$$

Ряд достаточно быстро сходится. Но стороны прямоугольника входят в эту формулу не симметричным образом. Симметричный, но более громоздкий вид, приведён в [2]. Расчёты показали, что обе формулы дают одинаковый результат.

9. Течение в секторе круга

В качестве области течения рассмотрим сектор круга радиуса R и с углом раствора $\alpha < \pi/2$. Решение задачи (1.2) будем искать в полярных координатах. Итак, имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\frac{G}{\mu}, \quad 0 < r < R, \quad 0 < \varphi < \alpha, \quad G > 0$$

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \quad u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(0, \varphi) = u(R, \varphi) = 0 \quad (9.1)$$

Смысл ограничения на угол α станет понятным в процессе решения. А постановка задачи такова же, как для прямоугольника. И метод решения естественно копировать с решения задачи для прямоугольника. Решение будем искать в виде ряда по синусам

$$u(r, \varphi) = \frac{G}{\mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} f_k(r) \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}, \quad f_k(0) = f_k(R) = 0. \quad (9.2)$$

При такой записи граничные условия для сторон угла, очевидно, удовлетворены. Остается выбрать функции f_k так, чтобы было удовлетворено и уравнение в (9.1). Правую часть в (9.1) заменим согласно формуле (8.1). Введем обозначения для собственных чисел $\lambda_k = \pi k / \alpha$. Тогда

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r f_k') - \frac{\lambda_k^2}{r^2} f_k = -\frac{4}{\pi k}, \quad f_k(0) = f_k(R) = 0. \quad (9.3)$$

Частное решение неоднородного уравнения (9.3) найдётся в виде квадрата радиуса за исключением особых случаев $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 3\pi/2$, когда его нельзя найти в виде квадрата. В этих двух случаях решение вырождается, появляется логарифмический член.

$$f_G(r) = Ar^2, \quad A = A_k = \frac{4}{\alpha \lambda_k (\lambda_k^2 - 4)}, \quad \lambda_k \neq 2, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}. \quad (9.4)$$

Решением же приведённого однородного уравнения для (9.3) являются степенные функции r^{λ_k} и $r^{-\lambda_k}$, из которых из-за условия в нуле можно использовать только первое. Поэтому, решение задачи (9.3) можно искать только в виде

$$f_k(r) = C_k r^{\lambda_k} + A_k r^2. \quad (9.5)$$

Потребуем теперь, чтобы оно обращалось в нуль для значения $r = R$. Константа интегрирования определится как $C_k = -A_k R^{2-\lambda_k}$. Решение задачи (9.3) представляет собой для каждого $k = 1, 3, 5, \dots$ сумму квадратичного члена со степенью λ_k . Следовательно,

$$f_k(r) = A_k R^2 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\lambda_k} \right], \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha}. \quad (9.6)$$

Для острого угла α все $\lambda_k > 2$, A_k и все функции $f_k(r) > 0$. Для прямого угла $\lambda_1 = 2$, $A_1 = \infty$, функция $f_1(r) = \infty \cdot 0$. Но выкладка для A_1 теряет смысл. Задачу надо решать вновь для случая сектора с прямым углом раствора. Для углов, больших прямого, решение сохраняется, $\lambda_1 < 2$, $A_1 < 0$, первый член ряда претерпевает кризис и снова становится пригодным. Ещё один кризис того же порядка ожидается для второго члена при $\alpha = 3\pi/2$ и $k = 3$. Этот случай тоже подлежит особому рассмотрению. Но случай $\alpha = \pi$ проходит, ибо ряд (9.2) содержит только нечетные члены, $k \neq 2$. Итак, распределение скоростей по сектору круга, когда угол раствора отличается от $\pi/2$ и $3\pi/2$, представляется в виде тригонометрического ряда Фурье

$$u(r, \varphi) = \frac{4GR^2}{\alpha\mu} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k (\lambda_k^2 - 4)} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\lambda_k} \right] \sin \lambda_k \varphi, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha}. \quad (9.7)$$

На рис. 3 изображены изолинии скорости для сечения в виде полукруга, $\alpha = \pi$.

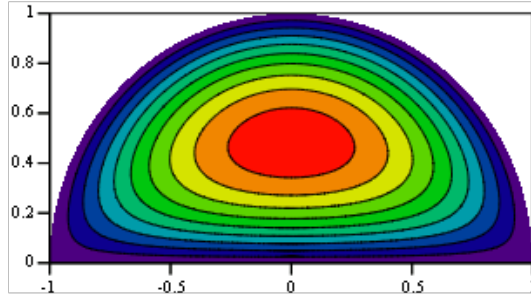
Наибольший интерес с инженерной точки зрения представляет расход по трубе, которого находим интегрированием по сечению ряда (9.7) для скорости. Имеем для сектора

$$Q = \frac{GR^4}{\mu} \cdot \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 (\lambda_k + 2)^2}, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha}. \quad (9.8)$$

При интегрировании кратный интеграл разделяется в произведение определённых интегралов с постоянными пределами, интегрирование синуса даёт в результате $2/\lambda k$. По радиусу интегрирование производим с множителем r , и после приведения к безразмерному виду с вынесением радиуса R^2 , будем иметь простое для интегрирования выражение

$$\int_0^1 (\xi^3 - \xi^{\lambda+1}) d\xi = \frac{\lambda_k - 2}{4(\lambda_k + 2)}, \tag{9.9}$$

что и привело к значительным упрощениям при получении ряда (9.8).



FF

Рис. 3. Линии равных значений скоростей для сечения трубы в виде полукруга.

Формулу (9.8) лучше разбить на 2 множителя, чтобы второй множитель зависел лишь от угла α . Ряд является сходящимся как $1/k^4$, и особые случаи, когда $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = 3\pi/2$ на формуле расхода не отражаются. Интегрирование «съело» эти особенности

$$Q = \frac{GR^4}{\mu} q(\alpha), \quad q(\alpha) = \frac{2\alpha^3}{\pi^4} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2 (k + 2\alpha/\pi)^2}. \tag{9.10}$$

Ниже приведена таблица значений этого ряда $q(\alpha)$ как функция угла раствора сектора в интервале от $\alpha = 0$ и до $\alpha = 2\pi$ через каждые 30° . Последний случай $\alpha = 360^\circ$ соответствует ламинарному течению в круге с одной закреплённой вдоль радиуса пластиной. Для сравнения – соответствующее значение для течения по круглой трубе = 0.39270. Для полукруга расход оказался более чем в 5 раз ниже, чем для круга. Для сектора же с углом раствора в 360° , расход оказался в 1.8 раза ниже, чем для круга.

10. Таблица значений функции $q(\alpha)$ для секторов с углами раствора от 30 до 360° .

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$q(\alpha)$	0.00169	0.00873	0.02058	0.03605	0.05421	0.07439
α	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$q(\alpha)$	0.09614	0.11913	0.14312	0.16793	0.19343	0.21951

Уточним теперь формулу распределения скорости для сектора с прямым углом. Приведем решение задачи (9.3) для случая $\lambda_k = 2k$ при $k = 1$.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r f_1') - \frac{4}{r^2} f_1 = -\frac{4}{\pi}, \quad f_1(0) = f_1(R) = 0. \tag{10.1}$$

Проверкой можно убедиться, что решением этой задачи служит функция

$$f_1(r) = \frac{r^2}{\pi} \ln \frac{R}{r}. \quad (10.2)$$

В формуле (9.7) разность степеней в квадратных скобках для первого члена ряда преобразуется в произведение квадрата радиуса на логарифм. Это же решение можно получить и из (9.6) предельным переходом при $\lambda_1 \rightarrow 2$. В самом деле, после подстановок из (9.6) значения A_1 и равенства $\alpha\lambda_1 = \pi$ получаем для первой функции f_1 выражение

$$f_1(r) = \frac{4R^2}{\pi(\lambda_1^2 - 4)} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda_1} \right] = \frac{4r^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda_1 - 2} \right]}{\pi(\lambda_1 + 2)(\lambda_1 - 2)}. \quad (10.3)$$

Если теперь устремить $\lambda_1 \rightarrow 2$, то видно, что имеем дело с одним из замечательных пределов, который и обращается в логарифм, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a^x}{x} = \ln \frac{1}{a}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a^x}{x} = \ln a$. Значит, в отдельной записи этих особых случаев нет необходимости, при потерях смысла выкладок для коэффициентов ряда следует воспользоваться предельным переходом.

Метод Фурье хорошо известен, однако приведённое его применение к не решённой малоизвестной задаче является довольно поучительным из-за появления особенностей при переходе через некоторые значения параметров задачи.

Заключение

Получены новые точные решения для ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах некруглого сечения. Выведены формулы расхода для сечений в виде эпитроихиды и гипотроихиды, обобщающие формулу Пуазейля, предложена приближённая формула для криволинейного равнобедренного треугольника из дуг окружностей, дано в виде ряда решение для сектора круга и отмечены особые случаи. Доказана теорема о течении внутри острого угла и отмечен кризис решения при приближении заданного угла к прямому углу. Решение для прямого угла не единственно, их бесконечное множество, причём при нулевом значении градиента давления.

Список литературы

- [1] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: ИИЛ. 1956. 528 с.
- [2] Хашпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 630 с.
- [3] Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ. 1955. 519 с.
- [4] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. IV. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
- [5] Карачик В.В., Антропова Н.А. Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона. Математика, управление, экономика. Труды МФТИ. 2011. Том 3. №3. С. 132–145.
- [6] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989. 336 с.